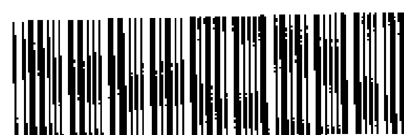
高等学校教材

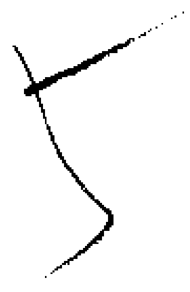
数学模型

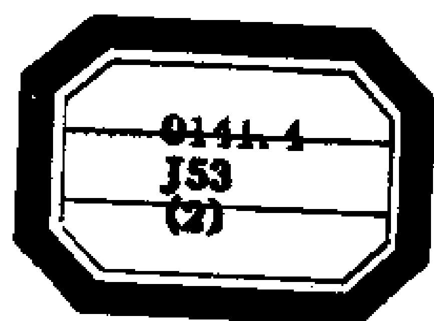
(第二版)

姜启源 编









高等教育出版社

（京）112 号

图书在版编目（CIP）数据

数学模型/姜启源编．－2 版．－北京：高等教育出版社，1993．8（1999 重印）

ISBN 7－04－004505－2

Ⅰ．数… Ⅱ．姜… Ⅲ．数学模型 Ⅳ．O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（95）第 20243 号

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市东城区沙滩后街 55 号　　邮政编码　100009
电　　话　010－64054588　　传　　真　010－64014048
网　　址　http：//www．hep．edu．cn

经　　销　新华书店北京发行所
印　　刷　北京市金顺印刷厂
开　　本　850×1168　1/32　　版　　次　1987 年 4 月第 1 版
　　　　　　　　　　　　　　　　　　　1993 年 8 月第 2 版
印　　张　16.75　　印　　次　1999 年 6 月第 7 次印刷
字　　数　430 000　　定　　价　15.90 元

·内容提要·

本书第一版在1986－1989年度教材评选中获“国家优秀奖”.此次再版，作者在原书基础上增加新模型近30个，并对原书结构重新做了调整．全书包括初等模型、确定性连续模型、确定性离散模型、随机性模型等内容.

该书可作为数学、应用数学专业教材，也可作为其他理工科专业选修课教材和科技工作者的参考书.

序 言

自从1987年高教出版社出版了国内第一本“数学模型”教材以来，已经过去五个年头了. 五年的时间不算长，但在这段时间内、国内关于“数学模型”的教学工作却发展得相当快；在各校的支持下，先后举办了两次全国性的教师培训班，组织了两次教学经验交流会. 据不完全统计，到1991年，全国开设这门课程的高校已超过30所，正式出版的教材有五种. 去年年底，考虑到近年来数学科学发展的趋势，国家教育委员会颁布的理科数学与力学类专业《基本培养规格和教学基本要求》中把这门课程列为数学和应用数学专业的主要基础课和专业基础课.

近年来，国内已有越来越多的人认识到，数学教育不仅要使学生学会并掌握一些数学工具，更应着眼于提高学生的数学素质. 所谓一个人的数学素质包含了许多方面，而“数学建模”能力无疑应是其中一个重要的、也是长期未被重视的一个方面. 从1983年以来，“数学模型”课在清华已开设了十次，先是对应用数学专业的学生，后来扩大为对理工科各专业的学生. 实践表明，这门课程给予学生的训练与传统的数学课程是很不一样的.

“数学模型”一书出版后，经过一些学校试用，很多同志提出了不少很好的意见. 在此基础上，姜启源同志根据自己的教学经验，并参考了近几年国外新出版的教材，完成了对第一版的修订. 新版基本上保持了原书的风格，但作了较大的改动. 无论从模型本身所涉及的范围，还是建模过程中所涉及的数学方法，都比第一版丰富得多. 另外还增加了一批习题和对一些模型的评注，这些材料大多来源于作者讲授这门课的经验以及与同行的讨论，我以为这些都是新版的特色.

这本书新版的问世，对各校普遍开设这门课程应该是有帮助

的．然而要学好这门课，光有一本教材，即使是很好的教材，也是不够的．“要培养学生的洞察力和想象力，靠一本教科书当然是不够的．至少还需要通过教师根据不同的背景和学生的实际情况来灵活运用书中的内容”——这是第一版序言中的一句话，我愿意把它在此重复一遍．

萧树铁

1992年3月于清华园

前　言

一、 最近几十年来随着各门科学技术特别是计算机的不断进步，数学的应用不仅在它的传统领域— 所谓物理领域(力学、电学等学科及机电、土木等工程技术)取得了许多重要进展，而且迅速进入了一些新的领域— 所谓非物理领域(经济、人口、生态、医学等). 数学在发展高科技、提高生产力以及加强系统管理乃至社会生活科学化等方面的重要性已经日益被人们所认识.

将数学方法应用到任何一个实际问题中去，往往首先是把这个问题的内在规律用数字、图表或者公式、符号表示出来，然后经过数学的处理得到定量结果，以供人们作分析、预报、决策或者控制. 这个过程就是通常所说的建立数学模型. 建立数学模型一般说来有机理分析、测试分析等方法，本书主要讨论机理分析方法，即根据客观事物的性质分析因果关系，在适当的简化假设下，利用合适的数学工具得到描述其特征的数学模型.

本书主要介绍非物理领域的数学模型，这是因为数学在这些方面的应用时间不长，需要从建立数学模型开始研究的问题很多，而且一些非物理领域模型的实际背景也往往比较容易了解. 相比之下，数学在许多物理领域的应用已经日趋深入，进一步的研究需要涉及较为专门的知识，不可能也不便在这本书中讨论.

二、 数学模型作为一门课程进入我国高等学校不过是近十年的事，发展却非常迅速，目前不仅许多学校的数学、应用数学、计算数学等数学类专业将它列为必修或限定选修课程，而且一些工科、经济管理、师范等院校也将它列为选修课，普遍受到学生们的欢迎. 与这种发展形势不相适应的是，数学模型的教材种类较少，内容也不够丰富.

本书第一版1987年出版以来，得到全国许多同行和读者的热情支持，收到很多诚挚、中肯的意见. 编者在教学和研究实践中对教材的编写有了一些新的看法，也积累了一些新的实例. 这次修订与第一版相比改动较大，主要有以下几点.

1. 增加约1/2的模型，从原来的约50个增至80个左右. 数学模型教材与其它数学课程教材不同，它不需要按照课本的顺序讲授. 较丰富的实例使教师可以根据专业方向、学生程度和自己的具体情况在教学内容上作出更灵活的安排. 另一方面，建模能力的培养需要阅读、思考大量别人作出的模型，目前这方面的资料不多，本书的一些章节可以作为学生的课外阅读材料.

2. 书的结构重新编排. 按照模型的基本特征(确定性和随机性、连续和离散、稳态和动态等)及所用的数学方法(初等数学、微积分和微分方程、差分方程、概率论等)为基本顺序. 根据编者的实践，这样的顺序对教学比较合适. 同时按照模型的应用领域(经济、人口、工程、医学等)给出辅助目录，便于从事某些专业工作的读者参考.

3. 保留的模型全部重写. 加强和改进对建模背景、目的和模型假设、结果分析等部分的叙述，提高可读性，并增加评注，陈述编者对建模方法、结果推广等方面的意见.

4. 扩充习题. 增加了一些使学生更好地理解、消化书中实例的题目. 为了便于教学凡是需要读者自己作出假设、选择建模方法并求解，因而没有确定答案的习题都标以*号. 从培养建模能力的角度看，学生应该动手作几个标以*号的题目.

用数学规划(线性规划、非线性规划、动态规划等)建模是数学模型的重要部分. 考虑到它涉及的数学方法属于专门的运筹学课程，为了不使本书的内容过于庞大，这次修订仍然没有包含这方面的模型.

阅读本书大部分内容只需要大学工科的微积分、线性代数、

概率论等基本数学知识．某些章节用到的微分方程稳定性、变分法、马氏链等内容书中均有简单介绍．

书中的大多数模型是编者从多种书刊中搜集并从便于教学的角度改编而成的．在叙述过程中都给出了它们的原始出处以供读者查阅．

数学模型是一门新课，教学内容和教学方法都很不成熟，编写教材的困难较大，再加上受编者水平所限，本书必然存在很多不足之处，诚恳希望广大读者提出意见，以便进一步修改．

萧树铁教授对数学模型课程建设和这本教材初版的编写以及这次修订一直给予关心和指导，并再次为本书作序；叶其孝教授审阅了全书，提出了宝贵的意见；任善强、杨启帆、葛玉安、边馥萍、陈义华、李飞宇等同行为本书的修订提出了中肯的建议．在此向他们一并表示衷心的谢意．

编者　1992.4

《现代数学基础丛书》编委会



目　　录

第一篇　初 等 模 型

第二篇 确定性连续模型

第三篇 确定性离散模型

第四篇 随机性模型

第五篇　更复杂的模型

辅助目录(按照应用领域分类)

一、经济与管理模型

二、社会与人文模型

三、工业与科技模型

四、人口与交通模型

五、生态与环境模型

六、体育、生理与医疗模型

第1章 建立数学模型

随着科学技术的迅速发展，**数学模型**这个词汇越来越多地出现在现代人的生产、工作和社会活动中．电气工程师必须建立所要控制的生产过程的数学模型，用这个模型对控制装置作出相应的设计和计算，才能实现有效的过程控制．气象工作者为了得到准确的天气预报，一刻也离不开根据气象站、气象卫星汇集的气压、雨量、风速等资料建立的数学模型．生理医学专家有了药物浓度在人体内随时间和空间变化的数学模型，就可以分析药物的疗效，有效地指导临床用药．城市规划工作者需要建立一个包括人口、经济、交通、环境等大系统的数学模型，为领导层对城市发展规划的决策提供科学根据．厂长经理们要是能够根据产品的需求状况、生产条件和成本、贮存费用等信息，筹划出一个合理安排生产和销售的数学模型，一定可以获得更大的经济效益．就是在日常活动如访友、采购当中，人们也会谈论找一个数学模型，优化一下出行的路线．对于广大的科学技术人员和应用数学工作者来说，建立数学模型是沟通摆在面前的实际问题与他们掌握的数学工具之间联系的一座必不可少的桥梁．

本章作为全书的导言和数学模型的概述，主要讨论建立数学模型的意义、方法和步骤，给读者以建立数学模型的全面的、初步的了解．1.1 节从现实对象和它的模型开始，着重介绍数学模型的意义；1.2 ~ 1.4 节通过几个示例说明用数学语言和数学方法表述和解决实际问题，即建立数学模型的过程；1.5 节介绍建立数学模型的一般方法和步骤；1.6 节主要讨论数学模型的特点及培养建立数学模型能力的问题；1.7 节简要介绍数学模型的分类情况．

1.1 从现实对象到数学模型

人类生活在丰富多采、变化万千的现实世界里，无时无刻不在运用智慧和力量去认识、利用、改造这个世界，从而不断地创造出日新月异、五彩缤纷的物质文明和精神文明. 博览会常常是集中展示这些成果的场所之一，那些五光十色、精美绝伦的展品给我们留下了深刻的印象. 工业博览会上，豪华、舒适的新型汽车叫人赞叹不已；农业博览会上，硕大、娇艳的各种水果令人流连忘返；科技展览厅里，大型水电站模型雄伟壮观，人造卫星模型高高耸立，清晰的数字和图表显示着电力工业的迅速发展，和整面墙壁一样大的地图上鲜明地标出了新建的铁路和新辟的航线，核电站工程的彩色巨照前，手持原子结构模型的讲解员深入浅出地介绍反应堆的运行机理；电影演播室里，播放着一部现代化炼钢厂实现生产自动控制的科技影片，其中既有火花四溅的钢坯浇铸情景，也有展示计算机管理和控制的框图、公式和程序.

参观博览会，像汽车、水果那些原封不动地从现实世界搬到展厅里的物品固然给人以亲切真实的感受，可是从开阔眼界、丰富知识的角度看，电站、卫星、铁路、钢厂…… 这些在现实世界被人们认识、建造、控制的对象，以它们的各种形式的模型—实物模型、照片、图表、公式、程序…… 汇集在人们面前，这些模型在短短几小时里所起的作用，恐怕是置身现实世界多少天也无法做到的.

与形形色色的模型相对应，它们在现实世界里的原始参照物通称为原型. 本节先讨论原型和模型，特别是数学模型的关系，再介绍数学模型的意义.

原型和模型　原型(Prototype)和模型(Model)是一对对偶体. **原型**指人们在现实世界里关心、研究或者从事生产、管理的实际对象. 在科技领域通常使用系统(System)、过程(Process)等

词汇，如机械系统、电力系统、生态系统、生命系统、社会经济系统，又如钢铁冶炼过程、导弹飞行过程、化学反应过程、污染扩散过程、生产销售过程、计划决策过程等．本书所述的现实对象、研究对象、实际问题等均指原型．**模型**则指为了某个特定目的将原型的某一部分信息简缩、提炼而构造的原型替代物．

这里特别强调构造模型的目的性．模型不是原型原封不动的复制品，原型有各个方面和各种层次的特征，而模型只要求反映与某种目的有关的那些方面和层次．一个原型，为了不同的目的可以有许多不同的模型．如放在展厅里的飞机模型应该在外形上逼真，但是不一定会飞，而参加航模竞赛的模型飞机要具有良好的飞行性能，在外观上不必苛求．至于在飞机设计、试制过程中用到的数学模型和计算机模拟，则只要求在数量规律上真实反映飞机的飞行动态特性，毫不涉及飞机的实体．所以模型的基本特征是由构造模型的目的决定的．

我们已经看到模型有各种形式．用模型替代原型的方式来分类，模型可以分为**物质模型**（**形象模型**）和**理想模型**（**抽象模型**）．前者包括直观模型、物理模型等，后者包括思维模型、符号模型、数学模型等．

直观模型　指那些供展览用的实物模型，以及玩具、照片等，通常是把原型的尺寸按比例缩小或放大，主要追求外观上的逼真．这类模型的效果是一目了然的．

物理模型　主要指科技工作者为一定目的根据相似原理构造的模型，它不仅可以显示原型的外形或某些特征，而且可以用来进行模拟实验，间接地研究原型的某些规律．如波浪水箱中的舰艇模型用来模拟波浪冲击下舰艇的航行性能，风洞中的飞机模型用来试验飞机在气流中的空气动力学特性．有些现象直接用原型研究非常困难，更可借助于这类模型，如地震模拟装置，核爆炸反应模拟设备等．应注意验证原型与模型间的相似关系，以确定模拟实验结果的可靠性．物理模型常可得到实用上很有价值的结果，

但也存在成本高、时间长、不灵活等缺点.

思维模型 指通过人们对原型的反复认识，将获取的知识以经验形式直接贮存于人脑中，从而可以根据思维或直觉作出相应的决策. 如汽车司机对方向盘的操纵，一些技艺性较强的工种(如钳工)的操作，大体上是靠这类模型进行的. 通常说的某些领导者凭经验作决策也是如此. 思维模型便于接受，也可以在一定条件下获得满意的结果，但是它往往带有模糊性、片面性、主观性、偶然性等缺点，难以对它的假设条件进行检验，并且不便于人们的相互沟通.

符号模型 是在一些约定或假设下借助于专门的符号、线条等，按一定形式组合起来描述原型. 如地图、电路图、化学结构式等，具有简明、方便、目的性强及非量化等特点.

本书要专门讨论的**数学模型**则是由数字、字母或其它数学符号组成的，描述现实对象数量规律的数学公式、图形或算法.

与数学模型有密切关系的数学模拟，主要指运用数字式计算机的**计算机模拟**(Computer Simulation). 它根据实际系统或过程的特性，按照一定的数学规律用计算机程序语言模拟实际运行状况，并依据大量模拟结果对系统或过程进行定量分析. 例如通过各种工件在不同机器上按一定工艺顺序加工的模拟，能够识别生产过程中的瓶颈环节；通过高速公路上交通流的模拟，可以分析车辆在路段上的分布特别是堵塞的状况. 与用物理模型的模拟实验相比，计算机模拟有明显的优点：成本低、时间短、重复性高、灵活性强，有人把计算机模拟作为建立数学模型的手段之一，但是数学模型在某种意义下描述了对象内在特性的数量关系，其结果容易推广，特别是得到了解析形式答案时，更易推广. 而计算机模拟则完全模仿对象的实际演变过程，难以从得到的数字结果分析对象的内在规律. 当然，对于那些因内部机理过于复杂，目前尚难以建立数学模型的实际对象，用计算机模拟获得一些定量结果，可称是解决问题的有效手段.

什么是数学模型　数学模型应该说是每个人都十分熟悉的. 早在学习初等代数的时候我们就已经用建立数学模型的方法来解决实际问题了. 当然其中许多问题是老师为了教会学生知识而人为设置的. 譬如你一定解过这样的所谓“航行问题”:

甲乙两地相距 750 公里, 船从甲到乙顺水航行需 30 小时, 从乙到甲逆水航行需 50 小时, 问船速、水速各若干?

用 x、y 分别代表船速和水速, 可以列出方程

$$(x+y)\cdot 30=750,\quad (x-y)\cdot 50=750$$

实际上, 这组方程就是上述航行问题的数学模型. 列出方程, 原问题已转化为纯粹的数学问题. 方程的解 $x=20$(公里／小时), $y=5$(公里／小时), 最终给出了航行问题的答案.

当然, 真正实际问题的数学模型通常要复杂得多, 但是数学模型的基本内容已经包含在解这个代数应用题的过程中了. 那就是: 根据建立数学模型的目的和问题的背景作出必要的简化假设(航行中设船速和水速为常数); 用字母表示待求的未知量(x、y 代表船速和水速); 利用相应的物理或其它规律(匀速运动的距离等于速度乘以时间), 列出数学式子(二元一次方程); 求出数学上的解答($x=20, y=5$); 用这个答案解释原问题(船速和水速分别为 20 公里／小时和 5 公里／小时); 最后还要用实际现象来验证上述结果.

一般地说, **数学模型**可以描述为, 对于现实世界的一个**特定对象**, 为了一个**特定目的**, 根据特有的**内在规律**, 做出一些必要的**简化假设**, 运用适当的**数学工具**, 得到的一个**数学结构**.

需要指出, 本书的重点不在于介绍现实对象的数学模型(Mathematical Model)是什么样子, 而是要讨论建立数学模型(Mathematical Modelling)的全过程. 数学模型和建立数学模型下面常简称为**模型**和**建模**.

为什么需要数学模型 数学是研究现实世界中的数量关系和空间形式的科学. 它的产生和许多重大发展都是和现实世界的生产活动和其它相应学科的需要密切相关的. 同时，数学作为认识和改造世界的强有力的工具，又促进了科学技术和生产建设的发展. 17 世纪伟大的科学家牛顿在研究力学的过程中发明了近代数学最重要的成果之一——微积分，并以微积分为工具推导了著名的力学定律——万有引力定律. 这一成就是科学发展史上成功地建立数学模型的范例(5.10 节将介绍这个建模过程).

数学的特点不仅在于它的概念的抽象性、逻辑的严密性和结论的确定性，而且在于它的应用的广泛性. 进入 20 世纪以来，数学的应用不仅在它的传统领域——所谓**物理领域**(诸如力学、电学等学科及机电、土木、冶金等工程技术)继续取得许多重要进展，而且迅速进入了一些新领域——所谓**非物理领域**(诸如经济、交通、人口、生态、医学、社会等领域)，产生了如数量经济学、数学生态学等边缘学科.

马克思曾说过: **"一门科学只有成功地运用数学时，才算达到了完善的地步"**.*) 可以认为数学在各门科学中被应用的水平，标志着这门科学发展的水平. 随着科学技术的进步，特别是电子计算机技术的迅速发展，数学已经渗透到从自然科学技术到工农业生产建设，从经济活动到社会生活的各个领域. 一般地说，当实际问题需要我们对所研究的现实对象提供分析、预报、决策、控制等方面的定量结果时，往往都离不开数学的应用，而建立数学模型则是这个过程的关键环节.

分析 通常指定量研究现实对象的某种现象，或定量描述某种特性. 例如研究不同种群的生物在同一自然环境下生存时，相互竞争和依存的现象; 描述药物浓度在人体内的变化规律以分析药物的疗效.

预报 一般是根据对象的固有特性预测当时间或环境变化时

---

*) 见保尔·拉法格等著: "回忆马克思恩格斯", 第 7 页. 人民出版社, 1973.

对象的发展规律. 人口预报、天气预报以及传染病蔓延高潮时刻的预报可以作为这方面的例子.

决策 其含义很广, 譬如根据对象满足的规律作出使某个数量指标达到最优的决策. 使经济效益最大的价格策略, 使总费用最少的设备维修方案都是这类决策.

控制 一般指根据对象的特征和某些指标给出尽可能满意的控制方案. 例如化工生产过程中温度和流量的控制, 利用红绿灯对交通流进行控制等.

以上列举的关于分析、预报、决策、控制的例子, 大部分将作为典型的数学模型出现在本书的各个章节中.

虽然数学模型应用的领域十分广泛, 但是本书以讨论非物理领域中的模型为主. 这是因为在一些物理领域特别是与力学、电学等学科相关的工程技术领域中, 主要由物理定律所确定的数学模型已经比较成熟, 一些比较深入的问题常常需要专门的知识, 不可能也不便于在这本书中讨论. 而数学在一些非物理领域中的应用则刚刚起步, 需要研究的问题很多, 并且模型的实际背景往往容易了解. 这些领域可以说是应用数学的一块广阔的新天地.

建立数学模型的全过程 前面的航行问题大致描述了用建模方法解决实际问题的途径. 一般说来这一过程可以分为表述、求解、解释、验证几个阶段, 并且通过这些阶段完成从现实对象到数学模型, 再从数学模型回到现实对象的循环, 如图 1－1 所示.

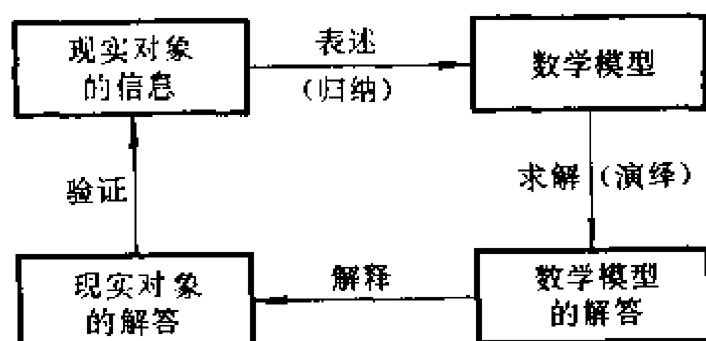


图 1－1 现实对象和数学模型的关系

表述(Formulation) 是指根据建模的目的和掌握的信息(如

数据、现象），将实际问题翻译成数学问题，用数学语言确切地表述出来.

求解(Solution)　即选择适当的数学方法来得数学模型的解答.

解释(Interpretation)　是指把数学语言表述的解答翻译回现实对象，给出实际问题的解答.

验证(Verification)　是指用现实对象的信息检验得到的解答，以确认结果的正确性.

表述属于**归纳法**，求解属于**演绎法**. 归纳是依据个别现象推断一般规律，演绎则是按照一般原理考察特定对象，导出结论. 因为任何事物的本质都要通过现象来反映，必然要透过偶然来表露，所以正确的归纳不是主观、盲目的，而是有客观基础的，但也往往是不精细的，带感性的，不易直接检验其正确性. 演绎利用严格的逻辑推理，对解释现象、作出科学预见具有重要意义，但是它要以归纳的结论作为公理化形式的前提，只能在这个前提下保证其正确性. 因此归纳与演绎是一个辩证统一的过程：归纳是演绎的基础，演绎是归纳的指导[44].

图 1－1 揭示了现实对象和数学模型的关系. 数学模型是将现实对象的信息加以翻译、归纳的产物，它源于现实，又高于现实，因为它用精确的语言表述了对象的内在特性. 数学模型经过求解、演绎，得到数学上的解答，再经过翻译回到现实对象，给出分析、预报、决策、控制的结果. 最后，这些结果必须经受实际的检验，完成实践—理论—实践这一循环. 如果检验结果正确或基本正确，就可以用来指导实际，否则应重复上述过程.

1.2　建模示例之一　椅子能在不平的地面上放稳吗

本节和下面两节将给出三个建立数学模型的例子，说明从现实对象到数学模型的过程，重点是如何作出合理的、简化的假设，

用数学语言确切地表述实际问题，以及模型的结果怎样解释实际现象.

本节讨论的问题来源于日常生活中一件普通的事实：把椅子往不平的地面上一放，通常只有三只脚着地，放不稳，然而只需稍挪动几次，就可以使四只脚同时着地，放稳了. 这个看来似乎与数学无关的现象能用数学语言给以表述，并用数学工具来证实吗？让我们试试看[28].

模型假设 对椅子和地面应该作一些必要的假设：

1. 椅子四条腿一样长，椅脚与地面接触处可视为一个点，四脚的连线呈正方形.

2. 地面高度是连续变化的，沿任何方向都不会出现间断(没有像台阶那样的情况)，即地面可视为数学上的连续曲面.

3. 对于椅脚的间距和椅腿的长度而言，地面是相对平坦的，使椅子在任何位置至少有三只脚同时着地.

假设1显然是合理的. 假设2相当于给出了椅子能放稳的条件，因为如果地面高度不连续，譬如在有台阶的地方是无法使四只脚同时着地的. 至于假设3是要排除这样的情况：地面上与椅脚间距和椅腿长度的尺寸大小相当的范围内，出现深沟或凸峰(即使是连续变化的)，致使三只脚无法同时着地.

模型构成 中心问题是用数学语言把椅子四只脚同时着地的条件和结论表示出来.

首先要用变量表示椅子的位置. 注意到椅脚连线呈正方形，以中心为对称点，正方形绕中心的旋转正好代表了椅子位置的改变，于是可以用旋转角度这一变量表示椅子的位置. 在图1-2中椅脚连线为正方形 $ABCD$，对角线 AC 与 x 轴

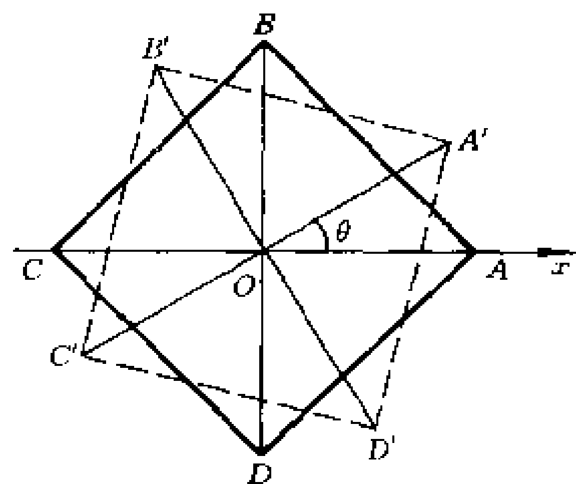


图1-2 变量θ表示椅子的位置

重合，椅子绕中心点 O 旋转角度 θ 后，正方形 $ABCD$ 转至 $A'B'C'D'$ 的位置，所以对角线 AC 与 x 轴的夹角 θ 表示了椅子的位置.

其次要把椅脚着地用数学符号表示出来. 如果用某个变量表示椅脚与地面的竖直距离，那么当这个距离为零时就是椅脚着地了. 椅子在不同位置时椅脚与地面的距离不同，所以这个距离是椅子位置变量 θ 的函数.

虽然椅子有四只脚，因而有四个距离，但是由于正方形的中心对称性，只要设两个距离函数就行了. 记 A、C 两脚与地面距离之和为 $f(\theta)$，B、D 两脚与地面距离之和为 $g(\theta)$，$f(\theta)$，$g(\theta)\geqslant 0$. 由假设 2，f 和 g 都是连续函数. 由假设 3，椅子在任何位置至少有三只脚着地，所以对于任意的 θ，$f(\theta)$和 $g(\theta)$中至少有一个为零. 当 $\theta=0$ 时不妨设 $g(\theta)=0$，$f(\theta)>0$. 这样，改变椅子的位置使四只脚同时着地，就归结为证明如下的数学命题：

已知 $f(\theta)$和 $g(\theta)$是 θ 的连续函数，对任意 θ，$f(\theta)\cdot g(\theta)=0$，且 $g(0)=0$，$f(0)>0$. 则存在 θ_0，使 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

可以看到，引入了变量 θ 和函数 $f(\theta)$、$g(\theta)$，就把模型的假设条件和椅脚同时着地的结论用简单、精确的数学语言表述出来，从而构成了这个实际问题的数学模型.

模型求解　上述命题有多种证明方法，这里介绍其中的一种.

将椅子旋转 $90°(\pi/2)$，对角线 AC 与 BD 互换. 由 $g(0)=0$ 和 $f(0)>0$ 可知 $g(\pi/2)>0$ 和 $f(\pi/2)=0$.

令 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，则 $h(0)>0$ 和 $h(\pi/2)<0$. 由 f 和 g 的连续性知 h 也是连续函数. 根据连续函数的基本性质，必存在 $\theta_0(0<\theta_0<\pi/2)$使 $h(\theta_0)=0$，即 $f(\theta_0)=g(\theta_0)$.

最后，因为 $f(\theta_0)\cdot g(\theta_0)=0$，所以 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

由于这个实际问题非常直观和简单，模型解释和验证就略去了.

评注　这个模型的巧妙之处在于用一元变量 θ 表示椅子的位

置，用 θ 的两个函数表示椅子四脚与地面的距离．利用正方形的中心对称性及旋转 90 °并不是本质的．读者可以考虑四脚呈长方形的情形(习题 3)．

1.3 建模示例之二 商人们怎样安全过河

三名商人各带一个随从乘船渡河，一只小船只能容纳二人，由他们自己划行．随从们密约，在河的任一岸，一旦随从的人数比商人多，就杀人越货．但是如何乘船渡河的大权掌握在商人们手中．商人们怎样才能安全渡河呢？

对于这类智力游戏经过一番逻辑思索是可以找出解决办法的．这里用数学模型求解，一是为了给出建模的示例，二是因为这类模型可以解决相当广泛的一类问题，比逻辑思索的结果容易推广．

由于这个虚拟的问题已经理想化了，所以不必再作假设．安全渡河问题可以视为一个多步决策过程．每一步，即船由此岸驶向彼岸或从彼岸驶回此岸，都要对船上的人员(商人、随从各几人)作出决策，在保证安全的前提下(两岸的商人数都不比随从数少)，在有限步内使人员全部过河．用状态(变量)表示某一岸的人员状况，决策(变量)表示船上的人员状况，可以找出状态随决策变化的规律．问题转化为在状态的允许变化范围内(即安全渡河条件)，确定每一步的决策，达到渡河的目标．

模型构成　记第 k 次渡河前此岸的商人数为 x_k，随从数为 y_k，$k=1,2,\cdots\cdots$，$x_k, y_k=0,1,2,3$．将二维向量 $s_k=(x_k, y_k)$定义为**状态**．安全渡河条件下的状态集合称为**允许状态集合**，记作 S．不难写出

$$S=\{(x,y) \mid x=0, y=0,1,2,3; x=3, y=0,1,2,3; x=y=1,2\} \tag{1}$$

记第 k 次渡船上的商人数为 u_k，随从数为 v_k．将二维向量 $d_k=$

(u_k, v_k)定义为**决策**. **允许决策集合**记作 D, 由小船的容量可知

$$D=\{(u,v) \mid u+v=1,2\} \tag{2}$$

因为 k 为奇数时船从此岸驶向彼岸, k 为偶数时船由彼岸驶回此岸, 所以状态 s_k 随决策 d_k 变化的规律是

$$s_{k+1}=s_k+(-1)^k d_k \tag{3}$$

(3)式称**状态转移律**. 这样, 制订安全渡河方案归结为如下的多步决策问题:

求决策 $d_k \in D\ (k=1,2,\cdots,n)$, 使状态 $s_k \in S$ 按照转移律(3), 由初始状态 $s_1=(3,3)$经有限步 n 到达状态 $s_{n+1}=(0,0)$.

模型求解 根据(1)~(3)式编一段程序用计算机求解上述多步决策问题是可行的. 不过对于商人和随从人数不大的简单状况, 用图解法解这个模型更为方便.

在 xoy 平面坐标系上画出图 1-3 那样的方格, 方格点表示状态 $s=(x,y)$. 允许状态集合 S 是用圆点标出的 10 个格子点. 允许决策 d_k 是沿方格线移动 1 或 2 格, k 为奇数时向左、下方移动, k 为偶数时向右、上方移动. 要确定一系列的 d_k 使由 $s_1=(3,3)$经过那些圆点最终移至原点(0,0).

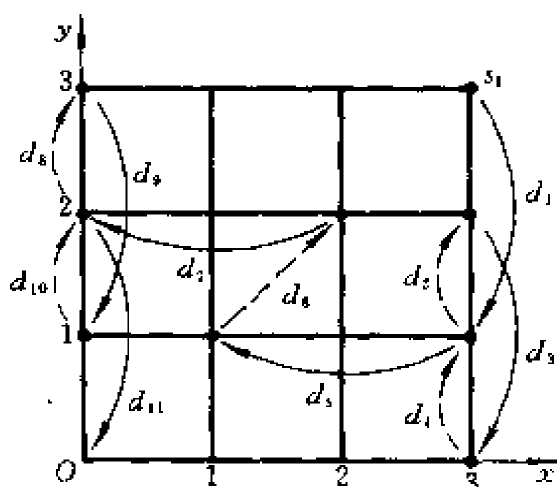


图1-3 安全渡河问题的图解法

图 1-3 给出了一种移动方案, 经过决策 $d_1, d_2, \cdots, d_{11}$, 最终有 $s_{12}=(0,0)$. 这个结果很容易翻译成渡河的方案.

评注 这里介绍的模型是一种规格化的方法, 使我们可以用计算机求解, 从而具有推广的意义. 譬如当商人和随从人数增加或小船的容量加大时, 靠逻辑思考就困难了, 而用这种模型则

仍可方便地求解．读者不妨考虑四名商人各带一个随从的情况(小船同前)．另外，适当地设置状态和决策，并确定状态转移律，是有效地解决很广泛的一类问题的建模方法，在以后的章节中还要用到．

1.4 建模示例之三 如何预报人口的增长

人口的增长是当前世界上引起普遍关注的问题，我们经常在报刊上看见关于人口增长的预报，说到本世纪末，或下世纪中叶，全世界(或某地区)的人口将达到多少多少亿．你可能注意到不同报刊对同一时间人口的预报在数字上常有较大的差别，这显然是由于用了不同的人口模型计算的结果．先看一种最简单的计算方法．

要预报未来若干年譬如2000年的人口，最重要的影响因素自然是今年的人口和今后这些年的增长率(即人口出生率减去死亡率)，根据这两个数据进行人口预报是十分容易的．例如据我国国家统计局1990年10月30日发表的公报，1990年7月1日我国人口总数为11.6亿，过去8年的平均年增长率为14.8‰．如果今后的年增长率保持这个数字，那么容易算出：1年后我国人口为$11.6\times(1+0.0148)=11.77$(亿)，10年后即2000年将为$11.6\times(1+0.0148)^{10}\doteq 13.44$(亿)．这种算法用式子表示也十分简单．记今年人口为x_0，k年后人口为x_k，年增长率为r，则预报公式为

$$x_k=x_0(1+r)^k \tag{1}$$

显然，这个公式的基本前提是年增长率r保持不变．这个条件在什么情况下才成立，如果不成立又该怎么办．历史上，人口模型的发展过程回答了这个问题．

早在18世纪人们就开始进行人口预报工作了，一二百年来

发展了许多模型，本节只介绍其中最简单的两种.

指数增长模型(马尔萨斯人口模型)

英国人口学家马尔萨斯(Malthus 1766－1834)根据百余年的人口统计资料，于1798年提出了著名的人口指数增长模型. 这个模型的基本假设是：人口的增长率是常数，或者说，单位时间内人口的增长量与当时的人口成正比.

记时刻 t 的人口为 $x(t)$，当考察一个国家或一个很大地区的人口时，$x(t)$是很大的整数. 为了利用微积分这一数学工具，将 $x(t)$视为连续、可微函数. 记初始时刻($t=0$)的人口为 x_0，人口增长率为 r，r 是单位时间内 $x(t)$的增量与$x(t)$的比例系数. 根据 r 是常数的基本假设，t 到 $t+\Delta t$ 时间内人口的增量为

$$x(t+\Delta t)-x(t)=rx(t)\Delta t$$

于是 $x(t)$满足如下的微分方程：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=rx \\ x(0)=x_0 \end{cases} \tag{2}$$

由这个线性常系数微分方程容易解出

$$x(t)=x_0e^{rt} \tag{3}$$

表明人口将按指数规律无限增长($r>0$).

将 t 以年为单位离散化，(3)式表明，人口以 e^r 为公比的等比数列增长. 因为这时 r 表示年增长率，通常 $r \ll 1$，所以可用近似关系 $e^r \doteq 1+r$ 将(3)式写作

$$x(t)\doteq x_0(1+r)^t \tag{4}$$

(1)式与(4)式比较可知，前面给出的预报公式(1)不过是指数增

长模型离散形式的近似表示.

由(3)(或(2))式给出的模型，与 19 世纪以前欧洲一些地区的人口统计数据可以很好地吻合. 一些人口增长率长期稳定不变的国家和地区用这个模型进行预报，结果也令人满意. 但是当人们用 19 世纪以后许多国家的人口统计资料与指数增长模型比较时，却发现了相当大的差异. 表 1－1 列出了美国 19 世纪、20 世纪的人口统计数据与这个模型的比较结果. 表中第 3 列是用(3)式计算的结果，其中 $x_0 = 3.9 \times 10^6$ 为 1790 年($t=0$)的实际人口，t 以 10 年为单位，10 年增长率 $r = 0.307$ 是由 x_0 和 1800 年的实际人口 $x(1) = 5.3 \times 10^6$，用(3)式确定出来的. 显然，用这个模型预报的结果远远超过了实际人口的增长. 引起误差的原因是 10 年增长率 r 估计过高. 按照表中第2 列给出的实际人口可以算出，19 世纪 100 年和 20 世纪前 80 年的 10 年增长率分别为 0.266 和 0.137，远小于 1790 到 1800 年的增长率 0.307. 这个事实对 r 是常数的基本假设提出了异议[17].

表 1－1 美国的实际人口与按两种模型计算的人口的比较

年	实际人口	指数增长模型		阻滞增长模型	
	$(\times 10^6)$	$(\times 10^6)$	误差(%)	$(\times 10^6)$	误差(%)
1790	3.9				
1800	5.3				
1810	7.2	7.3	1.4		
1820	9.6	10.0	4.2	9.7	1.0
1830	12.9	13.7	6.2	13.0	0.8
1840	17.1	18.7	9.4	17.4	1.8
1850	23.2	25.6	10.3	23.0	−0.9
1860	31.4	35.0	10.8	30.2	−3.8
1870	38.6	47.8	23.8	38.1	−1.3
1880	50.2	65.5	30.5	49.9	−0.6
1890	62.9	89.6	42.4	62.4	−0.8
1900	76.0	122.5	61.2	76.5	0.7
1910	92.0	167.6	82.1	91.6	−0.4

续表

年	实际人口 $(\times 10^6)$	指数增长模型		阻滞增长模型	
		$(\times 10^6)$	误差(%)	$(\times 10^6)$	误差(%)
1920	106.5	229.3	115.3	107.0	0.5
1930	123.2			122.0	−1.0
1940	131.7			135.9	3.2
1950	150.7			148.2	−1.7
1960	179.3			158.8	−11.4
1970	204.0			167.6	−17.8
1980	226.5				

人们还发现，在地广人稀的加拿大领土上，法国移民后代的人口比较符合指数增长模型，而同一血统的法国本土居民人口的增长却远低于这个模型.

产生上述现象的主要原因是，随着人口的增加，自然资源、环境条件等因素对人口继续增长的阻滞作用越来越显著. 如果当人口较少时(相对于资源而言)人口增长率还可以看作常数的话，那么当人口增加到一定数量后，增长率就会随着人口的继续增加而逐渐减少. 许多国家人口增长的实际情况完全证实了这点. 读者不妨利用表 1－1 第 2 列给出的数据计算一下美国人口每 10 年的增长率，可以知道大致是逐渐下降的. 当然，由于从欧洲大批移民或战争的影响，人口增长率会有些波动.

看来为了使人口预报特别是长期预报更好地符合实际情况，必须修改指数增长模型关于人口增长率是常数这个基本假设了.

阻滞增长模型(Logistic 模型)

将增长率 r 表示为人口 $x(t)$的函数 $r(x)$，按照前面的分析 $r(x)$应是 x 的减函数. 一个最简单的假定是设 $r(x)$为 x 的线性函数 $r(x)=r-sx, r, s>0$, 这里 r 相当于 $x=0$ 时的增长率，称**固有增长率**. 它与指数模型中的增长率 r 不同(虽然用了相同的符号). 显然对于任意的 $x>0$, 增长率 $r(x)<r$. 为了确定系数 s 的意义，

引入自然资源和环境条件所能容纳的最大人口数量 x_m，称**最大人口容量**. 当 $x=x_m$ 时增长率应为零，即 $r(x_m)=0$，由此确定出 s. 人口增长率函数 $r(x)$ 可以表为

$$r(x)=r\left(1-\frac{x}{x_m}\right) \tag{5}$$

其中 r、x_m 是根据人口统计数据或经验确定的常数. 因子 $\left(1-\frac{x}{x_m}\right)$ 体现了对人口增长的阻滞作用. (5)式的另一种解释是，增长率 $r(x)$ 与人口尚未实现部分(对最大容量 x_m 而言)的比例 $\frac{x_m-x}{x_m}$ 成正比，比例系数为固有增长率 r.

在(5)式的假设下指数增长模型(2)应修改为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r\left(1-\dfrac{x}{x_m}\right)x \\ x(0)=x_0\end{cases} \tag{6}$$

称为阻滞增长模型. 非线性微分方程(6)可用分离变量法求解，结果为

$$x(t)=\frac{x_m}{1+\left(\dfrac{x_m}{x_0}-1\right)e^{-rt}} \tag{7}$$

图 1－4 中根据(6)、(7)两式画出了 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\sim x$ 和 $x\sim t$ 曲线. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\sim x$ 是一条抛物线，它表明人口增长率 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 随着人口

数量 x 的增加而先增后减，在 $x=\frac{x_m}{2}$ 处达到最大值．$x \sim t$ 是一条 S 型曲线，拐点在 $x=\frac{x_m}{2}$ 处，当 $t \to \infty$ 时 $x \to x_m$.

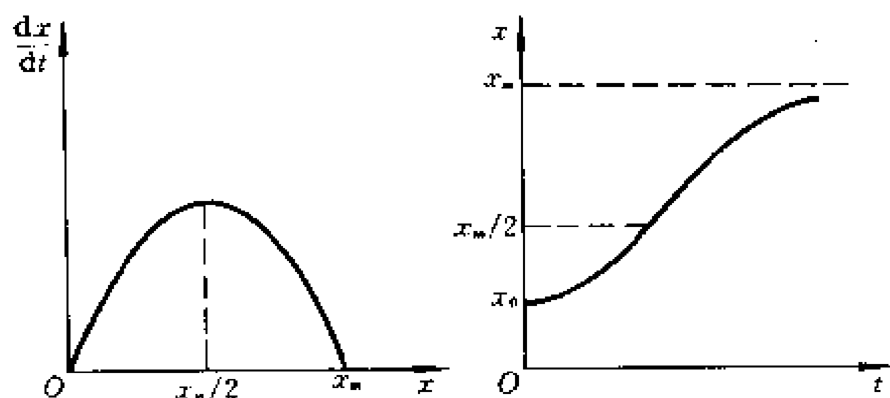


图 1－4　阻滞增长模型的曲线

本世纪初人们曾用这个模型预报美国的人口．为了与指数增长模型比较，我们将计算结果放在表 1－1 第 5 列中．计算时 $x_0 = 3.9 \times 10^6$ 仍是 1790 年的人口，而 $r=0.31$ 和 $x_m = 197 \times 10^6$ 则是用 1800－1930 年的实际数据，拟合出形如(5)式的线性函数后确定的．从表中数字可以看到，直到 1930 年计算结果都能与实际数据较好地吻合．后来的误差越来越大，一个明显的原因是到 1960 年美国的实际人口已经突破了用过去数据确定的最大人口容量 x_m. 由此看来，这个模型的缺点之一是 x_m 不易准确地得到．事实上，随着生产力的发展和人们认识能力的改变，x_m 也是可以改变的．

阻滞增长模型(6)式又称 Logistic 模型．Logistic 模型的用途很广，以后的章节中我们还要多次碰到它[27]．

更复杂的人口模型

指数增长模型和阻滞增长模型都是确定性的、只考虑人口总数的连续时间模型．在研究过程中人们还发展了随机性模型，考虑人口年龄分布的模型等，其中有连续时间模型也有离散时间模型，这些将在以后介绍．

1.5 建立数学模型的方法和步骤

一般说来建立数学模型的方法大体上可分为两大类，一类是机理分析方法，一类是测试分析方法．**机理分析**是根据对现实对象特性的认识，分析其因果关系，找出反映内部机理的规律，建立的模型常有明确的物理或现实意义．1.2 ~ 1.4 节的示例都属于机理分析方法．**测试分析**将研究对象视为一个“黑箱”系统，内部机理无法直接寻求，可以测量系统的输入输出数据，并以此为基础运用统计分析方法，按照事先确定的准则在某一类模型中选出一个与数据拟合得最好的模型．这种方法称为**系统辨识**(System Identification)．将这两种方法结合起来也是常用的建模方法，即用机理分析建立模型的结构，用系统辨识确定模型的参数．

可以看出，用上面的哪一类方法建模主要是根据我们对研究对象的了解程度和建模目的决定的．如果掌握了机理方面的一定知识，模型也要求具有反映内部特性的物理意义，那么应该以机理分析方法为主．当然，若需要模型参数的具体数值，还可以用系统辨识或其他统计方法得到．如果对象的内部机理基本上不掌握，模型也不用于分析内部特性，譬如仅用来作输出预报，则可以系统辨识方法为主．系统辨识是一门专门学科，需要一定的控制理论和随机过程方面的知识．以下所谓建模方法只指机理分析．

建模要经过哪些步骤并没有一定的模式，通常与实际问题的性质、建模的目的等有关，从 1.2 ~ 1.4 节的几个例子也可以看出这点．下面给出建模的一般步骤，如图 1 – 5 所示．

模型准备　首先要了解问题的实际背景，明确建模的目的，搜集建模必需的各种信息如现象、数据等，尽量弄清对象的特征，由此初步确定用哪一类模型，总之是做好建模的准备工作．情况

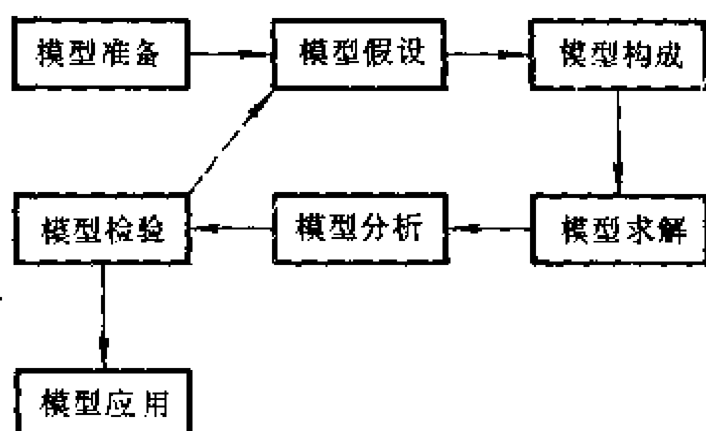


图 1－5 建模步骤示意图

明才能方法对，这一步一定不能忽视，碰到问题要虚心向从事实际工作的同志请教，尽量掌握第一手资料.

模型假设 根据对象的特征和建模的目的，对问题进行必要的、合理的简化，用精确的语言作出假设，可以说是建模的关键一步. 一般地说，一个实际问题不经过简化假设就很难翻译成数学问题，即使可能，也很难求解. 不同的简化假设会得到不同的模型. 假设作得不合理或过份简单，会导致模型失败或部分失败，于是应该修改和补充假设；假设作得过分详细，试图把复杂对象的各方面因素都考虑进去，可能使你很难甚至无法继续下一步的工作. 通常，作假设的依据，一是出于对问题内在规律的认识，二是来自对数据或现象的分析，也可以是二者的综合. 作假设时既要运用与问题相关的物理、化学、生物、经济等方面的知识，又要充分发挥想象力、洞察力和判断力，善于辨别问题的主次，果断地抓住主要因素，舍弃次要因素，尽量将问题线性化、均匀化. 经验在这里也常起重要作用. 写出假设时，语言要精确，就像作习题时写出已知条件那样.

模型构成 根据所作的假设分析对象的因果关系，利用对象的内在规律和适当的数学工具，构造各个量(常量和变量)之间的等式(或不等式)关系或其他数学结构. 这里除需要一些相关学科的专门知识外，还常常需要较广阔的应用数学方面的知识，以开

拓思路．当然不能要求对数学学科门门精通，而是要知道这些学科能解决哪一类问题以及大体上怎样解决．相似类比法，即根据不同对象的某些相似性，借用已知领域的数学模型，也是构造模型的一种方法．建模时还应遵循的一个原则是，尽量采用简单的数学工具，因为你建立的模型总是希望能有更多的人了解和使用，而不是只供少数专家欣赏．

模型求解　可以采用解方程、画图形、证明定理、逻辑运算、数值计算等各种传统的和近代的数学方法，特别是计算机技术．

模型分析　对模型解答进行数学上的分析，有时要根据问题的性质分析变量间的依赖关系或稳定状况，有时是根据所得结果给出数学上的预报，有时则可能要给出数学上的最优决策或控制．不论哪种情况还常常需要进行误差分析、模型对数据的稳定性或灵敏性分析等．

模型检验　把数学上分析的结果翻译回到实际问题，并用实际的现象、数据与之比较，检验模型的合理性和适用性．这一步对于建模的成败是非常重要的，要以严肃认真的态度来对待．当然，有些模型如核战争模型就不可能要求接受实际的检验了．模型检验的结果如果不符合或者部分不符合实际，问题通常出在模型假设上，应该修改、补充假设，重新建模．有些模型要经过几次反复，不断完善，直到检验结果获得某种程度上的满意．

模型应用　应用的方式自然取决于问题的性质和建模的目的，这方面的内容不是本书讨论的范围．

应当指出，并不是所有建模过程都要经过这些步骤，有时各步骤之间的界限也不那么分明．建模时不应拘泥于形式上的按部就班，本书的建模实例就采取了灵活的表述方式．

1.6　数学模型的特点和建模能力的培养

我们已经看到建模是利用数学工具解决实际问题的重要手

段. 数学模型有许多优点，也有弱点. 建模需要相当丰富的知识、经验和各方面的能力，同时应注意掌握分寸. 下面归纳出数学模型的若干特点，以期读者在学习过程中逐步领会[21].

模型的逼真性和可行性 一般说来总是希望模型尽可能逼近研究对象，但是一个非常逼真的模型在数学上常常是难于处理的，因而不容易达到通过建模对现实对象进行分析、预报、决策或者控制的目的，即实用上不可行. 另一方面，越逼真的模型常常越复杂，即使数学上能处理，这样的模型应用时所需要的"费用"也相当高，而高"费用"不一定与复杂模型取得的"效益"相匹配. 所以建模时往往需要在模型的逼真性与可行性，"费用"与"效益"之间作出折衷和抉择.

模型的渐进性 稍微复杂一些的实际问题的建模通常不可能一次成功，要经过上一节描述的建模过程的反复迭代，包括由简到繁，也包括删繁就简，以获得越来越满意的模型. 在科学发展过程中随着人们认识和实践能力的提高，各门学科中的数学模型也存在着一个不断完善或者推陈出新的过程. 从 19 世纪力学、热学、电学等许多学科由牛顿力学的模型主宰，到 20 世纪爱因斯坦相对论模型的建立，是模型渐进性的明显例证.

模型的强健性 模型的结构和参数常常是由对象的信息如观测数据确定的，而观测数据是允许有误差的. 一个好的模型应该具有下述意义的强健性：当观测数据(或其他信息)有微小改变时，模型结构和参数只有微小变化，并且一般也应导致模型求解的结果有微小变化.

模型的可转移性 模型是现实对象抽象化、理想化的产物，它不为对象的所属领域所独有，可以转移到另外的领域. 在生态、经济、社会等领域内建模就常常借用物理领域中的模型. 模型的这种性质显示了它的应用的极端广泛性.

模型的非预制性 虽然已经发展了许多应用广泛的模型，但是实际问题是各种各样、变化万千的，不可能要求把各种模型做

成预制品供你在建模时使用. 模型的这种非预制性使得建模本身常常是事先没有答案的问题(Open – end problem). 在建立新的模型的过程中甚至会伴随着新的数学方法或数学概念的产生.

模型的条理性 从建模的角度考虑问题可以促使人们对现实对象的分析更全面、更深入、更具条理性, 这样即使建立的模型由于种种原因尚未达到实用的程度, 对问题的研究也是有利的.

模型的技艺性 建模的方法与其他一些数学方法如方程解法、规划解法等是根本不同的, 无法归纳出若干条普遍适用的建模准则和技巧. 有人说, 建模目前与其说是一门技术, 不如说是一种艺术, 是技艺性很强的技巧. 经验、想象力、洞察力、判断力以及直觉、灵感等在建模过程中起的作用往往比一些具体的数学知识更大.

模型的局限性 这里有几方面的含义. 第一, 由数学模型得到的结论虽然具有通用性和精确性, 但是因为模型是现实对象简化、理想化的产物, 所以一旦将模型的结论应用于实际问题, 就回到了现实世界, 那些被忽视、简化的因素必须考虑, 于是结论的通用性和精确性只是相对的和近似的. 第二, 由于人们认识能力和科学技术包括数学本身发展水平的限制, 还有不少实际问题很难得到有着实用价值的数学模型. 如一些内部机理复杂、影响因素众多、测量手段不够完善、技艺性较强的生产过程, 像生铁冶炼过程, 需要开发专家系统, 与建立数学模型相结合才能获得较满意的应用效果. **专家系统**是一种计算机软件系统, 它总结专家的知识和经验, 模拟人类的逻辑思维过程, 建立若干规则和推理途径, 主要是定性地分析各种实际现象并作出判断. 专家系统可以看成计算机模拟的新发展. 第三, 还有些领域中的问题今天尚未发展到用建模方法寻求数量规律的阶段, 如中医诊断过程, 目前所谓计算机辅助诊断也是属于总结著名中医的丰富临床经验的专家系统.

在详细分析了建立数学模型的全过程和数学模型的特点以后，我们看到用建模方法解决实际问题，首先是用数学语言表述问题即构造模型，其次才是用数学工具求解构成的模型. 绝大多数数学课程如微积分、线性代数、概率论、计算方法等都是讲授某一专门知识和培养数学运算、逻辑推理能力的，这些数学技巧主要用来求解数学模型. 用数学语言表述问题，包括模型假设、模型构造等，除了要有广博的知识(包括数学知识和各种实际知识)和足够的经验之外，特别需要丰富的想象力和敏锐的洞察力.

想象力指人们在原有知识的基础上，将新感知的形象与记忆中的形象相互比较、重新组合、加工处理，创造出新的形象，是一种形象思维活动. **洞察力**指人们在充分占有资料的基础上，经过初步分析能迅速抓住主要矛盾，舍弃次要因素，简化问题的层次，对可以用哪些方法解决面临的问题，以及不同方法的优劣作出判断[44].

类比方法和理想化方法是建模中常用的方法，它们的运用与想象力、洞察力有密切关系. **类比法**注意到研究对象与已熟悉的另一对象具有某些共性，比较二者相似之处以获得对研究对象的新认识. 选择什么对象进行类比，比较哪些相似的属性，在一定程度上是靠想象进行的. 将交通流与水流类比来建立交通流模型是这方面的例子. **理想化方法**是从观察和经验中通过想象和逻辑思维，把对象简化、纯化，使其升华到理想状态，以期更本质地揭示对象的固有规律. 在一定条件下把物体看作质点、把实际位置看作数学上的点、线等都是理想化的结果.

建模过程是一种创造性思维过程，除了想象、洞察、判断这些属于形象思维、逻辑思维范畴的能力之外，直觉和灵感往往也起着不可忽视的作用. **直觉**是人们对新事物本质的极敏锐的领悟、理解或推断. **灵感**指在人们有意识或下意识思考过程中迸发出来的猜测、思路或判断. 二者都具有突发性，且思维者本人往往说不清它的来路和道理. 当由于各种限制利用已有知识难以对研究

对象作出有效的推理和判断时，凭借相似、类比、猜测、外推等思维方式及不完整、不连续、不严密的，带启发性的直觉和灵感，去“战略性”地认识对象，是人类创造性思维的特点之一，也是人脑比按程序逻辑工作的计算机、机器人的高明之处．历史上不乏在科学家的直觉和灵感的火花中诞生的假说、论证和定律．当然，直觉和灵感不是凭空产生的，它要求人们具有丰富的背景知识，对问题进行反复思考和艰苦探索，对各种思维方法运用娴熟．相互讨论和思想交锋，特别是不同专业的成员之间的探讨，是激发直觉和灵感的重要因素．所以由各种专门人才组成的所谓团队工作方式(Team work)越来越受到重视．

前面说过，建模可以看成一门艺术．艺术在某种意义下是无法归纳出几条准则或方法的．一名出色的艺术家需要大量的观摩和前辈的指教，更需要亲身的实践．类似地，掌握建模这门艺术，培养想象力和洞察力，一要大量阅读、思考别人做过的模型，二要亲自动手，认真做几个实际题目．后者是更为重要的．为了这个目的本书采用**实例研究**方法(Case studies)．一方面给出在各个应用领域不同数学方法建模的大量实例，另一方面通过习题提供若干实际题目让读者自己练习．实例研究方法虽然不能按照严密的逻辑结构去讨论问题，不能划定这些方法的实用范围，其得到的结果也并非无可置疑，但它却是我们学习建模以解决实际问题的一种生动、有效的方法[25]．

1.7 数学模型的分类

数学模型可以按照不同的方式分类，下面介绍常用的几种．

1．按照模型的**应用领域**(或所属学科)分．如人口模型、交通模型、环境模型、生态模型、城镇规划模型、水资源模型、再生资源利用模型、污染模型等．范畴更大一些则形成许多边缘学科如生物数学、医学数学、地质数学、数量经济学、数学社会学等．

2. 按照建立模型的**数学方法**(或所属数学分支)分．如初等数学模型、几何模型、微分方程模型、图论模型、马氏链模型、规划论模型等.

按第一种方法分类的数学模型教科书中，着重于某一专门领域中用不同方法建立模型，而按第二种方法分类的书里，是用属于不同领域的现成的数学模型来解释某种数学技巧的应用．在本书中我们要兼顾这两个方面，重点放在如何应用读者已具备的基本数学知识在各个不同领域中建模.

3. 按照模型的**表现特性**又有几种分法：

确定性模型和随机性模型　取决于是否考虑随机因素的影响．近年来随着数学的发展，又有所谓突变性模型和模糊性模型.

静态模型和动态模型　取决于是否考虑时间因素引起的变化.

线性模型和非线性模型　取决于模型的基本关系，如微分方程是否是线性的.

离散模型和连续模型　指模型中的变量(主要是时间变量)取为离散还是连续的.

虽然从本质上讲大多数实际问题是随机性的、动态的、非线性的，但是由于确定性、静态、线性模型容易处理，并且往往可以作为初步的近似来解决问题，所以建模时常先考虑确定性、静态、线性模型．连续模型便于利用微积分方法求解析解，作理论分析，而离散模型便于在计算机上作数值计算，所以用哪种模型要看具体问题而定．在具体的建模过程中将连续模型离散化，或将离散变量视作连续，也是常采用的方法.

4. 按照**建模目的**分．有描述模型、分析模型、预报模型、优化模型、决策模型、控制模型等.

5. 按照对模型结构的**了解程度**分．有所谓白箱模型、灰箱模型、黑箱模型．这是把研究对象比喻成一只箱子里的机关，要通过建模来揭示它的奥妙．**白箱**主要包括用力学、热学、电学等一

些机理相当清楚的学科描述的现象以及相应的工程技术问题，这方面的模型大多已经基本确定，还需深入研究的主要是优化设计和控制等问题了．**灰箱**主要指生态、气象、经济、交通等领域中机理尚不十分清楚的现象，在建立和改善模型方面都还不同程度地有许多工作要做．至于**黑箱**则主要指生命科学和社会科学等领域中一些机理(数量关系方面)很不清楚的现象．有些工程技术问题虽然主要基于物理、化学原理，但由于因素众多、关系复杂和观测困难等原因也常作为灰箱或黑箱模型处理．当然，白、灰、黑之间并没有明显的界限，而且随着科学技术的发展，箱子的“颜色”必然是逐渐由暗变亮的．

习　题

1．举出两三个实例说明建立数学模型的必要性．包括实际问题的背景，建模目的，需要大体上什么样的模型以及怎样应用这种模型等．

2．怎样解决下面的实际问题．包括需要哪些数据资料，要作些什么观察、试验以及建立什么样的数学模型等[21]．

① 估计一个人体内血液的总量．

② 为保险公司制定人寿保险金计划(不同年龄的人应缴纳的金额和公司赔偿的金额)．

③ 估计一批日光灯管的寿命．

④ 确定火箭发射至最高点所需的时间．

⑤ 决定十字路口黄灯亮的时间长度．

3．在1.2节“椅子能在不平的地面上放稳吗”的假设条件中，将四脚的连线呈正方形改为呈长方形，其余不变．试构造模型并求解．

4．模仿1.3节商人过河问题中的状态转移模型作下面这个众所周知的智力游戏：人带着猫、鸡、米过河，船除需要人划之外，至多能载猫、鸡、米三者之一，而当人不在场时猫要吃鸡、鸡要吃米．试设计一安全过河方案，并使渡河次数尽量地少．

5．1650年世界人口为5亿，当时的年增长率为3‰．用指数增长模型计算什么时候世界人口达到10亿(实际上1850年前已超过10亿)．1970年世界人口为36亿，年增长率为21‰．用指数增长模型预测什么时候世界

人口会翻一番(这个结果可信吗). 你对用同样的模型得到的两个结果有什么看法.

6. 利用1.4节表1－1给出的1790～1980年的美国实际人口资料建立下列模型:

① 分段的指数增长模型. 譬如按时间分三段, 分别确定增长率r.

② 阻滞增长模型. 重新确定固有增长率r和最大容量x_m.

7. 假定人口的增长服从这样的规律: 时刻t的人口为$x(t)$, t到$t+\Delta t$时间内人口的增量与$x_m-x(t)$成正比(其中x_m为最大容量). 试建立模型并求解. 作出解的图形并与指数增长模型、阻滞增长模型的结果进行比较.

8. 为了培养想象力、洞察力和判断力, 考察对象时除了从正面分析外, 还常常需要从侧面或反面思考. 试尽可能迅速地回答下面的问题:

① 某甲早8时从山下旅店出发沿一条路径上山, 下午5时到达山顶并留宿. 次日早8时沿同一路径下山, 下午5时回到旅店. 某乙说, 甲必在两天中的同一时刻经过路径中的同一地点. 为什么?

② 37支球队进行冠军争夺赛, 每轮比赛中出场的每两支球队中的胜者及轮空者进入下一轮, 直至比赛结束. 问共需进行多少场比赛?

③ 甲乙两站之间有电车相通, 每隔10分钟甲乙两站相互发一趟车, 但发车时刻不一定相同. 甲乙之间有一中间站丙, 某人每天在随机的时刻到达丙站, 并搭乘最先经过丙站的那趟车, 结果发现100天中约有90天到达甲站, 仅约10天到达乙站. 问开往甲乙两站的电车经过丙站的时刻表是如何安排的?

④ 某人家住T市在他乡工作, 每天下班后乘火车于6时抵达T市车站, 他的妻子驾车准时到车站接他回家. 一日他提前下班搭早一班火车于5时半抵T市车站, 随即步行回家, 他的妻子像往常一样驾车前来, 在半路上遇到他接回家时, 发现比往常提前了10分钟. 问他步行了多长时间?

⑤ 一男孩和一女孩分别在离家2千米和1千米且方向相反的两所学校上学, 每天同时放学后分别以4千米/小时和2千米/小时的速度步行回家. 一小狗以6千米/小时的速度由男孩处奔向女孩, 又从女孩处奔向男孩, 如此往返直至回到家中, 问小狗奔波了多少路程?

如果男孩和女孩上学时小狗也往返奔波在他们之间, 问当他们到达学校时小狗在何处[28]?

第一篇　初 等 模 型

如果研究对象的机理比较简单，一般用静态、线性、确定性模型描述就能达到建模目的时，我们基本上可以用初等数学的方法来构造和求解模型. 通过第 2 章介绍的若干实例读者能够看到，用很简单的数学方法已经可以解决一些饶有兴味的实际问题. 第 3 章介绍的量纲分析方法是一种比较古老的建模方法，仅从应用的角度看，它也属于初等数学的方法.

需要强调的是，衡量一个模型的优劣全在于它的应用效果，而不是采用了多么高深的数学方法. 进一步说，如果对于某个实际问题我们用初等的方法和所谓高等的方法建立了两个模型，它们的应用效果相差无几，那么受到人们欢迎并采用的，一定是前者而非后者.

第 2 章　初等数学方法建模

2.1 ~ 2.4 节是几个用初等代数方法建立的模型. 2.5 ~ 2.6 节用图形(曲线)对变量间关系作粗略分析，得到的是半定性、半定量的模型，可称为图形法建模. 2.7 ~ 2.8 节讨论两个简单的随机性模型，因为它们是静态的，所以只用到初等概率的方法.

2.1　公平的席位分配

某学校有 3 个系共 200 名学生，其中甲系 100 名，乙系 60 名，丙系 40 名. 若学生代表会议设 20 个席位，公平而又简单的

席位分配办法是按学生人数的比例分配，显然甲乙丙三系分别应占有 10、6、4 个席位.

现在丙系有 6 名学生转入甲乙两系，各系人数如表 2－1 第 2 列所示. 仍按比例(表中第 3 列)分配席位时出现了小数(表中第 4 列)，在将取得整数的 19 席分配完毕后，三系同意剩下的 1 席参照所谓惯例分给比例中小数最大的丙系，于是三系仍分别占有 10、6、4 席(表中第 5 列).

因为有 20 个席位的代表会议在表决提案时可能出现 10 : 10 的局面，会议决定下一届增加 1 席. 他们按照上述方法重新分配席位，计算结果见表 6、7 列. 显然这个结果对丙系太不公平了，因为总席位增加 1 席，而丙系却由 4 席减为 3 席.

表 2－1　按照比例并参照惯例的席位分配

系别	学生人数	学生人数的比例(%)	20 个席位的分配		21 个席位的分配	
			比例分配的席位	参照惯例的结果	比例分配的席位	参照惯例的结果
甲	103	51.5	10.3	10	10.815	11
乙	63	31.5	6.3	6	6.615	7
丙	34	17.0	3.4	4	3.570	3
总和	200	100.0	20.0	20	21.000	21

要解决这个问题必须舍弃所谓惯例，找到衡量公平分配席位的指标，并由此建立新的分配方法[11].

建立数量指标　讨论 A、B 两方公平分配席位的情况. 设两方人数分别 p_1 和 p_2，占有席位分别是 n_1 和 n_2，则两方每个席位代表的人数分别为 p_1/n_1 和 p_2/n_2. 显然仅当 $p_1/n_1=p_2/n_2$ 时席位的分配才是公平的. 但是因为人数和席位都是整数，所以通常 $p_1/n_1 \neq p_2/n_2$，这时席位分配不公平，并且 $p_i/n_i\,(i=1,2)$ 数值较大的一方吃亏，或者说对这一方不公平.

不妨假设 $p_1/n_1 > p_2/n_2$，不公平程度可用数值 $p_1/n_1 - p_2/n_2$ 衡量.如设 $p_1 = 120$，$p_2 = 100$，$n_1 = n_2 = 10$，则 $p_1/n_1 - p_2/n_2 = 12 - 10 = 2$，它衡量的是不公平的绝对程度，常常无法区分两种程度明显不同的不公平情况. 例如上述双方人数增加为 $p_1 = 1020$ 和 $p_2 = 1000$ 而席位 n_1、n_2 不变时，$p_1/n_1 - p_2/n_2 = 102 - 100 = 2$，即绝对不公平程度不变. 但是常识告诉我们，后面这种情况的不公平程度比起前面来已经大为改善了.

为了改进上述绝对标准，自然想到用相对标准. 仍记 p_1、p_2 为 A、B 两方的固定人数，n_1、n_2 为两方分配的席位(可变)，若 $p_1/n_1 > p_2/n_2$，则定义

$$r_A(n_1, n_2) = \frac{p_1/n_1 - p_2/n_2}{p_2/n_2} \tag{1}$$

为对 A 的相对不公平值[*]。若 $p_2/n_2 > p_1/n_1$，则定义

$$r_B(n_1, n_2) = \frac{p_2/n_2 - p_1/n_1}{p_1/n_1} \tag{2}$$

为对 B 的相对不公平值.

建立了衡量分配不公平程度的数量指标 r_A、r_B 后，制定席位分配方案的原则是使它们尽可能小.

确定分配方案 假设 A、B 两方已分别占有 n_1 和 n_2 席，利用相对不公平值 r_A 和 r_B 讨论，当总席位增加 1 席时，应该分配给 A 还是 B.

不失一般性可设 $p_1/n_1 > p_2/n_2$，即对 A 不公平. 当再分配 1 个席位时，关于 $p_i/n_i\ (i = 1, 2)$ 的不等式可能有以下 3 种情况:

1. $p_1/(n_1 + 1) > p_2/n_2$，这说明即使 A 方增加 1 席，仍然对 A 不公平，所以这一席显然应分给 A 方.

---

*) (1)式右端的分母可以易为 p_1/n_1，对下面的结果没有影响.

2. $p_1/(n_1+1)<p_2/n_2$，说明当 A 方增加 1 席时将变为对 B 不公平，参照(2)式可计算出对 B 的相对不公平值为

$$r_B(n_1+1, n_2)=\frac{p_2(n_1+1)}{p_1 n_2}-1 \tag{3}$$

3. $p_1/n_1>p_2/(n_2+1)$，即当 B 方增加 1 席时将对 A 不公平，参照(1)式可计算出对 A 的相对不公平值为

$$r_A(n_1, n_2+1)=\frac{p_1(n_2+1)}{p_2 n_1}-1 \tag{4}$$

(不可能出现 $p_1/n_1<p_2/(n_2+1)$ 的情况．为什么？)

因为公平分配席位的原则是使得相对不公平值尽可能地小，所以如果

$$r_B(n_1+1, n_2)<r_A(n_1, n_2+1) \tag{5}$$

则这 1 席应分给 A 方；反之则分给 B 方．根据(3)、(4)两式，(5)式等价于

$$\frac{p_2^2}{n_2(n_2+1)}<\frac{p_1^2}{n_1(n_1+1)} \tag{6}$$

还不难证明，上述第 1 种情况的 $p_1/(n_1+1)>p_2/n_2$ 也与(6)式等价．于是我们的结论是，当(6)式成立时增加的 1 席应分给 A 方，反之则分给 B 方．或者，若记 $Q_i=p_i^2/n_i(n_i+1)$，$i=1,2$，则增加的 1 席应分给 Q 值较大的一方．

上述方法可以推广到有 m 方分配席位的情况．设第 i 方人数为 p_i，已占有 n_i 个席位，$i=1,2,\cdots,m$．当总席位增加 1 席时，计算

$$Q_i=\frac{p_i^2}{n_i(n_i+1)}, \quad i=1,2,\cdots,m \tag{7}$$

应将这一席分给 Q 值最大的一方. 这种席位分配方法称 Q 值法.

下面用 Q 值法重新讨论本节开始提出的甲乙丙三系分配 21 个席位的问题.

先按照比例计算结果将整数部分的 19 席分配完毕, 有 $n_1=10$, $n_2=6$, $n_3=3$*), 然后再用 Q 值方法分配第 20 席和第 21 席.

第 20 席: 计算 $Q_1=\dfrac{103^2}{10\times 11}=96.4$, $Q_2=\dfrac{63^2}{6\times 7}=94.5$, $Q_3=\dfrac{34^2}{3\times 4}=96.3$. Q_1 最大, 于是这一席应分给甲系.

第 21 席: 计算 $Q_1=\dfrac{103^2}{11\times 12}=80.4$, Q_2、Q_3 同上. Q_3 最大, 于是这一席应分给丙系.

这样, 21 个席位的分配结果是三系分别占有 11、6、4 席, 丙系保住了险些丧失的 1 席. 你觉得这种分配方法公平吗?

评注 席位分配应该对各方公平是人人同意的, 问题的关键在于建立衡量公平程度的既合理又简明的数量指标. 这个模型提出的指标是相对不公平值 r_A、r_B, 它是确定分配方案的前提. 在这个前提下导出的分配方案——分给 Q 值最大的一方——无疑是公平的.

最后让我们分析一下 Q_i 的表示式(7), 看看它为什么能反映对第 i 方的不公平程度. 记 p 为总人数即 $p=\sum_i p_i$, n 为总席位数. 且设第 i 方席位 n_i 为按人数比例计算的整数部分即 $n_i=\left[\dfrac{p_i}{p}n\right]$,

---

*) 如果一开始就用 Q 值法, 以 $n_1=n_2=n_3=1$ 为基础分配, 那么前 19 席的分配结果与这个数字相同

于是有

$$\frac{p_i}{(n_i+1)} < \frac{p}{n} \leqslant \frac{p_i}{n_i} \tag{8}$$

上式两端分别是增加的1席分给第i方和不分给第i方时，该方每席位所代表的人数，这两个值越大，对第i方越不公平．而Q_i恰是它们的几何平均值的平方，故Q_i能反映对第i方的不公平程度，增加的1席应分给Q值最大的一方．

2.2 双层玻璃窗的功效

你是否注意到北方城镇的有些建筑物的窗户是双层的，即窗户上装两层玻璃且中间留有一定空隙，如图2－1左图所示，两层厚度为d的玻璃夹着一层厚度为l的空气．据说这样做是为了保暖，即减少室内向室外的热量流失．我们要建立一个模型来描述热量通过窗户的传导(即流失)过程，并将双层玻璃窗与用同样多材料做成的单层玻璃窗(如图2－1右图，玻璃厚度为$2d$)的热量传导进行对比，对双层玻璃窗能够减少多少热量损失给出定量分析结果[32]．

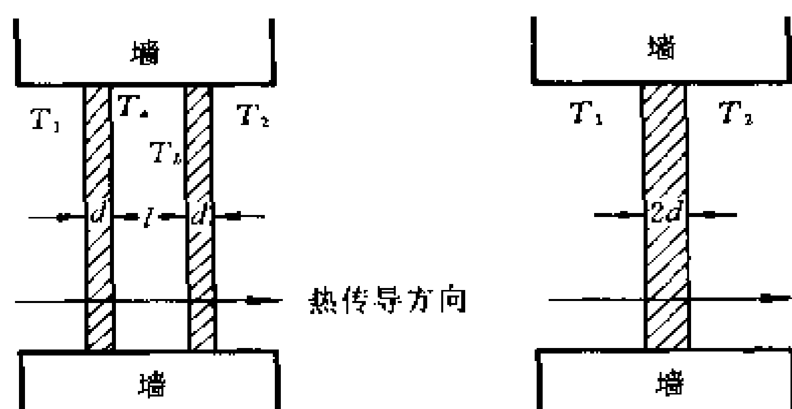


图2－1　双层玻璃窗与单层玻璃窗

模型假设

1. 热量的传播过程只有传导，没有对流. 即假定窗户的密封性能很好，两层玻璃之间的空气是不流动的.

2. 室内温度 T_1 和室外温度 T_2 保持不变，热传导过程已处于稳定状态. 即沿热传导方向，单位时间通过单位面积的热量是常数.

3. 玻璃材料均匀，热传导系数是常数.

模型构成 在上述假设下热传导过程遵从下面的物理定律:

厚度为 d 的均匀介质，两侧温度差为 ΔT，则单位时间由温度高的一侧向温度低的一侧通过单位面积的热量 Q，与 ΔT 成正比，与 d 成反比，即

$$Q = k\frac{\Delta T}{d} \tag{1}$$

k 为热传导系数.

记双层窗内层玻璃的外侧温度是 T_a，外层玻璃的内侧温度是 T_b，玻璃的热传导系数为 k_1，空气的热传导系数为 k_2，由(1)式单位时间单位面积的热量传导(即热量流失)为

$$Q = k_1\frac{T_1 - T_a}{d} = k_2\frac{T_a - T_b}{l} = k_1\frac{T_b - T_2}{d} \tag{2}$$

从(2)式中消去 T_a、T_b 可得

$$Q = \frac{k_1(T_1 - T_2)}{d(s+2)}, \quad s = h\frac{k_1}{k_2}, \quad h = \frac{l}{d} \tag{3}$$

对于厚度为$2d$的单层玻璃窗，容易写出其热量传导为

$$Q' = k_1\frac{T_1 - T_2}{2d} \tag{4}$$

二者之比为

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{2}{s+2} \tag{5}$$

显然 $Q<Q'$. 为了得到更具体的结果，我们需要 k_1 和 k_2 的数据. 从有关资料可知，常用玻璃的热传导系数 $k_1=4\times10^{-3}\sim8\times10^{-3}$(焦耳／厘米· 秒· 度)，不流通、干燥空气的热传导系数 $k_2=2.5\times10^{-4}$(焦耳／厘米· 秒· 度)，于是

$$\frac{k_1}{k_2}=16\sim32$$

在分析双层玻璃窗比单层玻璃窗可减少多少热量损失时，我们作最保守的估计，即取 $k_1/k_2=16$，由(3)、(5)式可得

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{1}{8h+1}, h=\frac{l}{d} \tag{6}$$

比值 Q/Q' 反映了双层玻璃窗在减少热量损失上的功效，它只与 $h=l/d$ 有关，图 2－2 给出了 $Q/Q'\sim h$ 的曲线，当 h 由 0 增加时，Q/Q' 迅速下降，而当 h 超过一定值(比如 $h>4$)后 Q/Q' 下降变缓，可见 h 不宜选择过大.

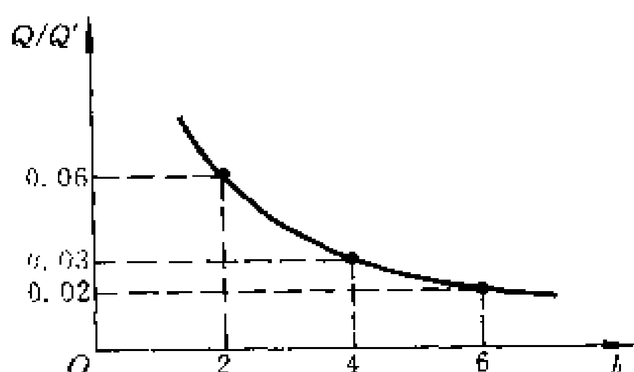


图 2－2 热量损失比 $\frac{Q}{Q'}$ 与 $h=\frac{l}{d}$ 的关系

模型应用

这个模型具有一定应用价值. 制作双层玻璃窗虽然工艺复杂会增加一些费用，但它减少的热量损失却是相当可观的. 通常，建筑规范要求 $h=l/d\approx4$. 按照这个模型，$Q/Q'\approx3\%$，即双层窗比用同样多的玻璃材料制成的单层窗节约热量 97% 左右. 不难发现，之所以有如此高的功

效主要是由于层间空气的极低的热传导系数 k_2，而这要求空气是干燥、不流通的. 作为模型假设的这个条件在实际环境下当然不可能完全满足，所以实际上双层窗户的功效会比上述结果差一些.

2.3 划艇比赛的成绩

赛艇是一种靠桨手划桨前进的小船，分单人艇、双人艇、四人艇、八人艇四种. 八人艇还分重量级(桨手平均体重 86 公斤)和轻量级(平均体重 73 公斤). 各种艇虽大小不同，但形状相似. T. A. McMahon 比较了各种赛艇 1964 ~ 1970 年四次 2000 米比赛的最好成绩(包括 1964 年和 1968 年的两次奥运会和两次世界锦标赛)，发现它们之间有相当一致的差别，他认为比赛成绩与桨手数量之间存在着某种联系，于是建立了一个模型来解释这种关系. 表 2－2 列出了上述比赛成绩及各种艇的规格. 他的模型还能粗略地解释八人艇重量级组的成绩比轻量级组约好 5% 这一现象[4].

表 2－2 各种艇的比赛成绩和规格

艇种	2000 米成绩 t(分钟)					艇长 l (米)	艇宽 b (米)	l/b	艇重 w_0(公斤)/桨手数 n
	1	2	3	4	平均				
单人	7.16	7.25	7.28	7.17	7.21	7.93	0.293	27.0	16.3
双人	6.87	6.92	6.95	6.77	6.88	9.76	0.356	27.4	13.6
四人	6.33	6.42	6.48	6.13	6.32	11.75	0.574	21.0	18.1
八人(重)	5.87	5.92	5.82	5.73	5.84	18.28	0.610	30.0	14.7

问题分析 赛艇前进时受到的阻力主要是艇浸没部分与水之间的摩擦力. 艇靠桨手的力量克服阻力保持一定的速度前进. 桨

手越多划艇前进的动力越大．但是艇和桨手总重量的增加会使艇浸没面积加大，于是阻力加大，增加的阻力将抵消一部分增加的动力．建模目的是寻求桨手数量与比赛成绩(航行一定距离所需时间)之间的数量规律．如果假设艇速在整个赛程中保持不变，那么只需构造一个静态模型，使问题简化为建立桨手数量与艇速之间的关系．注意到在实际比赛中桨手在极短的时间内使艇加速到最大速度，然后把这个速度保持到终点，那么上述假设也是合理的．

由表 2－2 可以看出，桨手数 n 增加时，艇的尺寸 l、b 及艇重 w_0 都随之增加，但比值 l/b 和 w_0/n 变化不大．若假定 l/b 是常数，即各种艇的形状一样，则可得到艇浸没面积与排水体积之间的关系．若假定 w_0/n 是常数，则可得到艇和桨手的总重量与桨手数之间的关系．此外还需对桨手体重、划桨功率、阻力与艇速的关系等方面作出简化且合理的假定，才能运用合适的物理定律建立需要的模型．

模型假设

1．各种艇的几何形状相同，l/b 为常数；艇重 w_0 与桨手数 n 成正比．这是艇的静态特性．

2．艇速 v 是常数，前进时受的阻力 f 与 sv^2 成正比(s 是艇浸没部分面积)，这是艇的动态特性．

3．所有桨手(除八人艇轻量级组外)的体重都相同，记作 w；在比赛中每个桨手的划桨功率 p 保持不变，且 p 与 w 成正比．

假设 1 是根据所给数据作出的必要且合理的简化．运动速度中等大小的物体所受阻力 f 符合假设 2 中 f 与 sv^2 成正比的情况．假设 3 中 w、p 为常数属于必要的简化，而 p 与 w 成正比可解释为：p 与肌肉体积、肺的体积成正比，对于身材匀称的运动员，肌肉、肺的体积与体重 w 成正比．

模型构成　有 n 名桨手的艇的总功率 np 与阻力 f 和速度 v 的乘积成正比，即

$$np \propto fv \tag{1}$$

由假设 2、3，

$$f \propto sv^2,\ p \propto w$$

代入(1)式可得

$$v \propto \left(\frac{nw}{s}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{2}$$

由假设 1，各种艇几何形状相同，若艇浸没面积 s 与艇的某特征尺寸 c 的平方成正比($s \propto c^2$)，则艇排水体积 A 必与 c 的立方成正比($A \propto c^3$)，于是有

$$s \propto A^{\frac{2}{3}} \tag{3}$$

又根据艇重 w_0 与桨手数 n 成正比，所以艇和桨手的总重量 $w' = w_0 + nw$ 也与 n 成正比(八人艇轻量级组除外)，即

$$w' \propto n \tag{4}$$

而由阿基米德定律，艇排水体积 A 与总重量 w' 成正比，即

$$A \propto w' \tag{5}$$

(3)、(4)、(5)式给出

$$s \propto n^{\frac{2}{3}} \tag{6}$$

将(6)式代入(2)式，当 w 是常数时得到

$$v \propto n^{\frac{1}{9}} \tag{7}$$

因为比赛成绩 t(时间)与 v 成反比，所以

$$t \propto n^{-\frac{1}{9}} \tag{8}$$

(8)式就是根据模型假设和几条物理规律得到的各种艇的比赛成绩与桨手数之间的关系.

对于八人艇的重量级组和轻量级组，分别用 v_h , v_l , w_h , w_l , s_h , s_l 和 t_h , t_l 表示其速度、桨手体重、艇浸没面积和比赛时间. (2)式已给出

$$v_h \propto \left(\frac{nw_h}{s_h}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad v_l \propto \left(\frac{nw_l}{s_l}\right)^{\frac{1}{3}}$$

因为 n 相同，所以

$$\frac{t_h}{t_l} = \frac{v_l}{v_h} = \left(\frac{w_l}{w_h}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{s_h}{s_l}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{9}$$

将已知数据 $w_l = 73$(公斤)、$w_h = 86$(公斤)代入(9)式. 在考虑 s_h/s_l 时注意到，重量级组桨手体重大，下沉力大，固然会增加艇浸没面积，但重量级组的艇身略大，上浮力大，也会抵消一部分下沉力，减少浸没面积，因而若记 $\lambda = \frac{s_l}{s_h}$ ，则 λ 将非常接近于1(略小于1)，这时(9)式化为

$$\frac{t_h}{t_l} = \frac{0.9468}{\sqrt[3]{\lambda}} \tag{10}$$

计算表明，只要 $0.975 < \lambda < 1$ ，就能以两位有效数字保证

$$\frac{t_h}{t_l} \doteq 0.95 \tag{11}$$

模型检验 为了用表 2-2 中各种艇的平均成绩检验(8)式，设 t 与 n 的关系为

$$t=\alpha n^{\beta} \tag{12}$$

其中α、β 为待定常数. 或写作

$$\log t=\alpha'+\beta\log n \tag{13}$$

利用最小二乘法根据所给数据拟合上式, 得到

$$t=7.21n^{-0.111} \tag{14}$$

可以看出(8)式与这个结果吻合得相当好. 另外, (10)或(11)式也大致解释了八人艇重量级组的成绩比轻量级组约好 5% 的现象.

评注 这个模型建立在一些不太精细的假设的基础上, 因为我们只关心各种艇之间的相对速度, 所以数学工具只用到比例方法. 用这种方法建模虽然不能得到关于艇速的完整的表达式, 但是对于我们的建模目的来说已经足够了.

2.4 动物的身长和体重

四足动物的躯干的长度(不含头尾)与它的体重有什么关系, 这个问题有一定的实际意义. 比如, 在生猪收购站或屠宰场工作的人们, 往往希望能从生猪的身长估计出它的体重.

动物的生理构造因种类不同而异, 如果陷入对生物学复杂生理结构的研究, 将很难得到满足上述目的有使用价值的模型. 这里我们仅在十分粗略的假设基础上, 利用类比方法, 借助力学的某些结果, 建立动物身长和体重间的比例关系[4].

把四足动物的躯干看作圆柱体, 长度 l、直径 d、断面面积 s, 如图 2-3 所示. 将这种圆柱体的躯干类比作一根支撑在四肢上的弹性梁, 以便利用弹性力学的一些研究结果.

动物在自身体重 f 作用下躯干的最大下垂度 b, 即梁的最大

弯曲，根据对弹性梁的研究

$$b \propto \frac{f l^3}{s d^2} \qquad (1)$$

因为 $f \propto sl$，所以

$$\frac{b}{l} \propto \frac{l^3}{d^2} \qquad (2)$$

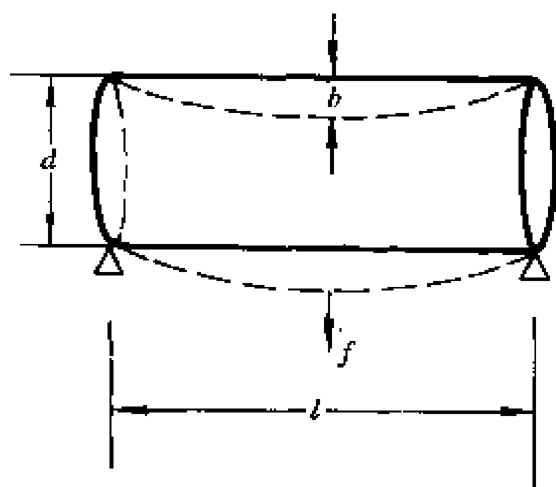


图 2－3 四足动物躯干示意图

b/l 是动物躯干的相对下垂度．b/l 太大，四肢将无法支撑；b/l 太小，四肢的材料和尺寸超过了支撑躯干的需要，无疑是一种浪费．因此从生物学的角度可以假定，经过长期进化，对于每一种动物而言 b/l 已经达到其最合适的数值，换句话说，b/l 应视为与这种动物的尺寸无关的常数，于是由(2)式得到

$$l^3 \propto d^2 \qquad (3)$$

再从 $f \propto sl, s \propto d^2$，以(3)式代入可得

$$f \propto l^4 \qquad (4)$$

即体重与躯干长度的 4 次方成正比．这样，对于某一种四足动物比如生猪，在根据统计数据确定出上述比例系数以后，就能从躯干长度估计出动物的体重了．

评注 类比法是建模中常用的一种方法．在这个模型中将动物躯干类比作弹性梁实属一个大胆的假设，其可信程度自然应该用实际数据仔细检验．但是这种充分发挥想象力，把动物躯干长度与体重的关系这样一个看来无从下手的问题，转化为已经有确切研究成果的弹性梁在自重下挠曲问题的作法，是值得借鉴的．

这个模型和 2.3 节划艇比赛在建模中都只用到简单的比例方法，这是由我们的建模目的及静态模型的特性决定的．

2.5 实物交换

甲有面包一斤，乙有香肠若干. 二人共进午餐时希望相互交换一部分，达到双方满意的结果. 这种实物交换问题可以出现在个人之间或国家之间的各种类型的贸易市场上. 显然，交换的结果取决于双方对两种物品的偏爱程度，而偏爱程度很难给出确切的定量关系，我们用作图的方法对双方将如何交换实物建立一个模型[4].

设交换前甲占有物品 X 的数量为 x_0，乙占有物品 Y 的数量为 y_0，交换后甲占有物品 X 和 Y 的数量分别为 x 和 y. 于是乙占有 X、Y 的数量为 x_0-x 和 y_0-y. 这样在 xOy 平面直角坐标系上，长方形 $0\leqslant x\leqslant x_0, 0\leqslant y\leqslant y_0$ 内任一点的坐标 (x,y) 都代表了一种交换方案.

用**无差别曲线**描述甲对物品 X 和 Y 的偏爱程度. 如果占有 x_1 数量的 X 和 y_1 数量的 Y（图 2－4 中的 p_1 点）与占有 x_2 的 X 和 y_2 的 Y（p_2 点），对甲来说是同样满意的话，称 p_1 和 p_2 对甲是

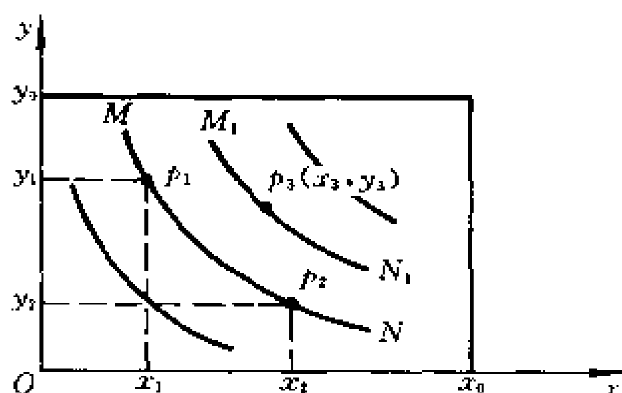


图 2－4 甲的无差别曲线

无差别的. 或者说 p_2 与 p_1 相比，甲愿意以 Y 的减少 (y_1-y_2) 换取 X 的增加 (x_2-x_1). 所有与 p_1、p_2 具有同样满意程度的点组成一条甲的无差别曲线 MN，而比这些点的满意程度更高的点如

$p_3(x_3, y_3)$则位于另一条无差别曲线 M_1N_1 上．这样，甲有无数条无差别曲线，不妨将这族曲线记作

$$f(x, y) = c_1 \tag{1}$$

c_1 称**满意度**，随着 c_1 的增加，曲线向右上方移动．按照常识，无差别曲线应是**单调减的**(x 增加时 y 减小)、**下凸的**(本节最后作解释)和**互不相交的**(否则交点处有不同的满意度)．

同样，乙对物品 X 和 Y 也有一族无差别曲线，记作

$$g(x, y) = c_2 \tag{2}$$

不管无差别曲线 f、g 是否有解析表达式，每个人都可根据对两种物品的偏爱程度用曲线表示它们，为用图解法确定交换方案提供了依据．

为得到双方满意的交换方案，将双方的无差别曲线族画在一起．图 2－5 中甲的无差别曲线族 $f(x, y) = c_1$ 如图 2－4，而乙的无差别曲线族 $g(x, y) = c_2$ 原点在 O'，x、y 轴均反向，于是当乙的满意度 c_2 增加时无差别曲线向左下移动．这两族曲线的切点连成一条曲线 AB，图中用点线表示．可以断言：**双方满意的交换方案应在曲线 AB 上，AB 称交换路径**．这是因为，假设交换在

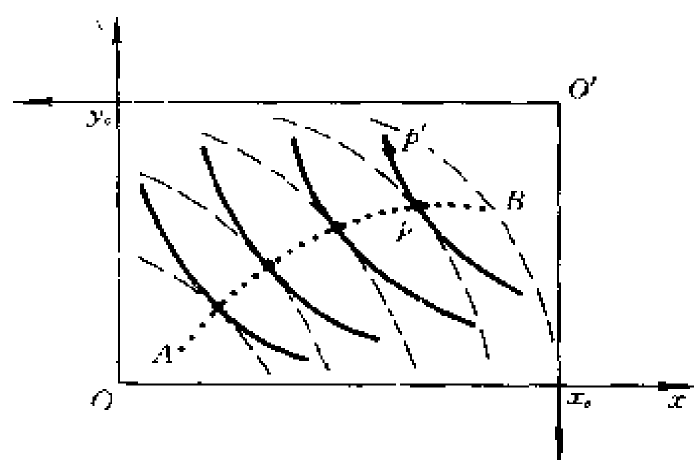


图 2－5　双方的无差别曲线和交换路径

AB 以外的某一点 p' 进行，若通过 p' 的甲的无差别曲线与 AB 的交点为 p，甲对 p 和 p' 的满意度相同，而乙对 p 的满意度高于

p'，所以双方满意的交换不可能在p'进行.

有了双方的无差别曲线，交换方案的范围可从整个长方形缩小为一条曲线 AB，但仍不能确定交换究竟应在曲线 AB 上的哪一点进行. 显然，越靠近 B 端甲的满意度越高而乙的满意度越低，靠近 A 端则反之. 要想把交换方案确定下来，需要双方协商或者依据双方同意的某种准则，如等价交换准则.

等价交换准则是指，两种物品用同一种货币衡量其价值，进行等价交换. 不妨设交换前甲占有的 x_0(物品 X)与乙占有的 y_0(物品 Y)具有相同的价值，x_0、y_0 分别相应于图 2－6中x 轴、y 轴上的 C、D 两点，那么在直线 CD 上的点进行交换，都符合等价

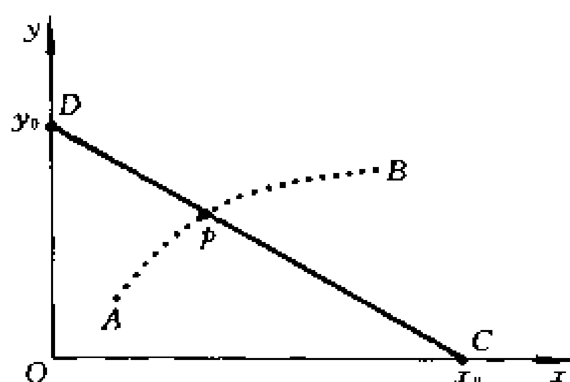


图 2－6 等价交换准则确定的交换方案

交换准则(为什么？). 最后，在等价交换准则下，双方满意的交换方案必是 CD 与 AB 的交点 p.

最后，对无差别曲线呈下凸形状作如下解释：当人们占有的 x 较小时(p_1 点附近)，他宁愿以较多的 Δy 交换较少的 Δx(图 2－7)，而当占有的 x 较大时(p_2 点附近)，就要用较多的 Δx 换取较少的 Δy. 满足这种特性的曲线是下凸的.

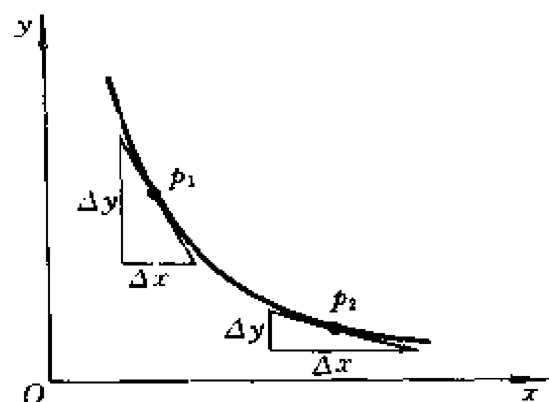


图 2－7 无差别曲线下凸形状的解释

评注 提出无差别曲线的概念是用图形方法建立实物交换模

型的基础，确定这种曲线需要收集大量的数据，还可以研究曲线的解析表达式，在 4.6 节我们将用微积分工具再次讨论它. 另外，如果双方交换的物品是三种呢. 可否提出无差别曲面的概念，这时交换路径还是一条曲线吗？

2.6 核武器竞赛

核大国进行核武器军备竞赛时，都宣称是为了保卫自己的安全，防备对方的“核讹诈”，就是说在遭到第一次核攻击后要保证有足够的核武器能保存下来，以便给对方以致命的还击. 在这场核军备竞赛中，双方拥有的核武器是会无限增长呢，还是存在暂时的平衡状态. 并且，当一方采取加固核基地、发展反弹道导弹等措施时，平衡状态会发生什么变化？这里介绍一个用图形法建立的模型来回答这些问题[4].

设甲乙双方的核武器数目分别是 x 和 y，为了叙述方便，x, y 均视为实数. 从甲方角度看，如果仅当拥有的核武器数 x 以某个确定的函数关系超过乙方的核武器数 y，比如 $x>f(y)$ 时才确认自己是安全的，那么可在 xOy 平面直角坐标系上画出曲线 $x=f(y)$（图 2－8），称甲**安全线**，线的右方称甲**安全区**，即对区内任一点 $p(x,y)$，甲、乙拥有的核武器数分别为 x、y，甲可确保自己的安全. 显然，$x=f(y)$ 是一条单调升曲线. 它在 x 轴上的

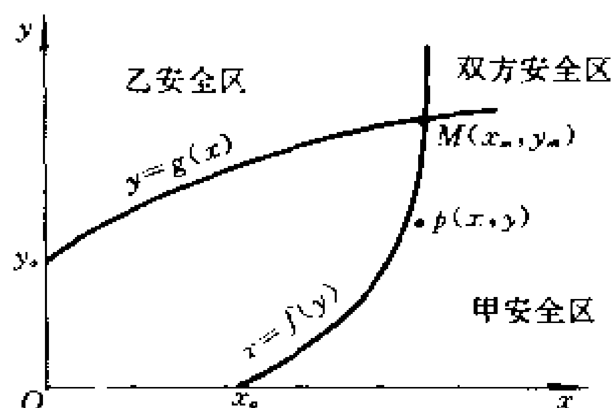


图 2－8　双方的安全线、安全区和平衡点

截距 x_0 的含意是，当乙方的核武器全部用完时，甲方只要有 x_0 就可给乙方致命还击以确保自己的安全．同样，从乙方角度看，也有乙安全线 $y=g(x)$ 和乙安全区(如图)，$y=g(x)$ 也应该是单调升的．

如果两条安全线如图 2－8 所示那样相交的话，交点 $M(x_m,y_m)$ 称**平衡点**．x_m 和 y_m 是双方都确认安全条件下分别拥有的最少的核武器数目．两个安全区的公共区域是**双方安全区**，也是核军备竞赛的**稳定区域**．

人们关注的是这样的稳定区域是否存在．某些战略专家认为，在任一方的第一次全力打击不能毁灭对方全部核武器的条件下，应该存在上述意义下的稳定区域．建立这个模型的目的是要证明，在这个条件下两条安全线必相交，从而存在平衡点和稳定区域．

为了证明 $x=f(y)$ 和 $y=g(x)$ 相交，只需证明对于任意 $r>0$、$y=rx$ 必与二者之一比如 $x=f(y)$ 相交．乙方的全力打击不能毁灭甲方全部核武器这一条件意味着，若乙方核武器数目是甲方的 r 倍即 $y=rx$，则不论 r 多大，当乙方以全部核武器袭击甲时，甲方每枚核武器保存下来的概率 $p(r)>0$．于是甲方平均能保存的核武器数目为 $xp(r)$．而根据对 x_0 的解释，只要 $xp(r)\geqslant x_0$ 甲方就可确保安全．记 $x_r=x_0/p(r)$，则在乙方拥有核武器的数目 r 倍于甲方时，甲方只需拥有 x_r 就是安全的．根据甲安全线 $x=f(y)$ 的定义，x_r 即为 $x=f(y)$ 与直线 $y=rx$ 交点的横坐标(图 2－9)．这就是说，$x=f(y)$ 必与 $y=rx$ 相交．

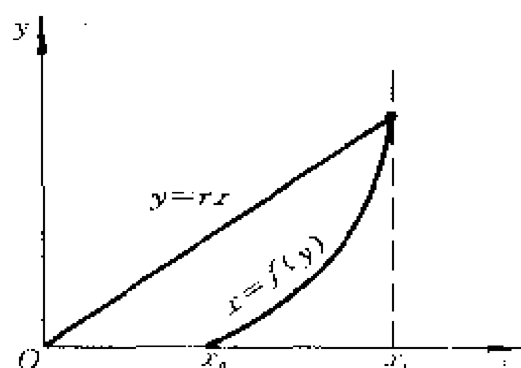


图2－9　$x=f(y)$ 与 $y=rx$ 相交

乙安全线 $y=g(x)$ 也有同样的性质，因此两条安全线必相交，核军备竞赛存在平衡点和稳定区域．

假如甲方加固核基地以防御袭击，将使每枚核武器保存下来

的概率 $p(r)$ 增大，而 x_0 不变，所以 $x_r = x_0/p(r)$ 将减小，即甲安全线 $x=f(y)$ 向左移动，记作 $x=f_1(y)$（图2－10中的虚线），平衡点由 M 变为 M_1.

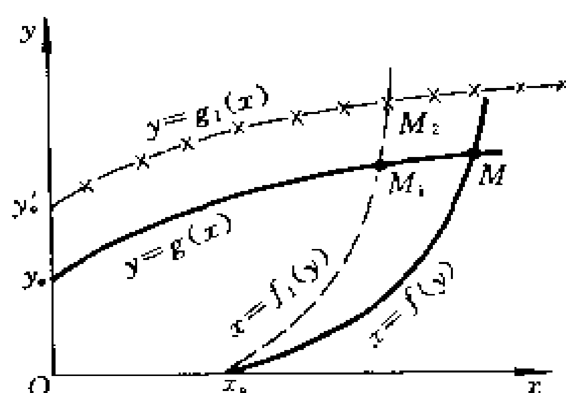


图2－10 甲方加固核基地，发展反弹道导弹时平衡点的移动

如甲方又发展反弹道导弹保卫自己的安全，那么乙方给甲方以毁灭性打击的最小核武器数 y_0 将上移为 y_0'，于是乙安全线上移为 $y=g_1(x)$，平衡点又由 M_1 变为 M_2. 这表明核军备竞赛将升级.

评注 核武器竞赛问题初看起来似乎与数学无缘，但这个模型利用简单的图形方法也能对问题进行粗浅的分析，并给出定性的回答，这对于我们通过数学模型研究实际对象无疑是一种启发. 此外，模型在证明平衡点和稳定区域存在的过程中，把战略专家给出的所谓一次打击不能毁灭对方全部核武器的条件，转化为当乙方以 r 倍于甲方核武器的数量打击时，甲方每枚核武器保存的概率 $p(r)$ 大于零，从而利用 x_0 的定义得出 $x=f(y)$ 与 $y=rx$ 交点的坐标 $x_r = x_0/p(r)$，这种用数学语言描述实际条件的作法也是值得借鉴的. 实际上甲安全线 $x=f(y)$ 与直线 $y=rx$ 相交（$r>0$，任意），相当于要求 $x=f(y)$ 的斜率（应视为反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的斜率）当 x 变大时将无限增加. 这又引出了新问题："安全线斜率无限增加"该怎样翻译成核武器竞赛的语言呢？

2.7 传染病的随机感染

人群中有病人（带菌者）和健康人（易感染者），任何两人之间的接触是随机的，当健康人与病人接触时健康人是否被感染也是随机的. 如果通过实际数据或经验掌握了这些随机规律，那么怎

样估计平均每天有多少健康人被感染，这种估计的准确性有多大？

模型假设 我们不对传染病的感染机理和人群的接触状况作具体分析，而提出如下的一般化假设：

1. 人群只分病人和健康人两类，病人数和健康人数分别记为 i 和 s，总数 n 不变，即

$$i+s=n \tag{1}$$

2. 人群中任何二人的接触是相互独立的，具有相同概率，每人每天平均与 m 人接触.

3. 当健康人与一病人接触时，健康人被感染的概率为 λ.

这里涉及到 4 个独立参数 n、i、m、λ，其中 n 和 i 通常是知道的，m 和 λ 也可以根据数据或经验获得.

模型分析 建模目的是寻找健康人中每天平均被感染的人数与已知参数 n、i、m、λ 的关系，为此显然只需知道一健康人(每天)被感染的概率. 而健康人只要至少被一名病人接触并感染，这个健康人即被感染，所以先要求出一健康人被一名指定病人接触并感染的概率. 这个概率可由一健康人被一名指定病人接触的概率乘以在接触时感染的概率得到.

模型构成 记假设 2 中任何二人接触的概率为 p，这就是一健康人与一名指定病人接触的概率. 由两两接触的相互独立性，一健康人(每天)接触的人数服从二项分布，根据假设 2 这个分布的平均值是 m. 利用二项分布的基本性质并注意到人群总数为 n，我们有

$$m=(n-1)p$$

于是

$$p=\frac{m}{n-1} \tag{2}$$

再记一健康人被一名指定病人接触并感染的概率为 p_1，则由假设 3 及(2)式得

$$p_1 = \lambda p = \frac{\lambda m}{n-1} \tag{3}$$

为了求出一健康人(每天)被感染的概率 p_2，我们利用概率论中常用的计算对立事件概率的方法得

$$p_2 = 1-(1-p_1)^i = 1-\left(1-\frac{\lambda m}{n-1}\right)^i \tag{4}$$

健康人被感染的人数也服从二项分布，其平均值 μ，即健康人每天平均被感染人数，显然为(并利用(1)式)

$$\mu = sp_2 = (n-i)p_2 \tag{5}$$

均方差 σ 为

$$\sigma = \sqrt{sp_2(1-p_2)} = \sqrt{p_2(1-p_2)(n-i)} \tag{6}$$

p_2 由(4)式给出.

为了得到简明的便于解释的结果，需对(4)式进行简化. 因为通常 $n \gg m$, $n \gg 1$，取(4)式右端展开级数的前两项，

$$p_2 \doteq 1-\left(1-\frac{\lambda m i}{n}+\cdots\right) \doteq \frac{\lambda m i}{n} \tag{7}$$

最后得到

$$\mu = \frac{\lambda m i(n-i)}{n} \tag{8}$$

$$\frac{\sigma}{\mu}=\sqrt{\frac{1-p_2}{(n-i)p_2}}=\sqrt{\frac{n-\lambda mi}{\lambda mi(n-i)}} \tag{9}$$

(8)式给出了健康人每天平均被感染的人数 μ 与 n、i、m、λ 的关系，(9)式 σ/μ 可看作对平均值 μ 的相对误差的度量.

模型解释 由(7)式可以看出，健康人每天平均被感染的人数 μ，与人群中每人每天平均接触的人数 m 以及接触时被感染的概率 λ 成正比，并且随着人群总数 n 增加而增加，这都是符合常识的. 至于 μ 与病人数 i 的关系，(7)式表明当 i 很小或很大(接近 n)时 μ 都很小，而当 $i=n/2$ 时 μ 最大，这个结果合理吗？请读者解释.

为了使读者对模型(8)、(9)两式有一个直观的了解，给出几组数字结果. 设 $m=20$，$\lambda=0.1$，对于不同的 i，计算 μ 和 σ/μ，见表 2－3.

表 2－3 i 与 μ、σ/μ 的计算结果

i	$0.1n$	$0.05n$	$0.01n$
μ	$0.18n$	$0.095n$	$0.0198n$
σ/μ	$2.1/\sqrt{n}$	$3.1/\sqrt{n}$	$7.0/\sqrt{n}$

随着 i 的增加，μ 增加而相对误差 σ/μ 减少；当 i/n 固定而 n 变大时，σ/μ 也减小. 比如当 $i=0.05n$，$n=10,000$ 时能以 95% 的置信区间(信度 5%)给出，每天平均被感染的人数为 950，相对误差约为 ±6%.

评注 这个模型完全建立在对于人群之间的接触、感染这样一些随机事件的概率假设的基础上，虽然看来这些假设与实际情况有差异，但是在对传染病的感染没有掌握进一步的规律和数据之前，只能作最初步的简化假设，以达到我们的建模目的.

这个模型是静态的，但是它可以发展为动态模型，这只需将

健康人每天被感染的人数加到病人人数中去，同时从健康人人数中除去他们就行了(习题5).

这个模型是离散的.4.1节我们还要运用微分方程方法建立传染病传播过程的连续、动态模型.

2.8 传送带的效率

在机械化生产车间里你可以看到这样的情景：排列整齐的工作台旁工人们紧张地生产同一种产品，工作台上方一条传送带在运转，带上设置着若干钩子，工人们将产品挂在经过他上方的钩子上带走．当生产进入稳定状态后，每个工人生产出一件产品所需时间是不变的，而他要挂产品的时刻却是随机的．衡量这种传送带的效率可以看它能否及时地把工人们生产的产品带走，显然在工人数目不变的情况下传送带速度越快，带上钩子越多，效率会越高．我们要构造一个衡量传送带效率的指标，并且在一些简化假设下建立一个模型来描述这个指标与工人数目、钩子数量等参数的关系.

模型分析 为了用传送带及时带走的产品数量来表示传送带的效率，在工人们生产周期(即生产一件产品的时间)相同的情况下，需要假设工人们在生产出一件产品后，要么恰好有空钩子经过他的工作台，使他可以将产品挂上带走，要么没有空钩子经过，迫使他将产品放下并立即投入下一件产品的生产，以保持整个系统周期性地运转.

工人们的生产周期虽然相同，但是由于各种随机因素的干扰，经过相当长时间后，他们生产完一件产品的时刻就不会一致，可以认为是随机的，并且在一个生产周期内任一时刻的可能性是一样的.

由上分析，传送带长期运转的效率等价于一周期的效率，而一周期的效率可以用它在一周期内能带走的产品数与一周期内生

产的全部产品数之比来描述.

为了将问题简化到能用初等概率方法来解决，我们做出如下的假设.

模型假设

1. 有 n 个工人，他们的生产是相互独立的，生产周期是常数，n 个工作台均匀排列.

2. 生产已进入稳态，即每个工人生产出一件产品的时刻在一周期内是等可能的.

3. 在一周期内有 m 个钩子通过每一工作台上方，钩子均匀排列，到达第一个工作台上方的钩子都是空的.

4. 每个工人在任何时刻都能触到一只钩子，也只能触到一只钩子，于是在他生产出一件产品的瞬间，如果他能触到的那只钩子是空的，则可将产品挂上带走；如果那只钩子非空(已被他前面的工人挂上了产品)，则他只能将这件产品放在地上. 而产品一旦放在地上，就永远退出这个传送系统.

模型建立 将传送带效率定义为一周期内带走的产品数与生产的全部产品数之比，记作 D. 设带走的产品数为 s，生产的全部产品数显然为 n，于是 $D=s/n$. 只需求出 s 就行了.

如果从工人的角度考虑，分析每个工人能将自己的产品挂上钩子的概率，那么这概率显然与工人所在的位置有关(如第 1 个工人一定可以挂上)，这样就使问题复杂化. 我们从钩子的角度考虑，在稳态下钩子没有次序，处于同等的地位. 若能对一周期内的 m 只钩子求出每只钩子非空(即挂上产品)的概率 p，则 $s=mp$.

得到 p 的步骤如下：(均对一周期内而言)

任一只钩子被任一名指定的工人挂上产品的概率是 $1/m$;

任一只钩子不被任一名指定的工人挂上产品的概率是 $1-\dfrac{1}{m}$;

由工人生产的独立性，任一只钩子不被所有 n 个工人挂上产

品的概率，即任一只钩子为空钩的概率是$\left(1-\frac{1}{m}\right)^n$；

任一只钩子非空的概率是$p=1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^n$.

这样，传送带效率指标为

$$D=\frac{mp}{n}=\frac{m}{n}\left[1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^n\right] \tag{1}$$

为了得到比较简单的结果，在钩子数 m 相对于工人数 n 较大，即 $\frac{n}{m}$ 较小的情况下，将多项式$\left(1-\frac{1}{m}\right)^n$展开后只取前三项，则有

$$D \doteq \frac{m}{n}\left[1-\left(1-\frac{n}{m}+\frac{n(n-1)}{2m^2}\right)\right]=1-\frac{n-1}{2m} \tag{2}$$

如果将一周期内未带走的产品数与全部产品数之比记作E，再假定 $n \gg 1$，则

$$D=1-E,\quad E \doteq \frac{n}{2m} \tag{3}$$

当 $n=10$，$m=40$ 时，(3)式给出的结果为 $D=87.5\%$，(1)式得到的精确结果为 $D=89.4\%$.

评注 这个模型是在理想情况下得到的，它的一些假设，如生产周期不变，挂不上钩子的产品退出传送系统等可能是不现实

的．但是模型的意义在于，一方面利用基本合理的假设将问题简化到能够建模的程度，并用很简单的方法得到结果；另一方面所得的简化结果(3)式具有非常简明的意义：指标 $E=1-D$(可理解为相反意义的"效率")与 n 成正比，与 m 成反比．通常工人数目 n 是固定的，一周期内通过的钩子数 m 增加 1 倍，可使"效率" E(未被带走的产品数与全部产品数之比)降低 1 倍．

另外一种通过增加钩子数目来使"效率"降低的方法请见习题 6．

习　题

1．学校共 1000 名学生，235 人住在 A 宿舍，333 人住在 B 宿舍，432 人住在 C 宿舍．学生们要组织一个 10 人的委员会，试用下列办法分配各宿舍的委员数．

① 按比例分配完取整数的名额后，剩下的名额按惯例分给小数部分较大者．

② 2.1 节中的 Q 值方法．

③ d'Hondt 方法：将 A、B、C 各宿舍的人数用 1, 2, 3, …正整数相除，其商数如下表

	1	2	3	4	5	…
A	$\underline{235}$	$\underline{117.5}$	78.3	58.75	…	
B	$\underline{333}$	$\underline{166.5}$	$\underline{111}$	83.25	…	
C	$\underline{432}$	$\underline{216}$	$\underline{144}$	$\underline{108}$	$\underline{86.4}$	…

将所得商数从大到小取前 10 个(10 为席位数)，在数字下标以横线，表中 A、B、C 行有横线的数分别为 2、3、5，这就是 3 个宿舍分配的席位．你能解释这种方法的道理吗？

如果委员会从 10 人增至 15 人，分配名额如何改变．

2．用 2.5 节实物交换模型中介绍的无差别曲线的概念，讨论雇员和雇

主之间的协议关系.

① 以雇员一天的工作时间 t 和工资 w 分别为横坐标和纵坐标，画出雇员无差别曲线族的示意图. 解释曲线为什么是你画的那种形状.

② 如果雇主付计时工资，对不同的工资率(单位时间的工资)作出计时工资线族. 根据雇员的无差别曲线族和雇主的计时工资线族，讨论他们将在怎样的一条曲线上达成协议.

③ 设雇员和雇主已经达成了一个协议(工作时间 t_1 和工资 w_1). 如果雇主想使雇员的工作时间增加到 t_2，他有两种办法，一是提高计时工资率，在协议线的另一点(t_2, w_2)达成新的协议；另一种办法是实行超时工资制，即对工时 t_1 仍付原计时工资，对工时 $t_2 - t_1$ 付给更高的超时工资，于是协议点为(t_2, w_2'). 试用作图方法分析哪种办法对雇主更有利[4].

3. 在 2.6 节核武器竞赛模型中，如果甲方引进多弹头导弹(每枚导弹都装上 N 个弹头)，平衡点将如何改变. 如果乙方也引进多弹头导弹呢?

4. 用初等概率方法讨论随机性的核武器竞赛模型. 设一方的每枚导弹被对方一枚导弹击中的概率为 p，攻击是相互独立的. 问当一方以全部导弹攻击对方时，对方平均能幸存多少枚导弹. 由此得到双方的安全线，讨论平衡点的存在性.

5. 将 2.7 节的传染病随机感染模型从静态的发展为动态的，即仍利用原来的假设. 记第 k 天的病人和健康者的人数分别为 i_k 和 s_k，求 i_k 或 s_k 的平均值.

6. 在 2.8 节传送带效率模型中，设工人数 n 固定不变. 若想提高传送带效率 D，一个简单的办法是增加一个周期内通过工作台的钩子数 m，其他条件不变. 当钩子数增加一倍，按(3)式可使“效率”E 减少一倍. 另一种办法是在原来放置一只钩子的地方放置两只钩子，其它条件不变，于是每个工人在任何时刻可以同时触到两只钩子，只要其中有一只是空的，他就可以挂上产品. 试推导这种情况下传送带的效率公式，从数量关系上证明这种办法比第一种办法好.

*7. 购物时你注意到大包装商品比小包装商品便宜这种现象了吗? 譬如蓝天牙膏 60 克装的每支 0.96 元，150 克装的每支 2.15 元，二者单位重量的价格比是 1.17:1. 试用比例方法构造模型解释这个现象.

① 分析商品价格 c 与商品重量 w 的关系. 价格由生产成本、运输成本和包装成本等决定，这些成本中有的与重量 w 成正比，有的与表面积 s 成

正比，还有与 w 无关的因素.

② 写出单位重量价格 c 与 w 的关系，说明 w 越大 c 越小.

③ 说明单价 c 随 w 增加而下降的速度是负的，其实际意义是什么[4].

第3章　量纲分析法建模

量纲分析(Dimensional Analysis)是20世纪初提出的在物理领域中建立数学模型的一种方法，它在经验和实验的基础上利用物理定律的量纲齐次原则，确定各物理量之间的关系．本章在一个例子的引导下先介绍量纲齐次原则和著名的Buckingham Pi定理，然后用这个定理讨论两个物理问题的建模方法(一个属于力学，一个属于热学)，并介绍量纲分析在物理模拟中的应用．最后给出一种简化模型的方法——无量纲化．

虽然在本章的例子中会遇到微分方程，定理的证明要用到线性代数知识，但是这里我们并不是去建立方程，定理的证明亦非重点，量纲分析从使用角度看仍然是初等的．

3.1　量纲齐次原则

许多物理量是有量纲的，有些物理量的量纲是基本的，另一些物理量的量纲则可以由基本量纲根据其定义或某些物理定律推导出来．例如在研究动力学问题时常把长度 l、质量 m 和时间 t 的量纲作为基本量纲，记以相应的大写字母 L、M 和 T．于是速度 v、加速度 a 的量纲可以按照其定义分别用 LT^{-1} 和 LT^{-2} 表示，力 f 的量纲则应根据牛顿第二定律用质量和加速度量纲的乘积 LMT^{-2} 表示．有些物理常数也有量纲，如万有引力定律 $f=k\frac{m_1m_2}{r^2}$ 中的引力常数 k，由 $k=\frac{fr^2}{m_1m_2}$ 可知其量纲应从力 f、距离 r 和质量 m 的量纲求出，为 $LMT^{-2}\cdot L^2\cdot M^{-2}=L^3M^{-1}T^{-2}$．通常，一

个物理量 q 的量纲记作 $[q]$，于是上述各物理量的量纲为

$$[l]=L,\ [m]=M,\ [t]=T, [v]=LT^{-1},\ [a]=LT^{-2},$$

$$[f]=LMT^{-2},\ [k]=L^3M^{-1}T^{-2}$$

对于无量纲量 α，我们记 $[\alpha]=1$（因为可视为 $[\alpha]=L^0M^0T^0$）.

用数学公式表示一个物理定律时，等号两端必须保持量纲的一致，或称**量纲齐次性**(Dimensional Homogeneity). 量纲分析就是利用量纲齐次原则来寻求物理量之间的关系. 在叙述主要定理之前让我们先看一个例子[4].

单摆运动　这是一个熟知的物理现象，质量为 m 的小球系在长度为 l 的线的一端，稍偏离平衡位置后小球在重力 mg 作用下(g 为重力加速度)做往复摆动，忽略阻力. 求摆动周期 t 的表达式.

在这个问题中出现的物理量有 t、m、l、g，设它们之间有关系式

$$t=\lambda m^{\alpha_1}l^{\alpha_2}g^{\alpha_3} \tag{1}$$

其中 α_1、α_2、α_3 是待定常数，λ 是无量纲的比例系数. 取(1)式的量纲表达式即

$$[t]=[m]^{\alpha_1}[l]^{\alpha_2}[g]^{\alpha_3}$$

将 $[t]=T, [m]=M, [l]=L, [g]=LT^{-2}$ 代入得

$$T=M^{\alpha_1}L^{\alpha_2+\alpha_3}T^{-2\alpha_3} \tag{2}$$

按照量纲齐次原则应有

$$\begin{cases} \alpha_1=0 \\ \alpha_2+\alpha_3=0 \\ -2\alpha_3=1 \end{cases} \tag{3}$$

(3)的解为 $\alpha_1=0, \alpha_2=1/2, \alpha_3=-1/2$，代入(1)式得

$$t=\lambda\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{4}$$

(4)式与用力学规律得到的结果是一致的.

如果考虑得更精细些，周期 t 应与小球偏离平衡位置的初始角度 θ 有关，但因 θ 是无量纲量(弧度)，所以它的影响反映在系数 λ 内，即为 $\lambda(\theta)$. 事实上 $\lambda(\theta)$ 是以 θ 为参量的第一类椭圆积分，当 θ 很小时它的值近似于 2π.

为了导出量纲分析建模的一般方法，将这个例子中各个变量之间的关系写作

$$f(t,m,l,g)=0 \tag{5}$$

进而假设(5)式形如

$$t^{y_1}m^{y_2}l^{y_3}g^{y_4}=\pi \tag{6}$$

其中 $y_1 \sim y_4$ 是待定常数，π 是无量纲常数. 将 t、m、l、g 的量纲用基本量纲 L、M、T 表示为

$$\begin{cases} [t]=L^0M^0T^1 \\ [m]=L^0M^1T^0 \\ [l]=L^1M^0T^0 \\ [g]=L^1M^0T^{-2} \end{cases} \tag{7}$$

则(6)的量纲表达式可写作(注意到 $[\pi]=L^0M^0T^0$)

$$(L^0M^0T^1)^{y_1}(L^0M^1T^0)^{y_2}(L^1M^0T^0)^{y_3}(L^1M^0T^{-2})^{y_4}=L^0M^0T^0$$

即

$$L^{y_3+y_4}M^{y_2}T^{y_1-2y_4}=L^0M^0T^0$$

量纲齐次原则给出

$$\begin{cases} y_3+y_4=0 \\ y_2=0 \\ y_1-2y_4=0 \end{cases} \tag{8}$$

此方程组有一个基本解

$$y=(y_1,y_2,y_3,y_4)^T=(2,0,-1,1)^T \tag{9}$$

代回(6)式得

$$t^2l^{-1}g=\pi \tag{10}$$

而(5)式等价于

$$F(\pi)=0 \tag{11}$$

(10)、(11)两式就是用量纲齐次原则从(5)式得到的结果. 前面给出的(4)式只是它的特殊表达形式.

把从(5)式到(11)式的推导过程一般化，就是著名的 Buckingham Pi 定理[26].

定理 设有 m 个物理量 $q_1,q_2,\cdots,q_m$,

$$f(q_1,q_2,\cdots,q_m)=0 \tag{12}$$

是与量纲单位的选取无关的物理定律*). $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是基本量纲, $n\leqslant m$. $q_1,q_2,\cdots,q_m$ 的量纲可表为

---

*) 量纲单位指米、毫米或克、千克等等，详见3.6节.

$$[q_j]=\prod_{i=1}^{n}X_i^{a_{ij}},\ j=1,2,\cdots,m \tag{13}$$

矩阵 $A=\{a_{ij}\}_{n\times m}$ 称量纲矩阵．若 A 的秩

$$\text{Rank } A=r \tag{14}$$

设线性齐次方程组(y 是 m 维向量)

$$Ay=0 \tag{15}$$

的 $m-r$ 个基本解为

$$y_s=(y_{s1},y_{s2},\cdots,y_{sm})^T,\ s=1,2,\cdots,m-r \tag{16}$$

则

$$\pi_s=\prod_{j=1}^{m}q_j^{y_{sj}} \tag{17}$$

为 $m-r$ 个相互独立的无量纲量，且

$$F(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_{m-r})=0 \tag{18}$$

与(12)式等价．F 表示一个未定的函数关系．

这里只证明定理结论的前半部分，即 π_s 是 $m-r$ 个相互独立的无量纲量．后半部分，即(17)、(18)与(12)式等价性的证明见3.6节．

取(17)的量纲表达式并将(13)代入得

$$[\pi_s]=\prod_{j=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{n}X_i^{a_{ij}}\right)^{y_{sj}}=\prod_{i=1}^{n}X_i^{\sum_{j=1}^{m}a_{ij}y_{sj}},\ s=1,2,\cdots,m-r \tag{19}$$

由(15)、(16)式知

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_{sj} = 0,\ i = 1, 2, \cdots, n,\ s = 1, 2, \cdots, m - r$$

代入(19)式得

$$[\pi_s] = \prod_{i=1}^{n} X_i^0 = 1,\ s = 1, 2, \cdots, m - r \tag{20}$$

即 π_s 是无量纲量. 又根据线性代数基本定理, 由(14)式知 $y_s(s = 1, 2, \cdots, m - r)$相互独立, 故 π_s 是相互独立的无量纲量.

3.2 航船的阻力

长 l、吃水深度 h 的船以速度 v 航行, 若不考虑风的影响, 那么航船受的阻力 f 除依赖于船的诸变量 l、h、v 以外, 还与水的参数——密度 ρ、粘性系数 μ, 以及重力加速度 g 有关. 下面用量纲分析方法确定阻力 f 和这些物理量之间的关系.

我们按照 Pi 定理中(12)~(18)式的步骤进行.

1. 航船问题中涉及的物理量有: 阻力 f, 船长 l, 吃水深度 h, 速度 v, 水的密度 ρ, 水的粘性系数 μ, 重力加速度 g, 要寻求的关系式记作

$$\varphi(f, l, h, v, \rho, \mu, g) = 0 \tag{1}$$

2. 这是一个力学问题, 基本量纲选为 L、M、T. 上述各物理量的量纲表为

$$\begin{cases} [f] = LMT^{-2} \\ [l] = L \\ [h] = L \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
[v] = LT^{-1} \\
[\rho] = L^{-3}M \\
[\mu] = L^{-1}MT^{-1} \\
[g] = LT^{-2}
\end{cases}
\tag{2}
$$

其中μ的量纲由基本关系 $p=\mu\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 得到．这里p是压强(单位面积受的力)，所以 $[p] = LMT^{-2}\cdot L^{-2}=L^{-1}MT^{-2}$; v 是流速，x 是尺度，所以 $\left[\dfrac{\partial v}{\partial x}\right]=LT^{-1}\cdot L^{-1}=T^{-1}$．并且有 $n=3<m=7$.

3．由(2)立即可写出量纲矩阵

$$
A_{3\times 7}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}
\begin{matrix} (L) \\ (M) \\ (T) \end{matrix}
\tag{3}
$$

$$
(f)\quad (l)\quad (h)\quad (v)\quad (\rho)\quad (\mu)\quad (g)
$$

并且计算

$$
\text{Rank } A = 3\ (=r) \tag{4}
$$

4．解齐次方程

$$
Ay=0 \tag{5}
$$

方程(5)有 $m-r=7-3=4$ 个基本解，可取为

$$
\begin{cases} y_1=(0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T \end{cases}
$$

$$\begin{cases} y_2=(0 \quad 1 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \quad 1)^T \\ y_3=(0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 0)^T \\ y_4=(1 \quad -2 \quad 0 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 0)^T \end{cases} \tag{6}$$

5. (6)式给出4个相互独立的无量纲量

$$\begin{cases} \pi_1 = lh^{-1} \\ \pi_2 = lv^{-2}g \\ \pi_3 = lv\rho\mu^{-1} \\ \pi_4 = fl^{-2}v^{-2}\rho^{-1} \end{cases} \tag{7}$$

而(1)式与

$$\Phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = 0 \tag{8}$$

等价，Φ 是未定的函数. (7)、(8)两式表达了航船问题中各物理量间的全部关系.

6. 为得到阻力 f 的显式表达式，由(8)及(7)中 π_4 的式子可写出

$$f = l^2 v^2 \rho \psi(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \tag{9}$$

其中 ψ 表示一个未定函数. 在流体力学中无量纲量 $\frac{v}{\sqrt{lg}}$ $(=\pi_2^{-1/2})$称 Froude 数，π_3 称 Reynold 数，分别记作

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{lg}}, \quad Re = \frac{lv\rho}{\mu} \tag{10}$$

则(9)式又表示为

$$f = l^2 v^2 \rho \psi\left(\frac{l}{h}, Fr, Re\right) \tag{11}$$

(11) 式就是用量纲分析方法确定的航船阻力与各物理量之间的关系，这个结果用通常的机理分析是难以得到的．虽然这里函数 ψ 的形式无从知道，但是在 3.4 节将会看到这个表达式在物理模拟中的用途．

3.3 点热源的热扩散

观察集中在一点的瞬时热源在无穷空间引起的热扩散．设 $t=0$ 时在坐标原点 $r=0$ 有一热量为 e 的瞬时热源，在热量向无穷空间扩散的过程中，空间任一点的温度 u 是时刻 t 和该点与原点的径向距离 r 的函数．与热扩散过程有关的参数有，空间介质的体积比热 c(单位体积的介质温度升高 1 度所需的热量)、介质的扩散系数 k 及热量 e. 于是可将温度函数表示为 $u(r, t; e, c, k)$. 在这个过程中我们还假定介质的初始温度为零[26].

为了利用 Pi 定理寻求温度函数关系，更一般地将上面各物理量间的表达式写作

$$f(u, r, t, e, c, k) = 0 \tag{1}$$

在热学问题中基本量纲除 L、M、T 外，还应加上温度量纲，记作 Θ. 各物理量用这 4 个基本量纲表示为

$[u] = \Theta$

$[r] = L$

$[t] = T$

$[e] = L^2MT^{-2}$ (热量 e 与功的量纲相同，而功是力与距离的

乘积)

$[c]=L^{-1}MT^{-2}\Theta^{-1}$(由体积比热$c$的定义和热量的量纲可直接得到)

$[k]=LMT^{-3}\Theta^{-1}$ (扩散系数k由 $q=-k\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 定义, q 是单位时间通过单位面积的热量,请读者由此导出k的量纲)

于是量纲矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{matrix}(L)\\(M)\\(T)\\(\Theta)\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}(u) & (r) & (t) & (e) & (c) & (k)\end{matrix}$$

Rank $A=4$, 方程$Ay=0$ 有 $6-4=2$ 个基本解, 可取为

$$\begin{cases} y_1=(0 \quad 2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad -1)^T \\ y_2=(-2 \quad 0 \quad -3 \quad 2 \quad 1 \quad -3)^T \end{cases} \tag{2}$$

由此可以得到 2 个相互独立的无量纲量

$$\begin{cases} \pi_1=r^2t^{-1}ck^{-1} \\ \pi_2=u^{-2}t^{-3}e^2ck^{-3} \end{cases} \tag{3}$$

且

$$F(\pi_1,\pi_2)=0 \tag{4}$$

与(1)式等价.

为了得到温度函数并与已知结果比较，由(3)、(4)式可以写出

$$u=\frac{e}{c}(a^2t)^{-\frac{3}{2}}g\left(\frac{r^2}{a^2t}\right),\ a^2=\frac{k}{c} \tag{5}$$

其中 g 是某个未定的函数. (5)式即用量纲分析方法得到的温度函数表达式. 另一方面，瞬时点源的热扩散过程可以用热传导方程的方法求解，其结果为

$$u=\frac{e}{c}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2t}}\right)^3e^{-\frac{r^2}{4a^2t}},\ a^2=\frac{k}{c} \tag{6}$$

比较(5)式与(6)式可以知道量纲分析方法在建立物理问题的数学模型中所起的作用，以及能解决问题的程度(譬如(5)式中函数 g 的形式无法用量纲分析方法确定).

基本量纲的选取并不是唯一的，采用合适的基本量纲可以简化问题的求解. 譬如对上述热扩散问题可以用热量量纲 E 代替质量量纲 M，即基本量纲选为 Θ、L、T、E，这样各物理量的量纲表达式和量纲矩阵为

$$[u]=\Theta$$

$$[r]=L$$

$$[t]=T$$

$$[e]=E$$

$$[c]=\Theta^{-1}L^{-3}E$$

$$[k]=\Theta^{-1}L^{-1}T^{-1}E$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix}(\Theta)\\(L)\\(T)\\(E)\end{matrix}$$

$$\quad (u)\ (r)\ (t)\ (e)\ \ (c)\ \ (k)$$

由于矩阵 A 的前 4 列构成单位阵，简化了方程 $Ay=0$ 的求解．解的结果当然与(5)式一致(请读者练习)．

评注 从 3.2 和 3.3 节的两个例子可以看出，量纲分析方法在建立物理问题的数学模型中能够得到一些重要的、有用的结果，但是也有较大的局限性．在应用和评价这个方法时以下几点值得注意．

1．正确确定各物理量 面对一个实际问题将哪些物理量包括在量纲分析的基本关系式 $f(\cdot\ )=0$ 中，对所得结果的合理性是至关重要的．对于3.2 节航船问题，如果在(1)式中忽略了水的密度 ρ 或粘性系数 μ，则不可能得到正确的结果．各物理量的确定主要靠经验和物理知识，无法绝对保证所得结果是正确或有用的．

2．合理选取基本量纲 基本量纲选少了，无法表示各物理量，当然不行；选多了也会使问题复杂化，如本节若选 L、M、T、Θ、E 5 个基本量纲，则它们之间的相关性使 Rank A 不变，但方程求解变复杂了．另一方面，针对具体问题作出合适的选择可使问题简化，如本节用 E 代替 M．在一般情况下力学定律选取 L、M、T 即可，热学问题加上 Θ，电学问题加上电量量纲 Q．

3．恰当构造基本解 线性齐次方程组的基本解可以有许多不同的构造方法，虽然基本解组能够相互线性表出，但是为了特定的建模目的恰当地构造基本解，能够更直接地得到

我们所期望的结果. 如本节若构造异于(2)式的另一组基本解, 则不能直接得到(5)式, 而需要作必要的线性组合. 读者不妨做些练习.

4. 结果的效用和局限性 量纲齐次原则和Pi定理是具有普遍意义的又是相当初等的方法, 它不需要非常专门的物理知识及高等的数学方法, 就可以得到用其他方法难以得到的结果, 如3.2节的(11)式, 或类似于用其他复杂方法得到的结果, 如本节的(5)式. 一般地说, 从未知定律$f(q_1, q_2, \cdots, q_m)=0$到用量纲分析方法得到的等价形式$F(\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_{m-r})=0$, 不仅物理量个数减少了$r$个, 而且原始物理量$q_1, q_2, \cdots, q_m$组合成了一些有用的无量纲量$\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_{m-r}$, 在以下两节中我们要进一步讨论它们的用途. 另一方面, 用这个方法得到的结果是有局限的, "不彻底"的. $F(\cdot)=0$中仍然包含着一些未定函数和常数(无量纲量), 诸如物理定律中经常出现的三角函数$\sin(\cdot)$、指数函数$\exp(\cdot)$不可能用量纲分析法得到, 因为这些函数的自变量和函数值都是无量纲的.

3.4 物理模拟中的比例模型

我们在1.1节曾介绍过物理模型, 它是在实验室条件下按照缩小了的比例尺寸构造的, 目的是根据相应的比例来研究原型的某些性质. 量纲分析的结果可以指导这种比例关系的确定[4, 18, 26].

先以3.1节提到的单摆运动为例. 已经得到模型中摆动周期t与摆长l的关系为(3.1节(4)式)

$$t=\lambda\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{1}$$

若记原型中相应的各个物理量为t'、l'、g', 因为λ是无量纲量, 在模型与原型中不变, 又显然有$g=g'$, 所以由(1)式立即得到

$$\frac{t'}{t}=\sqrt{\frac{l'}{l}} \tag{2}$$

这样，如果模型摆的尺寸按照摆长比例 $l:l'=1:4$ 设计制造，那么测定了模型摆的周期 t 以后，就可以知道原型摆的周期为 $t'=2t$.

可以看出，这里主要用了无量纲量在模型和原型中保持不变的性质. 下面利用 3.2 节航船问题的结果讨论怎样构造航船模型，以确定原型航船在海洋中受的阻力.

以 f、l、h、v、ρ、μ、g 和 f'、l'、h'、v'、ρ'、μ'、g' 分别记模型和原型中的各物理量，由 3.2 节的(10)、(11)式，

$$f=l^2v^2\rho\,\psi\left(\frac{l}{h},\frac{v}{\sqrt{lg}},\frac{lv\rho}{\mu}\right) \tag{3}$$

$$f'=l'^2v'^2\rho'\,\psi\left(\frac{l'}{h'},\frac{v'}{\sqrt{l'g'}},\frac{l'v'\rho'}{\mu'}\right) \tag{4}$$

当无量纲量

$$\frac{l}{h}=\frac{l'}{h'},\quad \frac{v}{\sqrt{lg}}=\frac{v'}{\sqrt{l'g'}},\quad \frac{lv\rho}{\mu}=\frac{l'v'\rho'}{\mu'} \tag{5}$$

成立时，由(3)、(4)式可得

$$\frac{f'}{f}=\left(\frac{l'v'}{lv}\right)^2\frac{\rho'}{\rho} \tag{6}$$

原型航船的阻力 f' 可由模型船的阻力 f 及其它有关量算出.

考察(5)式成立的条件．如果在模拟实验中用与海水有相同密度和粘性系数的水，即 $\rho=\rho'$，$\mu=\mu'$，又因为显然有 $g=g'$，所以(5)式将变为

$$\frac{l}{l'}=\frac{h}{h'},\ \frac{v}{v'}=\sqrt{\frac{l}{l'}},\ \frac{v}{v'}=\frac{l'}{l} \tag{7}$$

而要(7)式成立必须有 $l=l'$，$h=h'$，即制造和原型一样大的模型船，这显然排除了物理模拟的可能．

如果考虑改变模拟实验所用液体的粘性系数 $\mu\neq\mu'$，仍设 $\rho=\rho'$，则(5)式为

$$\frac{l}{l'}=\frac{h}{h'},\ \frac{v}{v'}=\sqrt{\frac{l}{l'}},\ \frac{v}{v'}=\frac{l'}{l}\cdot\frac{\mu}{\mu'} \tag{8}$$

(8)的第1式容易在构模时实现，而要(8)的第2、3式成立必须有

$$\frac{\mu}{\mu'}=\left(\frac{l}{l'}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{9}$$

假若我们构造比例尺寸为 $l:l'=1:20$ 的模型，则由(9)式应该使 $\mu\doteq0.011\mu'$．技术上很难得到如此小的粘性系数的液体供模拟实验所用．

实际上的一种近似处理方法是，在一定条件下Re数的影响很小($\mathrm{Re}=lv\rho/\mu$，见3.2节的(10)式)，将其忽略后(3)式近似为

$$f\doteq l^2v^2\rho\psi\left(\frac{l}{h},\ \frac{v}{\sqrt{lg}}\right) \tag{10}$$

其中粘性系数没有了．类似的分析不难得到

$$\frac{f'}{f}=\left(\frac{l'}{l}\right)^3 \tag{11}$$

于是知道了模型船的阻力 f 就很容易确定原型航船的阻力 f 了.

3.5 无量纲化 抛射问题

我们不拟对无量纲化方法作一般阐述，而是通过一个例子介绍这种方法如何用来对模型进行简化[25,26].

抛射问题 在星球表面以初速 v 竖直向上发射火箭*)，记星球半径为 r，星球表面重力加速度为 g，忽略阻力，讨论发射高度 x 随时间 t 的变化规律.

设 x 轴竖直向上，在发射时刻 $t=0$ 火箭高度 $x=0$(星球表面). 火箭和星球的质量分别记作 m_1 和 m_2，则由牛顿第二定律和万有引力定律可得

$$m_1\ddot{x}=-k\frac{m_1m_2}{(x+r)^2} \tag{1}$$

以 $x=0$ 时 $\ddot{x}=-g$ 代入(1)式，并注意到初始条件，抛射问题满足如下方程.

$$\begin{cases}\ddot{x}=-\dfrac{r^2g}{(x+r)^2}\\ x(0)=0\\ \dot{x}(0)=v\end{cases} \tag{2}$$

*) 为使结果更一般化，这里取星球表面而不是地球表面.

(2)的解可以表示为

$$x = x(t; r, v, g) \tag{3}$$

即发射高度 x 是以 r、v、g 为参数的时间 t 的函数. 本节的目的不是研究这个函数的具体形式(可以通过求解方程(2)直接得到), 而是讨论用无量纲化方法简化它的途径.

(3)式包含 3 个独立参数 r、v、g, 由(3)式得到的进一步的结果, 如火箭到达最高点的时间 $t_M = t|_{\dot{x}=0}$ 必定是这 3 个参数的函数 $t_M = \varphi(r, v, g)$. 如果方程(2)变得稍微复杂以致必须用数值法求解时, 对不同的参数 r、v、g, t_M 的数值就要用 3 维表格给出. 用无量纲化 的方法可以减少独立参数的个数, 达到简化模型的目的.

以长度和时间量纲 L、T 为基本量纲, 问题中的变量 x、t 和参数 r、v、g 的量纲表达式为

$$[x] = L, [t] = T, [r] = L, [v] = LT^{-1}, [g] = LT^{-2}$$

所谓无量纲化是指, 对于变量 x 和 t 分别构造具有相同量纲的参数组合 x_c 和 t_c, 使新变量

$$\bar{x} = \frac{x}{x_c}, \bar{t} = \frac{t}{t_c}$$

为无量纲量. x_c 称特征长度, t_c 称特征时间, 统称**特征尺度**(Characteristic Scales)或参考尺度. 利用新变量 $\bar{x}$ 和 $\bar{t}$, 表达式(3)可以简化.

特征尺度 x_c 和 t_c 由参数 r、v、g 构成, 并应与 x 和 t 有相同的量纲, 即 $[x_c] = L$, $[t_c] = T$. 这样的 x_c 和 t_c 有多种构造方法, 下面举出几种.

1. 令 $x_c = r$, $t_c = rv^{-1}$, 则 $\bar{x} = x/r$, $\bar{t} = t/rv^{-1}$, 利用求导数规则

可以算出

$$\dot{x}=v\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}\bar{t}}, \quad \ddot{x}=\frac{v^2}{r}\frac{\mathrm{d}^2\bar{x}}{\mathrm{d}\bar{t}^2}$$

$\bar{x}$ 对$\bar{t}$ 的导数以下简记作$\dot{\bar{x}}$ 和$\ddot{\bar{x}}$，方程(2)在新变量(无量纲量)$\bar{x}$、$\bar{t}$ 下的表达式为

$$\begin{cases}\varepsilon\ddot{\bar{x}}=-\dfrac{1}{(\bar{x}+1)^2}, \quad \varepsilon=\dfrac{v^2}{rg} \\ \bar{x}(0)=0 \\ \dot{\bar{x}}(0)=1\end{cases} \tag{4}$$

(4)的解可表示为

$$\bar{x}=\bar{x}(\bar{t};\varepsilon) \tag{5}$$

它只含一个独立参数 ε，不难验证 ε 是无量纲量．原方程的解 $x=x(t;r,v,g)$中的 3 个参数以无量纲组合形式 ε 出现在表达式(5)中，简化了原来的结果．

2．令 $x_c=r$，$t_c=\sqrt{rg^{-1}}$，类似地计算可将方程(2)化为

$$\begin{cases}\ddot{\bar{x}}=-\dfrac{1}{(\bar{x}+1)^2} \\ \bar{x}(0)=0 \\ \dot{\bar{x}}(0)=\sqrt{\varepsilon}, \quad \varepsilon=\dfrac{v^2}{rg}\end{cases} \tag{6}$$

解的表达式仍为(5)式．

3. 令 $x_c=v^2g^{-1}$, $t_c=vg^{-1}$, 方程(2)化为

$$\begin{cases}\ddot{\bar{x}}=-\dfrac{1}{(\varepsilon\bar{x}+1)^2}, \ \varepsilon=\dfrac{v^2}{rg}\\ \bar{x}(0)=0\\ \dot{\bar{x}}(0)=1\end{cases} \tag{7}$$

解的表达式也是(5)式.

还可以构造其他形式的特征尺度 x_c 和 t_c, 得到其他形式的方程. 以上3种构造特征尺度的方法虽然在把方程(2)的解(3)式简化为(5)式这一点上是共同的, 但是进一步分析发现, 它们之间仍有重要差别.

我们知道, 按照今天的技术, 在地球表面发射火箭时, 初速 v 将满足

$$v \ll \sqrt{rg}=\sqrt{6370\times 10^3\times 9.8}\doteq 8000(\text{米}/\text{秒})$$

所以必然有 $\varepsilon=v^2/rg\ll 1$. 既然 ε 如此之小, 能不能在方程(4)、(6)、(7)中舍弃以 ε 为因子的项, 从而得到方程的近似解呢? 让我们看看这样做有什么问题.

如果在方程(4)中令 $\varepsilon=0$, 则(4)变为

$$\frac{1}{(\bar{x}+1)^2}=0,\ \bar{x}(0)=0,\ \dot{\bar{x}}(0)=1 \tag{8}$$

(8)式显然无解. 所以不能在方程(4)中舍弃含 ε 的项.

如果在方程(6)中令 $\varepsilon=0$, 则(6)变为

$$\ddot{\bar{x}}=-\frac{1}{(\bar{x}+1)^2},\ \bar{x}(0)=0,\ \dot{\bar{x}}(0)=0 \tag{9}$$

(9)的解显然满足$\overline{x}(t)<0(t>0)$，而原方程(2)的解 $x(t)\geqslant 0$，所以不能从解方程(6)得到原方程的近似解，即不能在(6)中舍弃含 ε 的项.

如果在方程(7)中令 $\varepsilon=0$，则(7)变为

$$\ddot{\overline{x}}=-1,\ \overline{x}(0)=0,\ \dot{\overline{x}}(0)=1 \tag{10}$$

(10)的解显然为

$$\overline{x}(\overline{t})=-\frac{\overline{t}^2}{2}+\overline{t} \tag{11}$$

代回原变量 x 和 t，(11)式等价于

$$x(t)=-\frac{1}{2}gt^2+vt \tag{12}$$

不难看出，如果在原抛射问题中假定：火箭发射过程中所受星球引力 m_1g 不变，那么微分方程为

$$\begin{cases}\ddot{x}=-g\\ x(0)=0\\ \dot{x}(0)=v\end{cases} \tag{13}$$

(12)式正是方程(13)的解. 而将(13)与原方程(2)对比，因为发射高度 $x\ll r$，所以(13)是(2)的近似方程. 这就说明可以在方程(7)中舍弃含 ε 的项，得到近似解.

第 3 种构造特征尺度 x_c 和 t_c 的方法之所以能够忽略含 ε 的项，成功地得到原问题的近似解的原因在于 x_c 和 t_c 的大小选得合适. 从物理学容易知道：当初速 v 较小时(相对于 $\sqrt{rg}$)，火箭在定常引力 m_1g 作用下到达最高点的时间为 v/g，能达到的最高距离

为 $v^2/2g$，所以选择 $t_c=vg^{-1}$ 和 $x_c=v^2g^{-1}$，与 t 和 x 的大小相当. 这样，无量纲量 $\bar{t}=t/t_c$ 和 $\bar{x}=x/x_c$ 大体上具有单位尺度（读者可以计算 $\dot{\bar{x}}$，$\ddot{\bar{x}}$，可知它们大体上也具有单位尺度）. 于是在 $\bar{t}$、$\bar{x}$、$\dot{\bar{x}}$、$\ddot{\bar{x}}$ 组成的新方程中，含有因子 ε（$\ll 1$）的项相对于不含 ε 的项而言，就可以舍弃了.

关于选择特征尺度的一般讨论可参看 [25].

评注 无量纲化是用数学工具研究物理问题时常用的方法. 恰当地选择特征尺度不仅可以减少独立参数的个数，而且可以帮助人们决定舍弃哪些次要因素. 像量纲分析中运用 Pi 定理时有个正确确定各物理量和合理选取基本量纲的问题一样，无量纲化的关键是选择合适的特征尺度，而这也主要依赖于物理知识和经验.

3.6 关于Pi定理的证明

这一节包括两部分内容：3.1 节 Pi 定理中关于物理定律与量纲单位的选取无关的概念；Pi 定理中(17)、(18)式与(12)式等价性的证明[26].

1. 物理定律与量纲单位选取无关的概念.

我们知道，每个基本量纲都有几种不同的单位，如长度量纲有米、厘米、毫米等，质量量纲有克、千克等. 一组基本量纲取不同单位组合起来形成不同的单位制，如克・厘米・秒单位制，千克・米・秒单位制. 一个物理量在不同单位制下取值不同，但是描述物理定律的数学公式，即各物理量之间的数量关系通常是与单位制的选取无关的.

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是一组基本量纲，单位制的改变相当于选取一组常数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n>0$，使在原单位制下取值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的物理量（量纲分别为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$），在新单位制下取值变为

$\overline{x_1}=\lambda_1 x_1, \overline{x_2}=\lambda_2 x_2, \cdots, \overline{x_n}=\lambda_n x_n$. 于是若某个物理量 q 的量纲用基本量纲表示为 $[q]=X_1^{a_1}X_2^{a_2}\cdots X_n^{a_n}$, 则在原单位制下取值 q 的物理量在新单位制下的取值将为 $\overline{q}=\lambda_1^{a_1}\lambda_2^{a_2}\cdots\lambda_n^{a_n}q$. 所谓一个物理定律与量纲单位的选取无关，是指物理量 q 与 $\overline{q}$ 满足相同的物理定律. 下面是正式定义.

定义 设 $q_1, q_2, \cdots, q_m$ 满足物理定律

$$f(q_1, q_2, \cdots, q_m)=0 \tag{1}$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是一组基本量纲，$q_1, q_2, \cdots q_m$ 的量纲可表示为

$$[q_j]=\prod_{i=1}^{n} X_i^{a_{ij}}, \ j=1, 2, \cdots, m \tag{2}$$

若对于任意常数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n>0$, 令

$$\overline{q_j}=\prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{a_{ij}} q_j, \ j=1, 2, \cdots, m \tag{3}$$

而

$$f(\overline{q}_1, \overline{q}_2, \cdots, \overline{q}_m)=0 \tag{4}$$

与(1)式等价，则称物理定律(1)与量纲 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 单位的选取无关.

2. Pi 定理中(3.1 节)(17)、(18)式与(12)式等价性的证明.

为书写简单起见设 $m=4$, $n=2$, $r=2$. 一般情况下的证明可类似地得到. 在所设情况下定理中的(12)、(13)两式为

$$f(q_1, q_2, q_3, q_4)=0 \tag{5}$$

$$[q_j]=X_1^{a_{1j}}X_2^{a_{2j}}, \ j=1, 2, 3, 4 \tag{6}$$

按照定理假设，(5)式与量纲单位的选取无关. 量纲矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}, \quad \text{Rank } A=r=2 \tag{7}$$

齐次方程组$Ay=0$有$m-r=2$个基本解. 不妨设A的前两列线性无关，于是2个基本解可表示为

$$y_1=(-\alpha_1, -\alpha_2, 1, 0)^T$$

$$y_2=(-\beta_1, -\beta_2, 0, 1)^T$$

且满足

$$\begin{cases} -a_{11}\alpha_1-a_{12}\alpha_2+a_{13}=0 \\ -a_{21}\beta_1-a_{22}\beta_2+a_{24}=0 \end{cases}$$

3.1 节已经证明

$$\begin{cases} \pi_1=q_1^{-\alpha_1}q_2^{-\alpha_2}q_3 \\ \pi_2=q_1^{-\beta_1}q_2^{-\beta_2}q_4 \end{cases} \tag{8}$$

是相互独立的无量纲量. 由(8)式可得

$$\begin{cases} q_3=\pi_1 q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2} \\ q_4=\pi_2 q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2} \end{cases} \tag{9}$$

将(9)代入(5)式，并定义

$$g(q_1, q_2, \pi_1, \pi_2) \equiv f(q_1, q_2, \pi_1 q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}, \pi_2 q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}) \tag{10}$$

则

$$g(q_1, q_2, \pi_1, \pi_2) = 0 \tag{11}$$

与(5)式等价，从而也与量纲单位选取无关.

根据物理定律与量纲单位选取无关的定义，对于任意常数 λ_1, $\lambda_2(>0)$，令

$$\overline{q}_1 = \lambda_1^{a_{11}} \lambda_2^{a_{21}} q_1, \ \overline{q}_2 = \lambda_1^{a_{12}} \lambda_2^{a_{22}} q_2 \tag{12}$$

有(注意到 π_1、π_2 是无量纲量，所以 $\overline{\pi}_1 = \pi_1, \overline{\pi}_2 = \pi_2$)

$$g(\overline{q}_1, \overline{q}_2, \pi_1, \pi_2) = 0 \tag{13}$$

与(11)式等价.

为了使 $\overline{q}_1 = \overline{q}_2 = 1$，由(12)式只须选择 λ_1, λ_2 使

$$\begin{cases} a_{11}\ln\lambda_1 + a_{21}\ln\lambda_2 = -\ln q_1 \\ a_{12}\ln\lambda_1 + a_{22}\ln\lambda_2 = -\ln q_2 \end{cases} \tag{14}$$

因为我们假设 A 的前两列线性无关，所以方程(14)有唯一解 $\ln\lambda_1$, $\ln\lambda_2$. 用这组 λ_1, λ_2 代入(12)、(13)式就有

$$g(1, 1, \pi_1, \pi_2) = 0 \tag{15}$$

与(11)式从而也与(5)式等价.

最后，只须定义

$$F(\pi_1, \pi_2) \equiv g(1, 1, \pi_1, \pi_2)$$

就证明了

$$F(\pi_1, \pi_2) = 0 \tag{16}$$

与(5)式 $f(q_1, q_2, q_3, q_4) = 0$ 等价.

习　题

1. 速度为 v 的风吹在迎风面积为 s 的风车上，空气密度是 ρ. 用量纲分析方法确定风车获得的功率 p 与 v、s、ρ 的关系.

2. 深水中的波速 v 与波长 λ、水深 d、水的密度 ρ 和重力加速度 g 有关. 用量纲分析方法证明它们之间的关系可以表示为 $v=\sqrt{\lambda g}\ \varphi(d/\lambda)$，$\varphi$ 是未定函数[18].

3. 原子弹爆炸时巨大的能量从爆炸点以冲击波形式向四周传播. 据分析在时刻 t 冲击波达到的半径 r 与释放能量 e、大气密度 ρ、大气压强 p 有关（设 $t=0$ 时 $r=0$）. 用量纲分析方法证明 $r=\left(\dfrac{et^2}{\rho}\right)^{1/5}\varphi\left(\dfrac{p^5t^6}{e^2\rho^3}\right)$，$\varphi$ 是未定函数[42].

4. 用量纲分析方法研究人体浸在匀速流动的水里时损失的热量. 记水的流速 v，密度 ρ，比热 c，粘性系数 μ，热传导系数 k，人体尺寸 d. 证明人体与水的热交换系数 h 与上述各物理量的关系可表为

$$h=\frac{k}{d}\ \varphi\left(\frac{v\rho d}{\mu}\ ,\ \frac{\mu c}{k}\right),$$

φ 是未定函数，h 定义为单位时间内人体的单位面积在人体与水的温差为 1 ℃ 时的热量交换[18].

5. 用量纲分析方法研究两带电平行板间的引力. 两板面积均为 s，间距为 d，电位差为 v，板间介质的介电常数为 ε. 证明两板之间的引力 $f=\varepsilon v^2\varphi(s/d^2)$. 如果又知道 f 与 s 成正比，写出 f 的表达式. 这里介电常数 ε 的定义是 $f=\dfrac{q_1q_2}{\varepsilon d^2}$，其中 q_1、q_2 是两个点电荷的电量，d 是点电荷的距离，f 是点电荷间的引力[18].

6. 考察模拟水下爆炸的比例模型. 爆炸物质量 m，在距爆炸点距离 r 处接收冲击波，产生压强 p，记大气初始压强 p_0. 水的密度 ρ、水的体积弹性模量 k. 用量纲分析方法已经得到 $p=p_0\varphi\left(\dfrac{p_0}{k}\ ,\ \dfrac{\rho r^3}{m}\right)$. 设模拟实验与现场的

p_0、ρ、k 相同，而爆炸物模型的质量为原型的 1/1000. 为了使实验中接收到与现场相同的压强 p, 求实验时接收冲击波仪器的相对位置(即问是现场仪器与爆炸点之间距离的多少倍)[18].

7. 质量 m 的小球以初速 v 竖直上抛，阻力与速度成正比，比例系数 k. 设初始位置为 $x=0$, x 轴竖直向上，则运动方程为

$$m\ddot{x}+k\dot{x}+mg=0,\ x(0)=0,\ \dot{x}(0)=v$$

方程的解可表为 $x=x(t;v,g,m,k)$. 试选择两种特征尺度将问题无量纲化. 并讨论 k 很小时求近似解的可能性[26].

8. 设有如下方程给出的一维热传导问题:

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx},\ a^2=\dfrac{k}{c\rho},\ t>0,\ 0<x<l \\ u(x,0)=0,\ 0<x<l \\ u(0,t)=u(l,t)=u_0,\ t>0 \end{cases}$$

其中 k 是热传导系数(卡／厘米秒度), c 是比热(卡／克度), ρ 是密度(克／厘米^3). 试选择特征尺度将问题无量纲化[26].

第二篇　确定性连续模型

我们研究的现实对象通常包含众多的因素，这些因素根据本身的内在特性或人们对它的了解程度可分为确定性的及随机性的．如果从建模的目的看模型涉及的主要因素是确定性的，那么就可以建立确定性模型描述这个研究对象．

现实对象涉及的变量大多是连续的，特别是时间总在连续变化，所以建立连续模型是很自然的．另外，连续模型一般可以用数学分析的工具求解，得到的解析解便于进行理论分析，于是有些离散对象，如人口的演变过程，也可以构造连续模型．

建立确定性连续模型所用的主要数学工具是微积分、微分方程及其稳定性、变分法等，第 4 ～ 7 章分别介绍用这些方法建立的模型．从研究对象本身的特性和建模目的看，一般说来，用微分法建立的是静态优化模型，用变分法建立的是动态优化模型，用微分方程及稳定性分析方法建立的是动态模型及平衡和稳定状态模型．

第 4 章　微分法建模（静态优化模型）

商品经营者制订价格要使利润最高，工厂订购生产资料要考虑订货和贮存等费用最低，体育比赛中运动员要争取创造最佳成绩，动物的生理构造也在长期进化过程中达到了某种意义下的最优状态．普遍存在着的优化问题经常成为人们的研究对象．建立优化模型要首先确定所关心的优化指标的数量描述，然后构造包括这个指标和所采取的策略以及各种限制条件的模型，最后通过模型求解给出达到最优指标的所谓最优策略．本章的静态优化主

要指采用的策略是定常的，模型常常归结为求解函数的极值问题．

4.1 不允许缺货的存贮模型

工厂要定期地订购各种原料，存在仓库里供生产之用．商店要成批地购进各种商品，放在货柜中以备零售．水库在雨季蓄水，用于旱季的灌溉和航运．不论是原料、商品还是水的贮存，都有一个贮存多少的问题．原料、商品存得太多，贮存费用高；存得太少则无法满足需求．水库雨季蓄水过量更可能危及安全．当影响贮存量的因素包含随机性的时候，如顾客对商品的需求，天气对蓄水的影响，需要建立随机性存贮模型，这将在第 12 章讨论．本节假定需求量是恒定的，并且不允许缺货现象出现，如钢厂订购废钢供炼钢用就是这种情况，因为炼钢生产对原料的需求是一定的，而一旦缺少了原料将造成巨大损失[46]．

在不允许缺货的情况下我们只考虑两种费用：订货时需付的一次性**订货费**；货物的**贮存费**．至于货物本身的价格，下面将看到它与要讨论的优化问题无关．建立模型的目的是在单位时间的需求量为常数的情况下，制订最优存贮策略，即多长时间订一次货，每次订多少货，使总费用最小．

模型假设　为了叙述的方便设时间以天为单位，货物以吨为单位，每隔 T 天订一次货（T 称订货周期），订货量为 Q 吨．订货费、贮存费及单位时间需求量均为已知常数．模型要以总费用为目标函数确定订货周期 T 和订货量 Q 的最优值．假设条件可归纳如下．

1．每次订货费为 c_1，每天每吨货物贮存费为 c_2．

2．每天的货物需求量为 r 吨．

3．每 T 天订货 Q 吨，当贮存量降到零时订货立即到达．

对于第 3 条假设中订货可以瞬时完成，可解释为由于需求是

确定和已知的，只要提前订货使得贮存量为零时立即进货就行了．当然，贮存量降到零不符合实际生产的需要，应该有一个最低库存量，可以认为模型中的贮存量是在这个最低存量之上计算的．

模型建立 订货周期 T、订货量 Q 与每天需求量 r 之间满足

$$Q = rT \tag{1}$$

订货后贮存量由 Q 均匀地下降，记任意时刻 t 的贮存量为 q，则 $q(t)$ 的变化规律可以用图 4－1 表示．

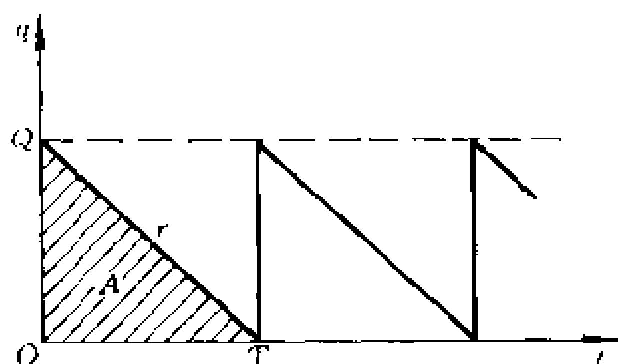


图 4－1 不允许缺货时的贮存量 $q(t)$

考察一个订货周期的总费用：订货费为 c_1；贮存费是 $c_2\int_0^T q(t)\mathrm{d}t$，其中积分恰等于图中三角形的面积 A，显然 $A=\frac{1}{2}QT$．由(1)式可知一个订货周期 T 内的总费用为

$$\overline{C} = c_1 + \frac{1}{2}c_2 rT^2 \tag{2}$$

这个存贮模型的目标函数不能是一个周期的总费用 $\overline{C}$（为什么？），而应取作每天的平均费用，记作 $C(T)$，显然

$$C(T) = \frac{\overline{C}}{T} = \frac{c_1}{T} + \frac{1}{2}c_2 rT \tag{3}$$

制订最优存贮策略归结为求订货周期 T 使 $C(T)$ 最小．

利用微分法，令 $\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}T}=0$ 不难求得

$$T=\sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}} \tag{4}$$

再根据(1)式有

$$Q=\sqrt{\frac{2c_1r}{c_2}} \tag{5}$$

(5)式是经济理论中著名的**经济订货批量公式**(EOQ 公式).

前面说过，货物本身的价格可不考虑，这是因为若记每吨货物的价格为 k，则一周期的总费用 $\overline{C}$ 中应添加 kQ. 由于 $Q=rT$，所以(3)式中增加一常数项 kr，对求解结果(4)、(5)式没有影响.

评注 (5)式表明，订货费 c_1 越高，需求量 r 越大，订货批量 Q 应越大；贮存费 c_2 越高，订货批量 Q 应越小. 这些关系当然是符合常识的. 不过公式在定量上表明的平方根关系却是凭常识无法得到的.

4.2 允许缺货的存贮模型

考察一个商店经理制订最优订货周期和最优订货批量时碰到的问题. 设市场对某种商品的需求是确定的和已知的，但是允许缺货. 缺货时因失去销售机会而使利润减少，减少的利润可以视为因缺货而付出的费用，称**缺货费**. 于是这个模型的第 1、2 条假设条件与不允许缺货的存贮模型相同，而第 3 条改为：

3′. 每隔 T 天订货 Q 吨，允许缺货，每天每吨货物缺货费为 c_3.

缺货时贮存量 q 视作负值，$q(t)$的图形如图 4－2，货物在

$t=T_1$ 时售完，有一段时间缺货(这时需求量仍为 r)，在 $t=T$ 时下一次订货量 Q 到达．于是

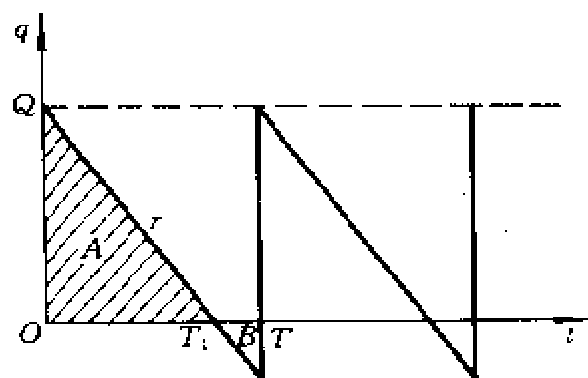


图 4-2　允许缺货时的贮存量 $q(t)$

$$Q=rT_1 \tag{1}$$

一个订货周期 T 内的总费用：订货费 c_1；贮存费 $c_2\int_0^{T_1} q(t)\mathrm{d}t$，其中积分等于图中三角形面积 A，$A=\frac{1}{2}QT_1$；

缺货费 $c_3\int_{T_1}^{T} |q(t)|\mathrm{d}t$，其中积分等于图中三角形面积 B，易知 $B=\frac{1}{2}r(T-T_1)^2$．于是总费用为

$$\overline{C}=c_1+\frac{1}{2}c_2QT_1+\frac{1}{2}c_3r(T-T_1)^2 \tag{2}$$

模型的目标函数仍为每天的平均费用．(2)式的 T_1 用(1)式代入，可知平均费用是 T 和 Q 的二元函数，记作 $C(T,Q)$，且

$$C(T,Q)=\frac{c_1}{T}+\frac{c_2Q^2}{2rT}+\frac{c_3(rT-Q)^2}{2rT} \tag{3}$$

利用微分法，令 $\frac{\partial C}{\partial T}=0$、$\frac{\partial C}{\partial Q}=0$ 可以求出 T、Q 的最优值，分别记作 T' 和 Q'，有

$$T'=\sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}\ \frac{c_2+c_3}{c_3}} \tag{4}$$

$$Q' = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2} \frac{c_3}{c_2 + c_3}} \tag{5}$$

若记

$$\mu = \sqrt{\frac{c_2 + c_3}{c_3}} \quad (>1) \tag{6}$$

则与不允许缺货的存贮模型(4.1 节(4)、(5)式)相比有

$$T' = \mu T, \quad Q' = \frac{Q}{\mu} \tag{7}$$

显然 $T' > T$, $Q' < Q$, 即允许缺货时订货周期应增大,而订货批量应减小. 当缺货费 c_3 越大时(相对于贮存费 c_2 而言), μ 越小, T' 和 Q' 越接近 T 和 Q. 特别地,当 $c_3 \to \infty$ 时 $\mu \to 1$, 于是 $T' \to T$, $Q' \to Q$. 这个结果是合理的,因为 $c_3 \to \infty$ 即缺货造成的损失无限变大相当于不允许缺货.

4.3 森 林 救 火

森林失火了!消防站接到报警后派多少消防队员前去救火呢?派的队员越多,森林的损失越小,但是救援的开支会越大,所以需要综合考虑森林损失费和救援费与消防队员人数之间的关系,以总费用最小来决定派出队员的数目[4].

问题分析 **损失费**通常正比于森林烧毁的面积,而烧毁面积与失火、灭火(指火被扑灭)的时间有关,灭火时间又取决于消防队员数目,队员越多灭火越快. **救援费**除与消防队员人数有关外,也与灭火时间长短有关. 记失火时刻为 $t=0$, 开始救火时刻为 $t=t_1$, 灭火时刻为 $t=t_2$. 设在时刻 t 森林烧毁面积为 $B(t)$, 则造成损失的森林烧毁面积为 $B(t_2)$. 建模要对函数 $B(t)$ 的形式作出合理的简单假设.

研究 $\frac{dB}{dt}$ 比 $B(t)$更为直接和方便．$\frac{dB}{dt}$ 是单位时间烧毁面积，表示火势蔓延的程度．在消防队员到达之前，即 $0 \leqslant t \leqslant t_1$，火势越来越大，即 $\frac{dB}{dt}$ 随 t 的增加而增加；开始救火以后，即 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$，如果消防队员救火能力足够强，火势会越来越小，即 $\frac{dB}{dt}$ 应减小，并且当 $t=t_2$ 时 $\frac{dB}{dt}=0$．

救援费可分为两部分；一部分是灭火器材的消耗及消防队员的薪金等，与队员人数及灭火所用的时间均有关，另一部分是运送队员和器材等一次性支出，只与队员人数有关．

模型假设　需要对烧毁森林的损失费、救援费及火势蔓延程度 $\frac{dB}{dt}$ 的形式作出假设．

1．损失费与森林烧毁面积 $B(t_2)$成正比，比例系数 c_1，c_1 即烧毁单位面积的损失费．

2．从失火到开始救火这段时间 $(0 \leqslant t \leqslant t_1)$内，火势蔓延程度 $\frac{dB}{dt}$ 与时间 t 成正比，比例系数 β 称火势蔓延速度．

3．派出消防队员 x 名，开始救火以后 $(t \geqslant t_1)$火势蔓延速度降为 $\beta-\lambda x$，其中 λ 可视为每个队员的平均灭火速度．显然应有 $\beta<\lambda x$．

4．每个消防队员单位时间的费用为 c_2，于是每个队员的救火费用是 $c_2(t_2-t_1)$；每个队员的一次性支出是 c_3．

第 2 条假设可作如下解释：火势以失火点为中心，以均匀速度向四周呈圆形蔓延，所以蔓延的半径 r 与时间 t 成正比．又因为烧毁面积 B 与 r^2 成正比，故 B 与 t^2 成正比，从而 $\frac{dB}{dt}$ 与 t

成正比.

模型构成 根据假设条件2、3，火势蔓延程度 $\frac{dB}{dt}$ 在 $0 \leqslant t \leqslant t_1$ 线性地增加，在 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ 线性地减小. $\frac{dB}{dt} \sim t$ 的图形如图4－3所示. 记 $t=t_1$ 时 $\frac{dB}{dt}=b$. 烧毁面积 $B(t_2)=\int_0^{t_2} \frac{dB}{dt} dt$ 恰是图中三角形的面积，显然有 $B(t_2)=\frac{1}{2} b t_2$，而 t_2 满足

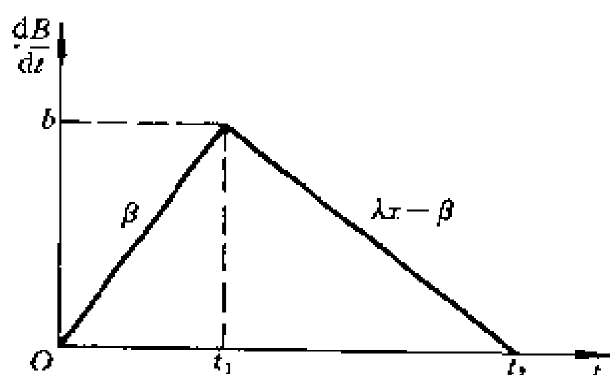


图4－3 $\frac{dB}{dt} \sim t$ 关系

$$t_2-t_1=\frac{b}{\lambda x-\beta} \tag{1}$$

于是

$$B(t_2)=\frac{bt_1}{2}+\frac{b^2}{2(\lambda x-\beta)} \tag{2}$$

根据假设条件1、4，森林损失费为 $c_1 B(t_2)$，救援费为 $c_2 x(t_2-t_1)+c_3 x$. 将(1)、(2)代入，得到救火总费用为

$$C(x)=\frac{c_1 b t_1}{2}+\frac{c_1 b^2}{2(\lambda x-\beta)}+\frac{c_2 b x}{\lambda x-\beta}+c_3 x \tag{3}$$

问题归结为求 x 使 $C(x)$ 达到最小.

令 $\frac{dC}{dx}=0$，可以得到应派出的队员人数为

$$x = \sqrt{\frac{c_1\lambda b^2 + 2c_2\beta b}{2c_3\lambda^2}} + \frac{\beta}{\lambda} \tag{4}$$

结果解释 首先，应派出队员数目由两部分组成，其中一部分 β/λ 是为了把火扑灭所必须的最低限度．因为 β 是火势蔓延速度，而 λ 是每个队员的平均灭火速度，所以这个结果是明显的．从图 4－3 也可以看出，只有当 $x>\beta/\lambda$ 时，斜率为 $\lambda x-\beta$ 的直线才会与 t 轴有交点 t_2．

其次，派出队员数的另一部分，即在最低限度之上的人数，与问题的各个参数有关．当队员灭火速度 λ 和救援费用系数 c_3 增大时，队员数减少；当火势蔓延速度 β、开始救火时的火势 b 及损失费用系数 c_1 增加时，队员数增加．这些结果与常识是一致的．(4)式还表明，当救援费用系数 c_2 变大时队员数也增大，请读者考虑这个结果是否合理．

实际应用这个模型时，c_1、c_2、c_3 是已知常数，β、λ 由森林类型、消防队员素质等因素决定，可以预先制成表格以备查用．较难掌握的是开始救火时的火势 b，它可以由失火到救火的时间 t_1 按 $b=\beta t_1$ 算出，或根据现场情况估计．

评注 建立这个模型的关键是对 $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$ 的假设．比较合理而又简化的假设条件 2、3 只能符合无风的情况．在风势的影响下应考虑另外的假设．再者，有人对队员灭火的平均速度 λ 是常数的假设提出异议，认为 λ 应与开始救火时的火势 b 有关，b 越大 λ 越小．这时要对函数 $\lambda(b)$ 作出合理的假设，再得到进一步的结果．

4.4 最优价格

如果一个厂长有权根据产品成本和销售情况制订商品价格的

话，他当然会寻求能使工厂利润最大的所谓最优价格．下面讨论产销平衡状态下的最优价格模型，所谓产销平衡是指工厂产品的产量等于市场上的销售量．

利润是销售收入与生产支出之差．设每件产品售价为 p，成本为 q，售量为 x（与产量相等），则总收入与总支出分别为

$$I=px \tag{1}$$

$$C=qx \tag{2}$$

在市场竞争的情况下售量 x 依赖于价格 p，记作

$$x=f(p) \tag{3}$$

f **称需求函数**，是 p 的减函数．于是不论成本 q 是否与 x 有关，收入 I 和支出 C 都是价格 p 的函数，利润 U 可以表示为

$$U(p)=I(p)-C(p) \tag{4}$$

使利润 $U(p)$ 达到最大的最优价格 p^* 可以由 $\left.\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}p}\right|_{p=p^*}=0$ 得到，即有

$$\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}p}\right|_{p=p^*}=\left.\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}p}\right|_{p=p^*} \tag{5}$$

在数量经济学中 $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}p}$ **称边际收入**（价格变动一个单位时收入的改变量），$\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}p}$ **称边际支出**（价格变动一个单位时支出的改变量）．(5)式表明，最大利润在边际收入等于边际支出时达到．这是数量经济学的一条著名定律．

为了得到进一步的结果，需要假设需求函数的具体形式．如果设它是最简单的线性函数

$$f(p)=a-bp\,,\quad a,b>0 \tag{6}$$

并且每件产品的成本 q 与产量 x 无关，将(1)～(3)和(6)式代

入(4)式可得

$$U(p)=(p-q)(a-bp) \tag{7}$$

用微分法容易求出使$U(p)$最大的最优价格p^*为

$$p^*=\frac{q}{2}+\frac{a}{2b} \tag{8}$$

为了分析(8)式的意义，需要考察参数a、b. 在(6)式中a可理解为这种产品免费供应时($p=0$)社会的需求量，称"绝对需求量". $b=-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}$表示价格上涨一个单位时销售量下降的幅度(当然也是价格下跌一个单位时销售量上升的幅度)，它反映市场需求对价格的敏感程度. 在实际工作中a、b可由价格p和售量x的统计数据用最小二乘法拟合来确定. (8)式表明最优价格是两部分之和，一部分是成本q的一半，另一部分与"绝对需求量"成正比，与市场需求对价格的敏感系数成反比.

4.5 血管分支

血液在动物的血管中一刻不停地流动，为了维持血液循环动物的机体要提供能量. 能量的一部分用于供给血管壁以营养，另一部分用来克服血液流动受到的阻力. 消耗的总能量显然与血管系统的几何形状有关. 在长期的生物进化过程中，高级动物血管系统的几何形状应该已经达到消耗能量最小原则下的优化标准了.

我们不可能讨论整个血管系统的几何形状，这会涉及太多的生理学知识. 下面的模型只研究血管分支处粗细血管半径的比例和分岔角度，在消耗能量最小原则下应该取什么样的数值[4].

模型假设

1. 一条粗血管在分支点处分成两条细血管，分支点附近三条血管在同一平面上，有一对称轴. 因为如果不在一个平面上，

血管总长度必然增加，导致能量消耗增加，不符合最优原则．这是一条几何上的假设．

2．在考察血液流动受到的阻力时，将这种流动视为粘性流体在刚性管道中的运动．这当然是一种近似，实际上血管是有弹性的，不过这种近似的影响不大，这是一条物理上的假设．

3．血液对血管壁提供营养的能量随管壁内表面积及管壁所占体积的增加而增加．管壁所占体积又取决于管壁厚度，而厚度近似地与血管半径成正比．这是一条生理上的假设．

根据假设1，血管分支示意图如图4－4所示．一条粗血管与两条细血管在 C 点分岔，并形成对称的几何形状．设粗细血管半径分别是 r 和 r_1，分岔处夹角是 θ．考察长度为 l 的一段粗血管 AC 和长度为 l_1 的两条细血管 CB 和 CB'，ACB（ACB'）的水平和竖直距离为 L 和 H，如图所示．再设血液在粗细血管中单位时间的流量分别为 q 和 q_1，显然 $q=2q_1$．

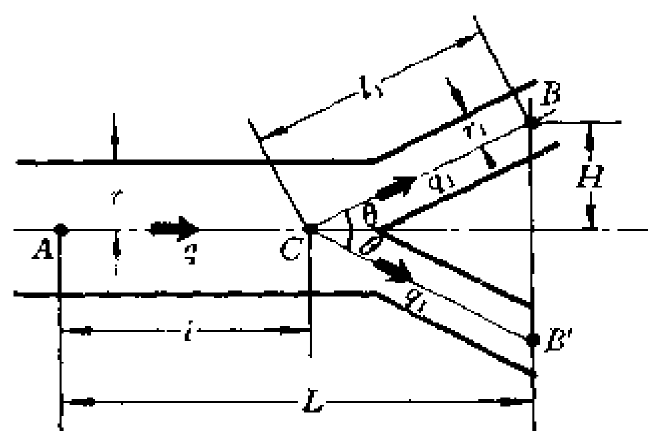


图4－4　血管分支示意图

假设2使我们可以利用流体力学关于粘性流体在刚性管道中流动时所受阻力的定律，即阻力与流量 q 的平方成正比，与半径 r 的4次方成反比．所以血液在粗细血管中流动的阻力分别为 kq^2/r^4 和 kq_1^2/r_1^4，k 是比例系数．

假设3比较复杂，需要作进一步简化．对于半径为 r、长度

为l的血管，管壁内表面积 $s=2\pi rl$，管壁所占体积 $v=s'l$，其中 s'是管壁截面积．记壁厚为 d，则 $s'=\pi[(r+d)^2-r^2]=\pi(d^2+2rd)$．设壁厚 d 近似地与半径 r 成正比，可知 v 近似地与 r^2 成正比．又因为 s 与 r 成正比，综合考虑管壁内表面积 s 和管壁所占体积 v 对能量消耗的影响，可假设单位长度血管壁提供营养的能量为 br^α，$1\leqslant\alpha\leqslant2$，$b$ 是比例系数．

模型建立　根据上述假设及对假设的进一步分析，血液从粗血管 A 点流动到细血管 B、B' 两点的过程中，机体为克服阻力和供养管壁所消耗的能量为

$$E=\left(\frac{kq^2}{r^4}+br^\alpha\right)\cdot l+\left(\frac{kq_1^2}{r_1^4}+br_1^\alpha\right)\cdot 2l_1 \qquad (1)$$

由图 4－4 所示的几何关系不难得到

$$l=L-\frac{H}{\mathrm{tg}\theta},\ l_1=\frac{H}{\sin\theta} \qquad (2)$$

将(2)式代入(1)式，并注意到 $q_1=q/2$，能量 E 可表示为 r、r_1 和 θ 的函数，即

$$E(r,r_1,\theta)=\left(\frac{kq^2}{r^4}+br^\alpha\right)\left(L-\frac{H}{\mathrm{tg}\theta}\right)+\left(\frac{kq^2}{4r_1^4}+br_1^\alpha\right)\frac{2H}{\sin\theta} \qquad (3)$$

按照最优化原则，r/r_1 和 θ 的取值应使(3)式表示的 $E(r,r_1,\theta)$达到最小．

由 $\frac{\partial E}{\partial r}=0$ 和 $\frac{\partial E}{\partial r_1}=0$ 可以得到

$$\begin{cases}-\dfrac{4kq^2}{r^5}+b\alpha r^{\alpha-1}=0\\[2mm] -\dfrac{kq^2}{r_1^5}+b\alpha r_1^{\alpha-1}=0\end{cases} \qquad (4)$$

从方程(4)可解出

$$\frac{r}{r_1}=4^{\frac{1}{\alpha+4}} \tag{5}$$

再由 $\frac{\partial E}{\partial \theta}=0$ 可得

$$\cos\theta=2\left(\frac{r}{r_1}\right)^{-4} \tag{6}$$

将(5)代入(6)式，则

$$\cos\theta=2^{\frac{\alpha-4}{\alpha+4}} \tag{7}$$

(5)、(7)两式就是在能量消耗最小原则下血管分岔处几何形状的结果．取 $\alpha=1$ 和 $\alpha=2$，可以算出 $\frac{r}{r_1}$ 和 θ 的大致范围为

$$1.26\leqslant\frac{r}{r_1}\leqslant1.32,\quad 37^\circ\leqslant\theta\leqslant49^\circ \tag{8}$$

模型检验　这里只提供检验模型的一个依据．

记动物的大动脉和最细的毛细血管的半径分别为 r_{max} 和 r_{min}，设从大动脉到毛细血管共有 n 次分岔，将(5)式反复利用 n 次可得

$$\frac{r_{max}}{r_{min}}=4^{\frac{n}{\alpha+4}} \tag{9}$$

r_{max}/r_{min} 的实际数值可以测出，例如对狗而言有 $r_{max}/r_{min}\approx1000\approx4^5$，由(9)式可知 $n\approx5(\alpha+4)$．因为 $1\leqslant\alpha\leqslant2$，所以按照这个模型，狗的血管应有 25 ~ 30 次分岔．又因为当血管有 n 次分岔时血管总条数为 2^n，所以估计狗应约有 2^{25} ~ 2^{30}，即 3×10^7 ~ 10^9 条血管．这样得到的数据可以从一个方面验证模型．

4.6 消费者的选择

在2.5节实物交换模型中曾用无差别曲线族来描述人们对两种物品的满意和偏爱程度，用图形的方法确定两个人进行实物交换时应遵循的途径．本节要利用无差别曲线族的概念讨论，当一个消费者用一定数额的钱去购买两种商品时应作怎样的选择，即他应该分别用多少钱去买这两种商品[2]．

记甲乙两种商品的数量分别是 q_1 和 q_2，当消费者占有它们时的满意程度，或者说它们给消费者带来的效用，是 q_1、q_2 的函数，记作 $U(q_1, q_2)$，经济学中称为**效用函数**(Utility Function)．$U(q_1, q_2)=c$(常数)的图形就是无差别曲线族，如图4－5，是一族单调降、下凸、互不相交的曲线．在每一条曲线上(如 l_2)，对于不同的点(即 q_1、q_2 不同)，效用函数 $U(q_1, q_2)$的值不变．而随着曲线向右上方移动，$U(q_1, q_2)$的值增加(图中 l_2 上的 U 值高于 l_1 上的 U 值)．曲线下凸的具体形状则反映了消费者对甲乙两种商品的偏爱情况．这里假定消费者的效用函数$U(q_1, q_2)$，即他的无差别曲线族已经完全确定了．

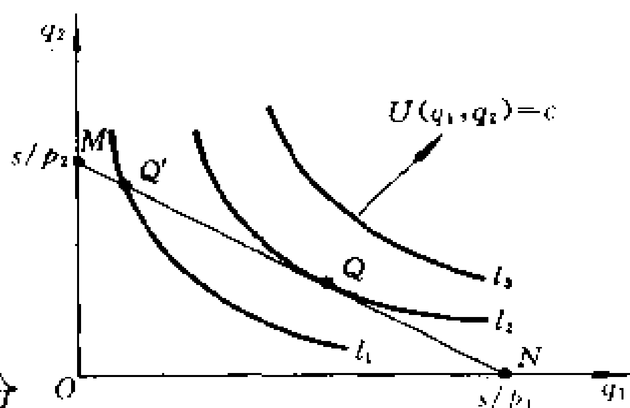


图4－5 无差别曲线族及消费者均衡的图解法

设甲乙两种商品的单价分别是p_1和p_2(元)，消费者有 s (元)钱．当消费者用这些钱买这两种商品时所作的选择，即分别用多少钱买甲和乙，应该使效用函数 $U(q_1, q_2)$达到最大，即得到最大的满意度．经济学上称这种最优状态为**消费者均衡**．

因为当消费者对两种商品的购买量分别为 q_1 和 q_2 时，他用的钱分别为 p_1q_1 和 p_2q_2，于是问题归结为在条件

$$p_1q_1+p_2q_2=s \tag{1}$$

下求比例p_1q_1/p_2q_2，使效用函数 $U(q_1,q_2)$达到最大．

这是二元函数的条件极值问题，用乘子法不难得到最优解应满足

$$\frac{\dfrac{\partial U}{\partial q_1}}{\dfrac{\partial U}{\partial q_2}}=\frac{p_1}{p_2} \tag{2}$$

当效用函数 $U(q_1,q_2)$ 给定后，由(2)式即可确定最优比例 p_1q_1/p_2q_2．

上述问题也可用图形法求解．约束条件(1)在图 4－5 上是一条直线 MN．MN 必与无差别曲线族 $U(q_1,q_2)=c$ 中的某一条曲线相切(图中是与 l_2 相切)，则 q_1、q_2 的最优值必在切点 Q 处取得．(请读者说明最优值不会在 MN 与另一条曲线 l_1 的交点 Q'处取得，直线 MN 也不会与两条无差别曲线相切)．

图解法的结果与(2)式是一致的．因为在切点 Q 处直线 MN 与曲线 l_2 的斜率相同，而 MN 的斜率是 $K_{MN}=-p_1/p_2$，l_2 的斜率是 $K_{l_2}=\dfrac{dq_2}{dq_1}=-\dfrac{\partial U}{\partial q_1}\Big/\dfrac{\partial U}{\partial q_2}$，在 Q 点处 $K_{MN}=K_{l_2}$，即给出(2)式．

经济学中 $\dfrac{\partial U}{\partial q_1}$，$\dfrac{\partial U}{\partial q_2}$ 称为**边际效用**，即商品购买量增加一个单位时效用函数的增量．(2)式表明，消费者均衡状态在两种商品的边际效用之比恰等于它们的价格之比时达到．

从以上的讨论可以看出，建立消费者均衡模型的关键是确定效用函数 $U(q_1,q_2)$．构造效用函数时应注意到它必须满足如下的条件：

条件 A $U(q_1, q_2)=c$ 所确定的一元函数 $q_2=q_2(q_1)$ 是单调减函数，且曲线呈下凸状．

这是无差别曲线族 $U(q_1, q_2)=c$ 的特性(见 2.5 节)．条件 A 可以用函数 $U(q_1, q_2)$ 的更直接的条件代替．即

条件 B $\dfrac{\partial U}{\partial q_1}>0$，$\dfrac{\partial U}{\partial q_2}>0$，$\dfrac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}<0$，$\dfrac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}<0$，$\dfrac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}>0$．

可以验证，当条件 B 成立时，条件 A 必成立．请读者解释条件 B 的实际意义．

下面列举几个常用的效用函数，并分析消费者均衡状态，即最优比例 p_1q_1/p_2q_2 的实际意义．

1．若效用函数为

$$U(q_1, q_2)=\frac{q_1q_2}{\alpha q_1+\beta q_2}, \quad \alpha, \beta>0 \tag{3}$$

根据(2)式可以求得最优比例 p_1q_1/p_2q_2 为

$$\frac{p_1q_1}{p_2q_2}=\sqrt{\frac{\beta p_1}{\alpha p_2}} \tag{4}$$

结果表明均衡状态下购买两种商品所用钱的比例，与商品价格比的平方根成正比．同时与效用函数 $U(q_1, q_2)$ 中的参数 α、β 有关：α 越大购买商品甲的钱越少，β 越大购买商品甲的钱越多．这说明在(3)式给出的效用函数中，参数 β 和 α 分别表示消费者对商品甲和乙的偏爱程度．于是调整 β 和 α 可以改变消费者对两种商品的爱好倾向，或者说可以改变无差别曲线的具体形状．

2．若效用函数为

$$U(q_1, q_2)=q_1^{\lambda}q_2^{\mu}, \quad 0<\lambda, \mu<1 \tag{5}$$

根据(2)式可以求得最优比例 p_1q_1/p_2q_2 为

$$\frac{p_1q_1}{p_2q_2}=\frac{\lambda}{\mu} \tag{6}$$

这表明均衡状态下购买两种商品所用钱的比例与价格无关，而参数 λ 和 μ 分别表示消费者对商品甲和乙的偏爱程度．

3．设效用函数为

$$U(q_1,q_2)=(a\sqrt{q_1}+b\sqrt{q_2})^2,a,b>0 \tag{7}$$

对(7)式的求解及结果分析留作习题6．

应用这个模型时，可以根据上面的分析决定选用哪一种形式的效用函数，并由经验数据确定其参数．

评注 在这个模型的基础上可以讨论当某种商品的价格改变，或者消费者购买商品的总金额 s 改变时均衡状态的改变情况．另外，这个模型还可以推广到消费者购买 $m(>2)$ 种商品的情况，有关讨论见习题6．

4.7 冰山运输

在以盛产石油著称的波斯湾地区，浩瀚的沙漠覆盖着大地，水资源十分贫乏，不得不采用淡化海水的办法为国民提供用水，成本大约是每立方米淡水0.1英磅．有些专家提出从相距9600千米之遥的南极用拖船运送冰山到波斯湾，以取代淡化海水的办法．这个模型要从经济角度研究冰山运输的可行性[15]．

为了计算用拖船运送冰山获得每立方米水所花的费用，我们需要关于拖船的租金、运量、燃料消耗及冰山运输过程中融化速率等方面的数据，以此作为建模必须的准备工作．

模型准备 根据建模的需要搜集到以下数据．

1．三种拖船的日租金和最大运量．

表 4－1 日租金和最大运量

船 型	小	中	大
日租金(英镑)	4.0	6.2	8.0
最大运量($米^3$)	5×10^6	10^7	10^8

2．燃料消耗(英镑／千米)．主要依赖于船速和所运冰山的体积，船型的影响可以忽略．

表 4－2 燃料消耗(英镑／千米)

船速(千米／小时) \ 冰山体积($米^3$)	10^5	10^6	10^7
1	8.4	10.5	12.6
3	10.8	13.5	16.2
5	13.2	16.5	19.8

3．冰山运输过程中的融化速率(米／天)．指在冰山与海水接触处每天融化的深度．融化速率除与船速有关外，还和运输过程中冰山到达处与南极的距离有关，这是由于冰山要从南极运往赤道附近的缘故．

表 4－3 融化速率(米／天)

船速(千米／小时) \ 与南极距离(千米)	0	1000	>4000
1	0	0.1	0.3
3	0	0.15	0.45
5	0	0.2	0.6

建立模型的目的是选择拖船的船型和船速，使冰山到达目的

地后，可得到的每立方米水所花的费用最低，并与海水淡化的费用相比较．根据建模目的和搜集到的有限的资料，需要作如下的简化假设．

模型假设

1．拖船航行过程中船速不变，航行不考虑天气等任何因素的影响．总航行距离 9600 千米．

2．冰山形状为球形，球面各点的融化速率相同．

3．冰山到达目的地后，1 立方米冰可融化成 0.85 立方米水．

模型构成　首先需要知道冰山体积在运输过程中的变化情况，然后是计算航行中的燃料消耗，由此可以算出到达目的地后的冰山体积和运费．在计算过程中需要根据搜集到的数据拟合出经验公式．模型构成可分为以下几步．

1．冰山体积的变化

根据假设 2 先确定冰山球面半径融化速率的变化，就可以得到冰山体积的变化规律．

记冰山球面半径融化速率为 r（米／天），船速为 u（千米／小时），拖船与南极距离为 l（千米）．根据表 4－3 中融化速率的数据，可设 r 是船速 u 的线性函数，且当 $0 \leqslant l \leqslant 4000$（千米）时 r 与 l 成正比，而当 $l > 4000$（千米）时 r 与 l 无关，这可以解释为 $0 \leqslant l \leqslant 4000$（千米）相当于从南极到赤道以南，海水温度随 l 增加而上升，使融化速率 r 也随 l 的增加而变大，而 $l > 4000$（千米）后海水温度变化较小，可以忽略．按照这个分析可设

$$r = \begin{cases} a_1 l(1+bu), & 0 \leqslant l \leqslant 4000 \\ a_2(1+bu), & l > 4000 \end{cases} \tag{1}$$

其中 a_1、a_2、b 为待定参数．利用表 4－3 所给数据确定出

$$a_1 = 5 \times 10^{-5}, \; a_2 = 0.2, \; b = 0.4 \tag{2}$$

读者可从（1）、（2）式计算融化速率 r，与表 4－3 的实际值比较．

当拖船从南极出发航行第 t 天时，与南极距离为

$$l = 24ut \tag{3}$$

记第 t 天冰山球面半径融化速率为 r_t，将(2)、(3)代入(1)式得

$$r_t = \begin{cases} 1.2 \times 10^{-3} u(1 + 0.4u)t, & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1000}{6u} \\ 0.2(1 + 0.4u), & t > \dfrac{1000}{6u} \end{cases} \tag{4}$$

记第 t 天冰山半径为 R_t，体积为 V_t，则

$$R_t \doteq R_0 - r_t t \tag{5}$$

$$V_t = \frac{4\pi}{3} R_t^3 \tag{6}$$

其中 R_0、V_0 为从南极启运时冰山的初始半径和体积．由(4)～(6)式可知冰山体积是船速 u、初始体积 V_0 和航行天数 t 的函数，记作 $V(u, V_0, t)$，有

$$V(u, V_0, t) = \frac{4\pi}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}} - r_t t\right)^3 \tag{7}$$

其中 r_t 由(4)式表示．

2．燃料消耗的变化

分析表 4－2 给出的燃料消耗(英镑／千米，记作 $\overline{q}$)的数据可以看出，q 对船速 u 和冰山体积 V 的对数 $\log_{10}V$ 均按线性关系变化，所以可设

$$\overline{q} = c_1(u + c_2)(\log_{10}V + c_3) \tag{8}$$

其中 c_1、c_2、c_3 为待定参数．利用表 4－2 所给数据可以确定

$$c_1 = 0.3, \ c_2 = 6, \ c_3 = -1 \tag{9}$$

由(7)～(9)式可将拖船航行第 t 天的燃料消耗记作 $q(u, V_0, t)$(英镑／天)，且有

$$q(u, V_0, t) = 24u \cdot c_1(u + c_2)[\log_{10}V(u, V_0, t) + c_3]$$

$$= 7.2u(u + 6)\left[\log_{10}\frac{4\pi}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}} - r_t t\right)^3 - 1\right] \tag{10}$$

3．运送冰山的费用

费用由拖船的租金和燃料消耗两部分组成．由表 4－1 知船的日租金取决于船型，即最大运量，相当于冰山的初始体积 V_0，记日租金为 $f(V_0)$．又因为当船速为 u（千米／小时）时冰山抵达目的地所需的天数为

$$d=\frac{9600}{24u}=\frac{400}{u} \tag{11}$$

所以租金费用为 $f(V_0)\cdot\frac{400}{u}$．而整个航行过程的燃料消耗应为 $\sum_{t=1}^{d}q(u,V_0,t)$．故总费用（记作 $S(u,V_0)$）为

$$S(u,V_0)=f(V_0)\cdot\frac{400}{u}+\sum_{t=1}^{\frac{400}{u}}q(u,V_0,t) \tag{12}$$

其中 $f(V_0)$ 由表 4－1 的一组数据给出，$q(u,V_0,t)$ 由（4）、（10）确定．

4．冰山运抵目的地后可获得的水的体积

因为冰山抵目的地后的体积为（由（7）式）

$$V(u,V_0,d)=\frac{4\pi}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}}-r_d\,d\right)^3 \tag{13}$$

其中 d 由（11）式给出．记获得水的体积为 $W(u,V_0)$，注意到假设 3 并以（4）式代入（13），可得

$$W(u,V_0)=0.85\,\frac{4\pi}{3}\left[\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}}-0.2(1+0.4u)\frac{400}{u}\right]^3 \tag{14}$$

5．每立方米水所需费用

由(12)、(14)式冰山运抵目的地后获得每立方米水的费用$\overline{S}$显然为

$$\overline{S}(u, V_0) = \frac{S(u, V_0)}{W(u, V_0)} \tag{15}$$

我们要选择船速 u 和冰山初始体积 V_0(相当于船型)，使费用$\overline{S}$最小.

模型求解 虽然这个模型归结为求函数$\overline{S}(u, V_0)$的极值问题，但是由于表达式较复杂((15)式中 $S(u, V_0)$由(4)、(10)、(12)式确定)，很难用微分法求解. 同时，实际上船速 u 只有3种选择的可能，即 $u=1, 3, 5$(千米/小时)，冰山初始体积 V_0 也只有3种选择，即 $V_0=5\times10^6, 10^7, 10^8$(米^3)，相当于小、中、大3种船型. 所以可采用枚举法计算，比较出最优方案.

计算结果是，当 $u=5$(千米/小时)、$V_0=10^8$(米^3)，即租用大型船时费用$\overline{S}$最低，约为0.055英磅.

结果分析 得到的结果虽然小于海水淡化的费用(每立方米0.1英镑)，但是模型中未考虑影响航行的种种不利因素，会拖长航行时间致使冰山抵达目的地后的体积显著地小于模型中的 $V(u, V_0, d)$. 并且没有计算空船费等其他费用. 专家们认为，只有当用这个模型计算出来的费用显著地小于海水淡化的费用时(譬如小一个数量级)，才有理由考虑采用冰山运输的办法获得淡水.

评注 这个模型的思路是简单的，建模方法有两点值得注意. 一是根据有限的数据(表4-2，表4-3)建立了经验公式(1)、(2)和(8)、(9)，为整个计算过程提供了基础；二是假定冰山呈球形，简化了计算. 读者可以考虑，如果假定冰山为其他形状，如正方形，结果有何不同.

习　题

1. 在存贮模型(4.1和4.2节)的总费用中增加购买货物本身的费用，重

新确定最优订货周期和订货批量．证明在不允许缺货模型中结果与原来的一样，而在允许缺货模型中最优订货周期和订货批量都比原来结果减小．

2．建立不允许缺货的生产销售存贮模型．设生产速率为常数 k，销售速率为常数 r，$k>r$．在每个生产周期 T 内，开始的一段时间 $(0\leqslant t\leqslant T_0)$ 一边生产一边销售，后来的一段时间 $(T_0\leqslant t\leqslant T)$ 只销售不生产．贮存量 $q(t)$ 的变化如图 4－6 所示．设每次生产开工费为 c_1，单位时间每件产品贮存费为 c_2，以总费用最小为准则确定最优周期 T．讨论 $k\gg r$ 的情况．

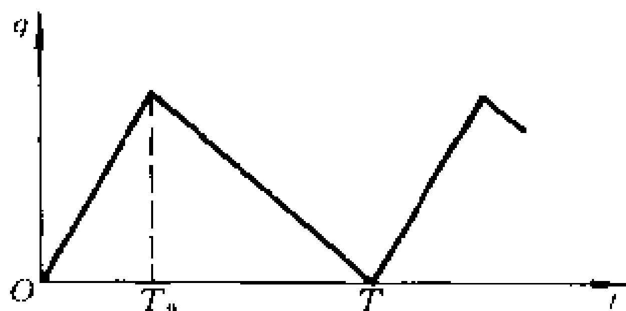


图 4－6

3．在森林救火模型（4.3 节）中，如果考虑消防队员的灭火速度 λ 与开始救火时的火势 b 有关．试假设一个合理的函数关系，重新求解模型．

4．在最优价格模型（4.4 节）中，如果考虑到成本 q 随着产量 x 的增加而降低，试作出合理的假设，重新求解模型．

5．在考虑最优价格问题时设销售期为 T，由于商品的损耗，成本 q 随时间增长，设 $q=q_0+\beta t$，β 为增长率．又设单位时间的销售量为 $x=a-bp$（p 为价格）．今将销售期分为 $0\leqslant t\leqslant T/2$ 和 $T/2<t\leqslant T$ 两段，每段的价格固定，记作 p_1、p_2．求 p_1、p_2 的最优值使销售期内的总利润最大．如果要求销售期 T 内的总售量为 Q_0，再求 p_1、p_2 的最优值．

6．在消费者的选择模型中（4.6 节），

① 证明若条件 B 成立，则条件 A 成立．

② 验证（3）、（5）、（7）式给出的效用函数是否满足条件 B 或 A．

③ 若消费者的效用函数为（7）式，求最优比例 p_1q_1/p_2q_2，并分析参数 a、b 的意义．

④ 若商品甲的价格 p_1 增加，其余条件不变，讨论消费者均衡状态的变化．

⑤ 若消费者购买商品的钱 s 增加，其余条件不变，讨论消费者均衡状态

的变化.

⑥ 推广到消费者购买 $m\,(>2)$ 种商品的情况.

*7. 要在雨中从一处沿直线走到另一处,雨速是常数且方向不变. 试建立一个模型讨论是否走得越快,淋雨量才越少.

① 将人体简化为长方柱,表面积之比为前:侧:顶 $=1:a:b$,总面积为 s. 设人沿 x 轴方向行走,速度向量表为 $(v,0,0)$,$v>0$,而雨速向量表为 (u_x,u_y,u_z),行走距离为 l. 写出淋雨量的表达式.

② 用图形法说明在什么情况下走得越快淋雨量越少,在什么情况下则不是这样[4].

*8. 甲乙两公司通过广告来竞争销售商品的数量,广告费分别是 x 和 y. 设甲乙公司商品的售量在两公司总售量中占的份额,是它们的广告费在总广告费中所占份额的函数 $f\left(\frac{x}{x+y}\right)$ 和 $f\left(\frac{y}{x+y}\right)$. 又设公司的收入与售量成正比,从收入中扣除广告费后即为公司的利润. 试用图形法建模,讨论甲公司怎样确定广告费才能使利润最大.

① 令 $t=\frac{x}{x+y}$,则 $f(t)+f(1-t)=1$. 画出 $f(t)$ 的示意图.

② 写出甲公司利润的表达式 $P(x)$. 对于一定的 y,使 $P(x)$ 最大的 x 的最优值应满足什么关系. 用图解法确定这个最优值[4].

*9. 人行走时作的功是抬高人体重心所需势能与两腿运动所需动能之和. 试建立模型讨论在作功最小的准则下每秒走几步(匀速行走)最合适.

① 设腿长 l,步长 s,证明人体重心在行走时升高 $\delta\approx s^2/8l\,(s<l)$.

② 将腿看作均匀直杆,行走看作腿绕腰部的转动. 设腿的质量 m,行走速度 v,证明单位时间所需动能为 $mv^2/6s$.

③ 设人体质量 M,证明在速度 v 一定时每秒行走 $n=\sqrt{\frac{3Mg}{4ml}}$ (步)作功最小. 实际上,$\frac{M}{m}\approx 4$,$l\approx 1$(米),分析这个结果合理吗.

④ 将② 的假设修改为:腿的质量集中在脚部,行走看作脚的直线运动. 证明结果应为 $n=\sqrt{\frac{Mg}{4ml}}$ (步). 分析这个结果是否更合理[38].

*10．观察鱼在水中的运动发现，它不是水平游动，而是突发性地、锯齿状地向上游动和向下滑行．可以认为这是在长期进化过程中鱼类选择的消耗能量最小的运动方式．

① 设鱼总是以常速 v 运动，鱼在水中净重 w、向下滑行时的阻力是 w 在运动方向的分力；向上游动时所需的力是 w 在运动方向分力与游动所受阻力之和，而游动的阻力是滑行阻力的 k 倍．水平方向游动时的阻力也是滑力阻力的 k 倍．写出这些力．

② 证明当鱼要从 A 点到达处于同一水平线上的 B 点时（见图 4－7），沿折线 ACB 运动消耗的能量与沿水平线 AB 运动消耗的能量之比为（向下滑行不消耗能量）$\dfrac{k\sin\alpha+\sin\beta}{k\sin(\alpha+\beta)}$

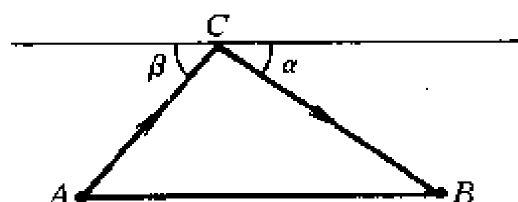


图 4－7

③ 据实际观察 $\operatorname{tg}\alpha\approx0.2$，试对不同的 k 值（1.5，2，3），根据消耗能量最小的准则估计最佳的 β 值[4]．

第 5 章　微分方程建模(动态模型)

当我们描述实际对象的某些特性随时间(或空间)而演变的过程，分析它的变化规律，预测它的未来性态时，通常要建立对象的动态模型．建模时首先要根据建模目的和对问题的具体分析作出简化假设，然后按照对象内在的或可以类比的其他对象的规律列出微分方程，求出方程的解并将结果翻译回实际对象，就可以进行描述、分析或预测了．我们在 1.4 节建立的人口指数增长模型和阻滞增长模型，大致就是这个过程．

事实上在微分方程课程中，解所谓应用题时我们已经遇到简单的建立动态模型问题，例如“一质量为 m 的物体自高 h 处自由下落，初速是零，设阻力与下落速度的平方成正比，比例系数为 k，求下落速度随时间的变化规律．”又如“容器内有 100 公升盐水，内含 10 千克盐，今以每分钟 3 公升的速度从一管放进净水，以每分钟 2 公升的速度从另一管抽出盐水，设容器内盐水浓度始终是均匀的，求容器内含盐量随时间变化的规律．”本章讨论的动态模型与这些问题的主要区别是，所谓微分方程应用题大多是物理或几何方面的典型问题，假设条件已经给出，只须用数学符号将已知规律表示出来，即可列出方程，求解的结果就是问题的答案，答案是唯一的，已经确定的．而本章的模型主要是非物理领域的实际问题，要分析具体情况或进行类比才能给出假设条件．作出不同的假设，就得到不同的方程，所以是事先没有答案的．求解结果还要用来解释实际现象并接受检验．

5.1　传染病模型

随着卫生设施的改善、医疗水平的提高以及人类文明的不断

发展，诸如霍乱、天花等曾经肆虐全球的传染性疾病已经得到有效的控制．但是在世界的某些地区，特别是贫穷的发展中国家，还不时出现传染病流行的情况．与此同时，一种更为险恶的传染病一爱滋病，则跨国越界在既包括发达国家也包括发展中国家的更大范围内蔓延．长期以来，建立传染病的数学模型来描述传染病的传播过程，分析受感染人数的变化规律，预报传染病高潮的到来等等，一直是各国有关专家和官员关注的课题．

人们不可能去做传染病传播的试验以获取数据，从医疗卫生部门得到的资料也是不完全和不充分的，所以通常主要是依据机理分析的方法建立模型．

不同类型传染病的传播过程有其各自不同的特点，弄清这些特点需要相当多的病理知识，这里不可能从医学的角度一一分析各种传染病的传播，而只是按照一般的传播机理建立几种模型[9,10,24]．

为简单起见本节假定，在疾病传播期内所考察地区的总人数 N 不变，既不考虑生死，也不考虑迁移．并且时间以天为计量单位．

模型 I (SI 模型) 假设条件为

1．人群分为**易感染者**(Susceptible)和**已感染者**(Infective)两类(取两个词的第 1 个字母，称之为 SI 模型)．以下简称**健康者**和**病人**．时刻 t 这两类人在总人数中所占的比例分别记作 $s(t)$和 $i(t)$．

2．每个病人每天有效接触的平均人数是常数 λ，λ 称**日接触率**．当病人与健康者有效接触时，使健康者受感染变为病人．

根据假设，每个病人每天可使 $\lambda s(t)$个健康者变为病人，因为病人数为 $Ni(t)$，所以每天共有 $\lambda Ns(t)i(t)$个健康者被感染，于是 λNsi 就是病人数 Ni 的增加率，即有

$$N\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\lambda Nsi \tag{1}$$

又因为

$$s(t)+i(t)=1 \tag{2}$$

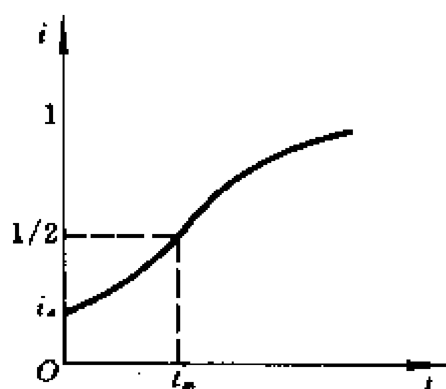
再记初始时刻($t=0$)病人的比例为 i_0，则

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\lambda i(1-i) \\ i(0)=i_0 \end{cases} \tag{3}$$

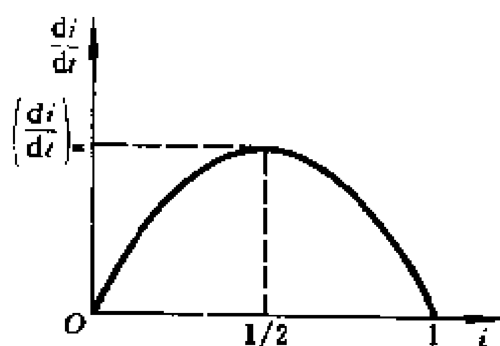
方程(3)是1.4节中出现过的 Logistic 模型. 它的解为

$$i(t)=\frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{i_0}-1\right)e^{-\lambda t}} \tag{4}$$

$i(t)\sim t$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\sim i$ 的图形如图 5-1 所示.



1. $i\sim t$ 曲线



2. $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\sim i$ 曲线

图 5-1

由(3)、(4)式及图 5-1 可知，第一，当 $i=1/2$ 时 $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ 达到最大值 $\left(\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)_m$，这个时刻为

$$t_m=\lambda^{-1}\ln\left(\frac{1}{i_0}-1\right) \tag{5}$$

这时病人增加得最快，预示着传染病高潮的到来，是医疗卫生部门关注的时刻．t_m 与 λ 成反比，因为日接触率 λ 表示该地区的卫生水平，λ 越小卫生水平越高．所以改善保健设施、提高卫生水平可以推迟传染病高潮的到来．第二，当 $t\to\infty$ 时 $i\to 1$，即所有人终将被传染，全变为病人，这显然不符合实际情况．其原因是模型中没有考虑到病人可以治愈，人群中的健康者只能变成病人，病人不会再变成健康者．

为了修正上述结果必须重新考虑模型的假设，下面两个模型中我们讨论病人可以治愈的情况．

模型Ⅱ（SIS 模型） 有些传染病如伤风、痢疾等愈后免疫力很低，可以假定无免疫性，于是病人被治愈后变成健康者；健康者还可以被感染再变成病人，所以这个模型称 SIS 模型．

SIS 模型的假设条件 1、2 与 SI 模型相同，增加的条件为

3．病人每天被治愈的占病人总数的比例为 μ，称为**日治愈率**．病人治愈后成为仍可被感染的健康者．显然 $1/\mu$ 是这种传染病的**平均传染期**．

不难看出，考虑到假设 3，SI 模型的(1)式应修正为

$$N\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\lambda Nsi-\mu Ni \tag{6}$$

(2)式不变，于是(3)式应改为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\lambda i(1-i)-\mu i\\ i(0)=i_0\end{cases} \tag{7}$$

方程(7)的解可表为

$$i(t)=\begin{cases}\left[\dfrac{\lambda}{\lambda-\mu}+\left(\dfrac{1}{i_0}-\dfrac{\lambda}{\lambda-\mu}\right)e^{-(\lambda-\mu)t}\right]^{-1}, & \lambda\neq\mu\\ \left(\lambda t+\dfrac{1}{i_0}\right)^{-1}, & \lambda=\mu\end{cases} \tag{8}$$

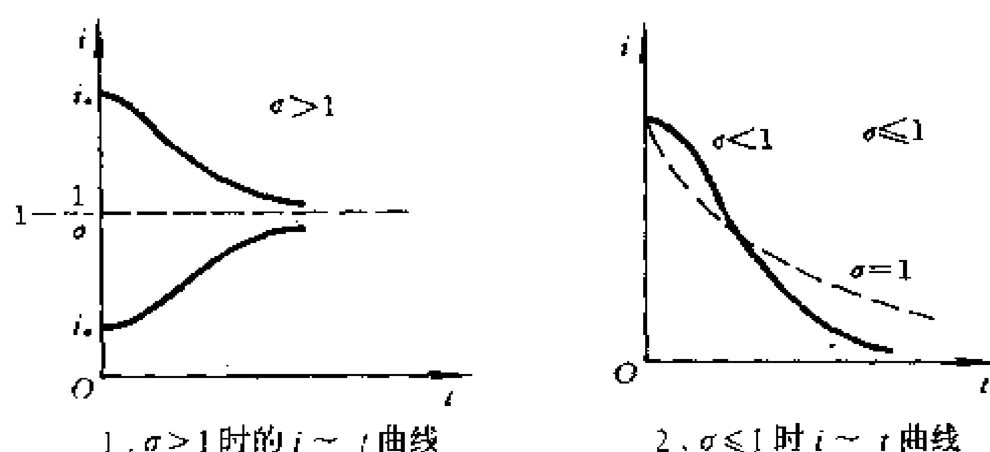
定义

$$\sigma = \lambda / \mu \tag{9}$$

注意到 λ 和 $1/\mu$ 的含义，可知 σ 是一个传染期内每个病人有效接触的平均人数，称**接触数**．由(8)、(9)式容易得到，当 $t \to \infty$ 时

$$i(\infty) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{\sigma}, & \sigma > 1 \\ 0, & \sigma \leqslant 1 \end{cases} \tag{10}$$

根据(8)～(10)式可以画出 $i(t) \sim t$ 的图形(图 5－2)．



1．$\sigma > 1$ 时的 $i \sim t$ 曲线　　2．$\sigma \leqslant 1$ 时 $i \sim t$ 曲线

图 5－2

接触数 $\sigma = 1$ 是一个**阈值**．当 $\sigma \leqslant 1$ 时病人比例 $i(t)$ 越来越小，最终趋于零，这是由于传染期内经有效接触从而使健康者变成的病人数不超过原来病人数的缘故；当 $\sigma > 1$ 时 $i(t)$ 的增减性取决于 i_0 的大小(见图 5－2)，但其极限值 $i(\infty) = 1 - \dfrac{1}{\sigma}$ 随 σ 的增加而增加(试从 σ 的含义给以解释)．

SI 模型可视为本模型的特例，请读者考虑它相当于本模型中 μ 或 σ 取何值的情况．

模型Ⅲ(SIR 模型)　大多数传染病如天花、流感、肝炎、麻疹等治愈后均有很强的免疫力，所以病愈的人既非健康者(易感染者)，也非病人(已感染者)，他们已经退出传染系统．这种情

况下的模型假设条件为

1．人群分为健康者、病人和病愈免疫的移出者（Removed）三类，称 SIR 模型．三类人在总人数 N 中占的比例分别记作 $s(t)$、$i(t)$和 $r(t)$．

2．病人的日接触率为 λ，日治愈率为 μ（与 SI 模型相同），传染期接触数为 $\sigma=\lambda/\mu$．

由条件 1 显然有

$$s(t)+i(t)+r(t)=1 \tag{11}$$

根据条件 2 方程（6）仍成立．对于病愈免疫的移出者而言应有

$$N\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\mu Ni \tag{12}$$

再记初始时刻的健康者和病人的比例分别是 $s_0(>0)$ 和 $i_0(>0)$（不妨设移出者的初始值 $r_0=0$），则由（6）、（11）、（12）式，SIR 模型的方程可以写作

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\lambda si-\mu i\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-\lambda si\\[2ex] i(0)=i_0,\ s(0)=s_0\end{cases} \tag{13}$$

方程（13）无法求出 $s(t)$和 $i(t)$的解析解，我们转到相平面 $s\sim i$ 上来讨论解的性质．相轨线的定义域 $(s,i)\in D$ 应为

$$D=\{(s,i)|s\geqslant 0,\ i\geqslant 0,\ s+i\leqslant 1\} \tag{14}$$

在方程（13）中消去 $\mathrm{d}t$ 并注意到 σ 的定义（9），可得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}s}=\dfrac{1}{\sigma s}-1\\[2ex] i|_{s=s_0}=i_0\end{cases} \tag{15}$$

容易求出方程（15）的解为

$$i=(s_0+i_0)-s-\frac{1}{\sigma}\ln\frac{s}{s_0} \tag{16}$$

在定义域 D 内，(16)式表示的曲线即为相轨线，如图 5－3 所示．其中箭头表示了随着时间 t 的增加 $s(t)$和 $i(t)$的变化趋向．

下面根据(13)、(16)式和图 5－3 分析 $t\to\infty$ 时 $s(t)$、$i(t)$和 $r(t)$的变化情况(它们的极限值分别记作 s_∞、i_∞ 和 r_∞)．

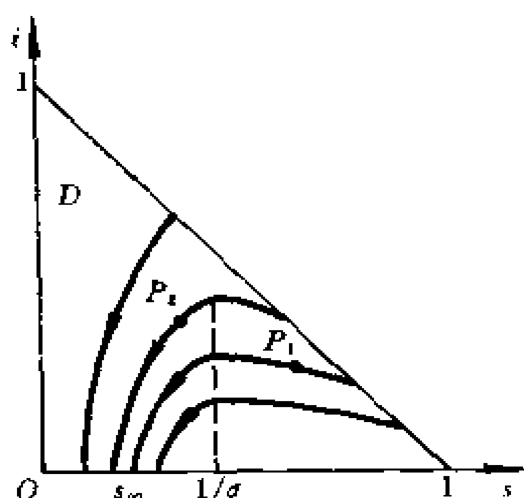


图 5－3 SIR 模型的相轨线

1．不论初始条件 s_0、i_0 如何，病人终将消失，即

$$i_\infty=0 \tag{17}$$

其证明如下．

首先，由(13)，$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\leqslant 0$，而 $s(t)\geqslant 0$，故 s_∞ 存在；由(12)，$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\geqslant 0$，而$r(t)\leqslant 1$，故 r_∞ 存在；再由(11)知 i_∞ 存在．

其次，若 $i_\infty=\varepsilon>0$，则由(12)，对于充分大的 t 有 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}>\mu\frac{\varepsilon}{2}$，这将导致 $r_\infty=\infty$，与 r_∞ 存在相矛盾．

从图形上看，不论相轨线从 P_1 或从 P_2 点出发，它终将与 s 轴相交．

2．最终未被感染的健康者的比例是 s_∞，在(16)式中令 $i=0$ 得到，s_∞ 是方程

$$s_0+i_0-s_\infty+\frac{1}{\sigma}\ln\frac{s_\infty}{s_0}=0 \tag{18}$$

在 $(0, 1/\sigma)$内的单根．在图形上 s_∞ 是相轨线与 s 轴在$(0, 1/\sigma)$内交点的横坐标．

3．若 $s_0>1/\sigma$，则 $i(t)$先增加，当 $s=1/\sigma$ 时，$i(t)$达到最大

值 $i_m = s_0 + i_0 - \frac{1}{\sigma}(1 + \ln\sigma s_0)$，然后 $i(t)$ 减小且趋于零．$s(t)$ 则单调减小至 s_∞．如图 5－3 中由 $P_1(s_0, i_0)$ 出发的轨线．

4．若 $s_0 \leqslant 1/\sigma$，则 $i(t)$ 单调减小至零，$s(t)$ 单调减小至 s_∞．如图中由 $P_2(s_0, i_0)$ 出发的轨线．(3、4 的证明留作习题 1)．

可以看出，如果仅当病人比例 $i(t)$ 有一段增长的时期才认为传染病在蔓延，那么 $1/\sigma$ 是一个**阈值**，当 $s_0 > 1/\sigma$（即 $\sigma > 1/s_0$）时传染病就会蔓延．而减小传染期接触数 σ，即提高阈值 $1/\sigma$，使得 $s_0 \leqslant 1/\sigma$（即 $\sigma \leqslant 1/s_0$），传染病就不会蔓延（健康者比例的初始值 s_0 是一定的，通常可认为 $s_0 \approx 1$）．我们注意到在 $\sigma = \lambda/\mu$ 中，人们的卫生水平越高，日接触率 λ 越小；医疗水平越高，日治愈率 μ 越大，于是 σ 越小，所以提高卫生水平和医疗水平有助于控制传染病的蔓延．

从另一方面看，$\sigma s = \lambda s \cdot 1/\mu$ 是传染期内一个病人传染的健康者的平均数，称为**交换数**，其含义是一个病人被 σs 个健康者交换．所以当 $s_0 \leqslant 1/\sigma$，即 $\sigma s_0 \leqslant 1$ 时，必有 $\sigma s \leqslant 1$．既然交换数不超过 1，病人比例 $i(t)$ 绝不会增加，传染病不会蔓延．

我们看到在 SIR 模型中接触数 σ 是一个重要参数．σ 可以由实际数据估计，因为病人比例的初始值 i_0 通常很小，在(18)式中略去 i_0 可得

$$\sigma = \frac{\ln s_0 - \ln s_\infty}{s_0 - s_\infty} \tag{19}$$

于是当传染病结束而获得 s_0 和 s_∞ 以后，由(19)式能算出 σ．另外，对血样作免疫检验也可以根据对检验无反应和有反应，估计出 s_0 和 s_∞，然后计算 σ．

模型验证　本世纪初在印度孟买发生的一次瘟疫中几乎所有病人都死亡了．死亡相当于移出传染系统，有关部门记录了每天移出者的人数，即有了 $\frac{dr}{dt}$ 的实际数据，Kermack 等人用这组

数据对 SIR 模型作了验证.

首先，由方程(11)、(13)，可以得到(习题 2)

$$s(t)=s_0e^{-\sigma r(t)} \tag{20}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\mu(1-r-s_0e^{-\sigma r}) \tag{21}$$

当 $r\leqslant 1/\sigma$ 时，取(21)式右端 $e^{-\sigma r}$ 台劳展开的前 3 项，在初始值 $r_0=0$ 下的解为

$$r(t)=\frac{1}{s_0\sigma^2}\left[(s_0\sigma-1)+\alpha\mathrm{th}\left(\frac{\alpha\mu t}{2}-\varphi\right)\right] \tag{22}$$

其中 $\alpha^2=(s_0\sigma-1)^2+2s_0i_0\sigma^2$，$\mathrm{th}\varphi=\dfrac{s_0\sigma-1}{\alpha}$. 从(22)式容易算出

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{\alpha^2\mu}{2s_0\sigma^2\mathrm{ch}^2\left(\dfrac{\alpha\mu t}{2}-\varphi\right)} \tag{23}$$

然后取定参数 s_0、σ 等，画出(23)式的图形，如图 5－4 中的曲线，实际数据在图中用圆点表示，可以看出，理论曲线与实际数据吻合得相当不错.

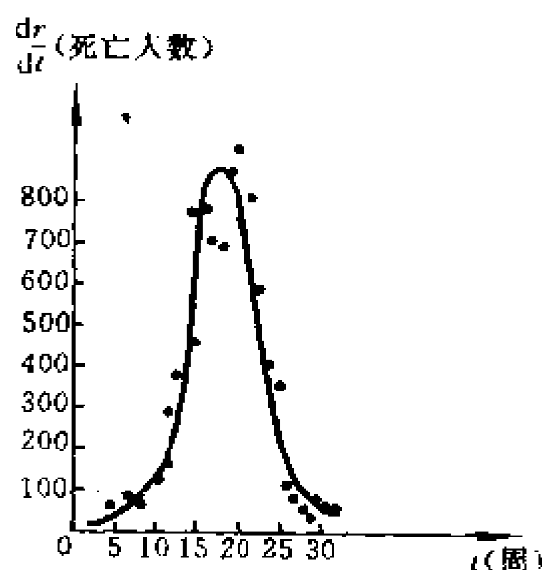


图 5－4 SIR 模型的理论曲线与实际数据

在本节的最后，介绍 SIR 模型的两个应用.

被传染比例的估计 在一次传染病的传播过程中，被传染人数的比例是健康者人数比例的初始值 s_0 与 $t\to\infty$ 的极限值 s_∞ 之差，记作 x，即

$$x = s_0 - s_\infty \tag{24}$$

假定 i_0 很小，s_0 接近于 1，由(18)式可得

$$x + \frac{1}{\sigma}\ln\left(1 - \frac{x}{s_0}\right) \doteq 0 \tag{25}$$

取对数函数台劳展开的前两项有

$$x\left(1 - \frac{1}{s_0\sigma} - \frac{x}{2s_0^2\sigma}\right) \doteq 0 \tag{26}$$

记 $s_0 = \frac{1}{\sigma} + \delta$，$\delta$ 可视为该地区人口比例超过阈值 $1/\sigma$ 的部分．当 $\delta \ll 1/\sigma$ 时(26)式给出

$$x \doteq 2s_0\sigma\left(s_0 - \frac{1}{\sigma}\right) \doteq 2\delta \tag{27}$$

这个结果表明，被传染人数比例约为 δ 的 2 倍．对一种传染病，当该地区的卫生和医疗水平不变，即 σ 不变时，这个比例就不会改变．而当阈值 $1/\sigma$ 提高时，δ 减小，于是这个比例就会降低．

群体免疫和预防　根据对 SIR 模型的分析，当 $s_0 \leqslant 1/\sigma$ 时传染病不会蔓延．所以为制止蔓延，除了提高卫生和医疗水平，使阈值 $1/\sigma$ 变大以外，另一个途径是降低 s_0，这可以通过譬如预防接种使群体免疫的办法做到．

忽略病人比例的初始值 i_0，有 $s_0 = 1 - r_0$．于是传染病不会蔓延的条件 $s_0 \leqslant 1/\sigma$ 可以表为

$$r_0 \geqslant 1 - \frac{1}{\sigma} \tag{28}$$

这就是说，只要通过群体免疫使初始时刻的移出者比例(即免疫者比例)r_0 满足(28)式，就可以制止传染病的蔓延．

这种办法生效的前提条件是免疫者要均匀分布在全体人口中，实际上这是很难做到的．据估计在印度等国天花传染病的接触数 $\sigma \doteq 5$，由(28)式至少要有 80% 的人接受免疫才行．据世界卫生组织报告，即使花费大量资金提高 r_0，也因很难做到免疫者的均匀分布，使得天花直到 1977 年才在全世界根除．而有些传染病的 σ 更高，根除就更加困难．

5.2 经济增长模型

发展经济、增加生产有两个重要因素，一是增加投资(扩大厂房、购买设备、技术革新等)，二是雇用更多的工人．恰当调节投资增长和劳动力增长的关系，使增加的产量不致被劳动力的增长抵消，劳动生产率才能不断提高．本节通过介绍一个描述生产量、劳动力和投资之间变化规律的模型，来讨论这些问题[32]．

1．道格拉斯(Douglas)生产函数

用 $Q(t)$、$L(t)$ 和 $K(t)$分别表示某一地区、部门或企业在时刻 t 的产量、劳动力和资金，时间以年为单位．因为人们关心的是它们的增长量，不是绝对量，所以定义

$$i_Q(t)=\frac{Q(t)}{Q(0)},\quad i_L(t)=\frac{L(t)}{L(0)},\quad i_K(t)=\frac{K(t)}{K(0)} \tag{1}$$

分别为产量指数、劳动力指数和投资指数．它们的初始值($t=0$)为 1．

在正常的经济发展过程中这 3 个指数都是随时间增长的，而 $i_Q(t)$的增长又取决于 $i_L(t)$和 $i_K(t)$的增长速度．但是它们之间的关系难以从机理分析得到，只能求助于统计数据．表 5－1 是美国马萨诸塞州从 1890 年到 1926 年上述 3 个指数的数据(以 1899 年为 $t=0$)．

为了从数量关系上分析这些数据，定义新变量

$$\xi(t)=\ln\frac{i_L(t)}{i_K(t)}, \qquad \psi(t)=\ln\frac{i_Q(t)}{i_K(t)} \tag{2}$$

表 5－1 美国马萨诸塞州1890～1926 i_K, i_L, i_Q 的数据

t	$i_K(t)$	$i_L(t)$	$i_Q(t)$	t	$i_K(t)$	$i_L(t)$	$i_Q(t)$
−9	0.95	0.78	0.72	10	2.05	1.43	1.60
−8	0.96	0.81	0.78	11	2.51	1.58	1.69
−7	0.99	0.85	0.84	12	2.63	1.59	1.81
−6	0.96	0.77	0.73	13	2.74	1.66	1.93
−5	0.93	0.72	0.72	14	2.82	1.68	1.95
−4	0.86	0.84	0.83	15	3.24	1.65	2.01
−3	0.82	0.81	0.81	16	3.24	1.62	2.00
−2	0.92	0.89	0.93	17	3.61	1.86	2.09
−1	0.92	0.91	0.96	18	4.10	1.93	1.96
0	1.00	1.00	1.00	19	4.36	1.96	2.20
1	1.04	1.05	1.05	20	4.77	1.95	2.12
2	1.06	1.08	1.18	21	4.75	1.90	2.16
3	1.16	1.18	1.29	22	4.54	1.58	2.08
4	1.22	1.22	1.30	23	4.54	1.67	2.24
5	1.27	1.17	1.30	24	4.58	1.82	2.56
6	1.37	1.30	1.42	25	4.58	1.60	2.34
7	1.44	1.39	1.50	26	4.58	1.61	2.45
8	1.53	1.47	1.52	27	4.54	1.64	2.58
9	1.57	1.31	1.46				

按照表中数据算出(ξ, ψ)后在 $\xi \sim \psi$ 平面直角坐标系上作图(图 5－5)．可以发现大多数点靠近一条过原点的直线，这提示应设 ξ 和 ψ 的关系为

$$\psi=\gamma\xi \tag{3}$$

且直线斜率 γ 通常有 $0<\gamma<1$．将(2)代入(3)式得

$$i_Q(t)=i_L^{\gamma}(t)\,i_K^{1-\gamma}(t) \tag{4}$$

再记 $a=Q(0)L^{-\gamma}(0)K^{\gamma-1}(0)$，则由(1)，(4)式可以写出

$$Q(t)=aL^{\gamma}(t)K^{1-\gamma}(t),\ 0<\gamma<1,\ a>0 \tag{5}$$

这就是经济学中著名的 Cobb－Douglas 生产函数，记作 $Q(L, K)$，它表明了产量与劳动力和投资间的关系*).

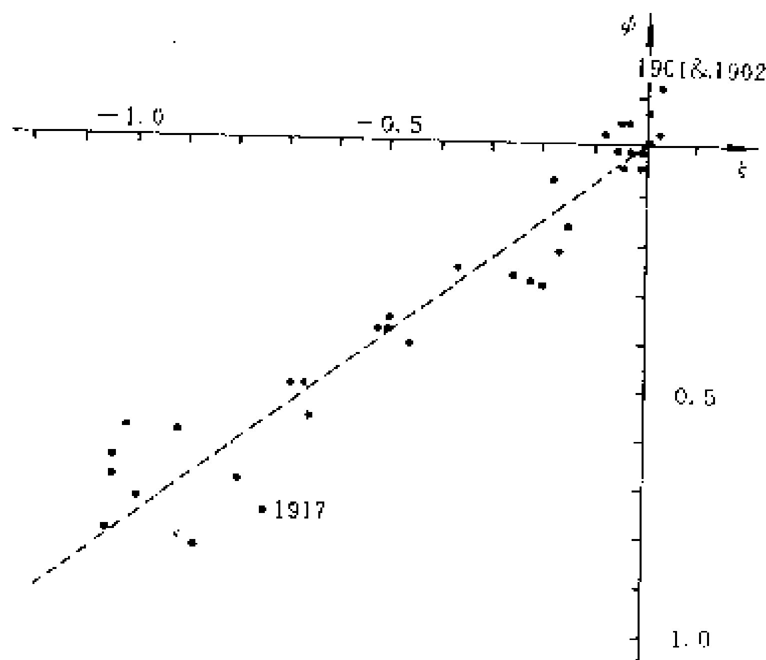


图 5－5　按照表5－1数据和(2)式得到的 $\xi \sim \psi$ 关系

将(5)式对 t 求导，得

$$\frac{\dot{Q}}{Q}=\gamma\frac{\dot{L}}{L}+(1-\gamma)\frac{\dot{K}}{K} \tag{6}$$

(6)式表示了年相对增长量 $\frac{\dot{Q}}{Q}$、$\frac{\dot{L}}{L}$ 和 $\frac{\dot{K}}{K}$ 之间的线性关系，显然

$$\gamma=\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial L}}{\dfrac{Q}{L}} \tag{7}$$

---

*) 生产函数的一般形式写作 $Q(t)=aL^{\alpha}(t)K^{\beta}(t)$，$0<\alpha, \beta<1$，进一步的讨论见 15.4 节.

表示产量增长中取决于劳动力部分的比值，称产量对劳动力的**弹性系数**．$\gamma \to 1$ 说明产量增长主要靠劳动力的增长；$\gamma \to 0$ 说明产量增长主要靠投资的增长．

2．劳动生产率增长的条件

为了进一步讨论产量随劳动力和投资的增长而增长的规律，需要对劳动力和投资的增加作出合理的假设．

① 劳动力每年的相对增长率是常数 ρ，即

$$\dot{L} = \rho L \tag{8}$$

② 投资的年增长率与产量成正比，比例系数为 σ，即

$$\dot{K} = \sigma Q \tag{9}$$

方程(8)的解为（以下用 L_0、K_0 记初始值 $L(0)$、$K(0)$）

$$L(t) = L_0 e^{\rho t} \tag{10}$$

将(5)、(10)代入(9)式得

$$\dot{K} = \sigma a L_0^{\gamma} e^{\rho\gamma t} K^{1-\gamma} \tag{11}$$

其解 $K(t)$满足

$$K^{\gamma}(t) = K_0^{\gamma} + \frac{\sigma a}{\rho} L_0^{\gamma}(e^{\rho\gamma t} - 1) \tag{12}$$

定义

$$Z(t) = \frac{Q(t)}{L(t)} \tag{13}$$

表示每个劳动力占有的产量，可以看作劳动生产率．下面讨论 $Z(t)$增长的条件．

对(13)式求导并将(6)式代入得

$$\frac{\dot{Z}}{Z} = \frac{\dot{Q}}{Q} - \frac{\dot{L}}{L} = (1-\gamma)\left(\frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}\right) \tag{14}$$

将(9)～(12)代入(14)式，经化简可得

$$\frac{\dot{Z}}{Z} = (1-\gamma)(\dot{K}_0 - \rho K_0)K_0^{\gamma-1} K^{-\gamma} \tag{15}$$

其中$\dot{K}_0 = \dot{K}(0)$. 由此不难看出，只要

$$\frac{\dot{K}_0}{K_0} > \rho = \frac{\dot{L}}{L} \tag{16}$$

就有 $\dot{Z} > 0$. 这就是说，只要初始投资的相对增长率大于劳动力的相对增长率(常数 ρ)，就能保证劳动生产率 $Z(t)$的不断增长.

另一方面，因为(15)式中 $K(t)$是增加的，且 $t \to \infty$ 时 $K(t) \to \infty$，所以 $\dot{Z}(t)$递减，且 $\dot{Z}(t) \to 0$，即 $Z(t)$的增长率不断减小，$Z(t)$趋于常数.

5.3 正规战与游击战

早在第一次世界大战期间，F. W. Lanchester 就提出了几个预测战争结局的数学模型，其中有描述传统的正规战争的，也有考虑稍微复杂的游击战争的，以及双方分别使用正规部队和游击部队的所谓混合战争的. 后来人们对这些模型作了改进和进一步的解释，用以分析历史上一些著名的战争，如二次世界大战中的美日硫黄岛之战和 1975 年结束的越南战争.

Lanchester 提出的模型是非常简单的，他只考虑双方兵力的多少和战斗力的强弱，兵力因战斗减员和非战斗减员而减少，又由后备力量的增援而增加；战斗力即杀伤对方的能力，则与射击率(单位时间的射击次数)、射击命中率以及战争的类型(正规战、游击战)等有关. 这些模型当然没有考虑交战双方的政治、经济、社会等因素. 而仅靠战场上兵力的优劣是很难估计战争胜负的，所以我们认为用这些模型判断整个战争的结局是不可能的，但是对于局部战役来说或许还有参考价值. 更重要的是，建模的思路和方法为我们借助数学模型讨论社会科学领域中的实际问题提供了可以借鉴的示例[9, 27].

一般战争模型 用 $x(t)$和 $y(t)$表示甲乙交战双方时刻 t 的

兵力，不妨视为双方的士兵人数．假设

1．每一方的战斗减员率取决于双方的兵力和战斗力，用 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 表示．

2．每一方的非战斗减员率（由疾病、逃跑等因素引起）与本方的兵力成正比．

3．每一方的增援率是给定的函数，用 $u(t)$ 和 $v(t)$ 表示．

由此可以写出关于 $x(t)$、$y(t)$ 的微分方程为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -f(x, y) - \alpha x + u(t), \ \alpha > 0 \\ \dot{y}(t) = -g(x, y) - \beta x + v(t), \ \beta > 0 \end{cases} \tag{1}$$

下面针对不同的战争类型讨论战斗减员率 f、g 的具体表示形式，并分析影响战争结局的因素．

正规战争模型 甲乙双方都用正规部队作战．我们只须分析甲方的战斗减员率 $f(x, y)$．

甲方士兵公开活动，处于乙方每一个士兵的监视和杀伤范围之内，一旦甲方某个士兵被杀伤，乙方的火力立即集中在其余士兵身上，所以甲方的战斗减员率只与乙方兵力有关，可以简单地设 f 与 y 成正比，即 $f = ay$．a 表示乙方平均每个士兵对甲方士兵的杀伤率（单位时间的杀伤数），称乙方的战斗有效系数．a 可以进一步分解为 $a = r_y p_y$，其中 r_y 是乙方的**射击率**（每个士兵单位时间的射击次数），p_y 是每次射击的**命中率**．

类似地有 $g = bx$，且甲方的战斗有效系数 $b = r_x p_x$，r_x 和 p_x 是甲方的射击率和命中率．于是在这个模型中方程(1)化为

$$\begin{cases} \dot{x} = -ay - \alpha x + u(t) \\ \dot{y} = -bx - \beta y + v(t) \end{cases} \tag{2}$$

在分析战争结局时忽略非战斗减员一项（与战斗减员相比，这项很小），并且假设双方都没有增援．记双方的初始兵力分别是 x_0 和 y_0，方程(2)简化为

$$
\begin{cases}
\dot{x} = -ay \\
\dot{y} = -bx \\
x(0) = x_0, y(0) = y_0
\end{cases}
\tag{3}
$$

不直接求解方程(3)，而在相平面上讨论相轨线的变化规律更容易判断双方的胜负．由方程(3)可得

$$
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{bx}{ay} \tag{4}
$$

其解为

$$
ay^2 - bx^2 = k \tag{5}
$$

注意到方程(3)的初始条件，有

$$
k = ay_0^2 - bx_0^2 \tag{6}
$$

由(5)式确定的相轨线是双曲线族，如图5－6．箭头表示随时间t的增加，$x(t)$、$y(t)$的变化趋势．可以看出，如果$k>0$，轨线将与y轴相交．这就是说存在t_1使$x(t_1)=0$，$y(t_1)=\sqrt{\frac{k}{a}}>0$，即当甲方兵力为零时乙方兵力为正值，表明乙方获胜．同理可知，$k<0$时甲方获胜，而当$k=0$时双方战平．

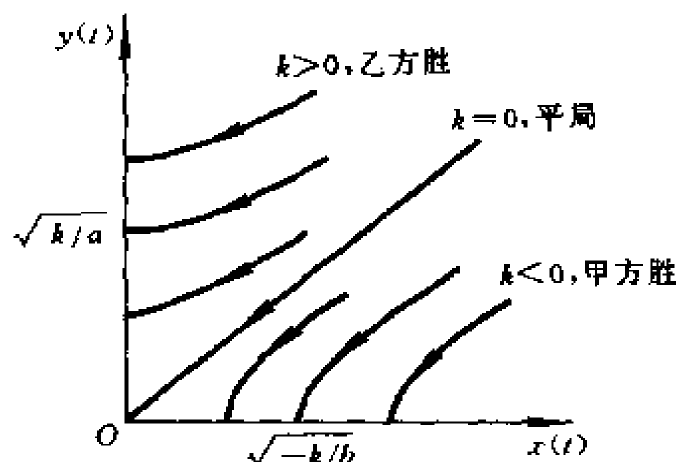


图5－6　正规战争模型的相轨线

进一步分析某一方譬如乙方取胜的条件．由(6)式并注意到a、b的含义，乙方获胜的条件可表为

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{b}{a} = \frac{r_x p_x}{r_y p_y} \tag{7}$$

(7)式说明双方初始兵力之比 y_0/x_0 以平方关系影响着战争的结局．例如若乙方兵力增加到原来的 2 倍（甲方不变），则影响战争结局的能力增加到 4 倍．或者说，若甲方的战斗力譬如射击率 r_x 增加到原来的 4 倍（p_x、r_y、p_y 均不变），那么为了与此相抗衡，乙方只须将初始兵力 y_0 增加到原来的 2 倍．由于这个原因正规战争模型称为**平方律模型**．

游击战争模型　双方都用游击部队作战．

甲方士兵在乙方士兵看不到的某个面积为 s_x 的隐蔽区域内活动，乙方士兵不是向甲方士兵开火，而是向这个隐蔽区域射击，并且不知道杀伤情况．这时甲方战斗减员率不仅与乙方兵力有关，而且随着甲方兵力的增加而增加．因为在一个有限区域内，士兵越多，被杀伤的就越多．这样可以简单地假设 $f = cxy$，且乙方战斗有效系数 c 可表为 $c = r_y p_y = r_y \frac{s_{ry}}{s_x}$，其中 r_y 仍为射击率，而命中率 p_y 等于乙方一次射击的有效面积 s_{ry} 与甲方活动面积 s_x 之比．

类似地有 $g = dxy$，$d = r_x p_x = r_x \frac{s_{rx}}{s_y}$．于是在这个模型中方程(1)化为

$$\begin{cases} \dot{x} = -cxy - \alpha x + u(t) \\ \dot{y} = -dxy - \beta y + v(t) \end{cases} \tag{8}$$

忽略 αx 和 βy 并设 $u = v = 0$，在初始条件下(8)式为

$$\begin{cases} \dot{x} = -cxy \\ \dot{y} = -dxy \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{9}$$

与正规战争模型中方程(3)的解法类似，方程(9)的解为

$$cy - dx = m \quad (10)$$

$$m = cy_0 - dx_0 \quad (11)$$

(10)式确定的相轨线是直线族，如图 5－7．像分析正规战争模型一样，可知$m>0$时乙方胜，$m<0$时甲方胜，$m=0$时战平．

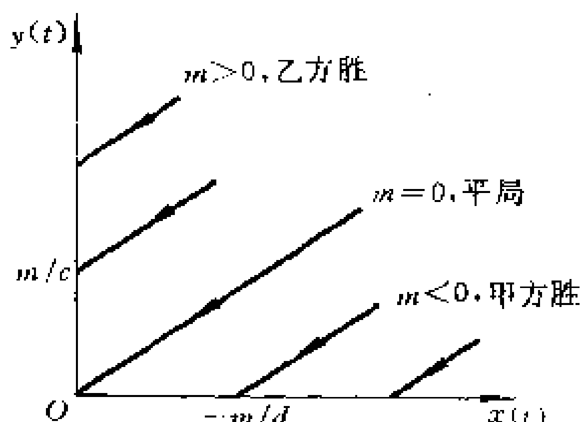


图 5－7 游击战争模型的相轨线

乙方获胜的条件还可以表为

$$\frac{y_0}{x_0} > \frac{d}{c} = \frac{r_x s_{rx} s_x}{r_y s_{ry} s_y} \quad (12)$$

即初始兵力之比 y_0/x_0 以线性关系影响战争结局，并且当射击率和射击有效面积一定时，增加活动面积 s_y 与增加初始兵力 y_0 起着同样的作用．这个模型又称**线性律模型**．

混合战争模型 甲方为游击部队，乙方为正规部队．

根据对正规战争和游击战争模型的分析和假设，$f=cxy$，$g=bx$，在同样的忽略和假设下，方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = -cxy \\ \dot{y} = -bx \\ x(0)=x_0,\ y(0)=y_0 \end{cases} \quad (13)$$

它的相轨线

$$cy^2 - 2bx = n \quad (14)$$

$$n = cy_0^2 - 2bx_0 \quad (15)$$

是抛物线，如图 5－8．可以知道 $n>0$ 时乙方胜，$n<0$ 甲方胜，$n=0$ 时双方战平．并且乙方(正规部队一方)取胜的条件可表为

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{2b}{cx_0} \quad (16)$$

以 $b=r_xp_x$, $c=r_y\frac{s_{ry}}{s_x}$ 代入得

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2>\frac{2r_xp_xs_x}{r_ys_{ry}x_0} \tag{17}$$

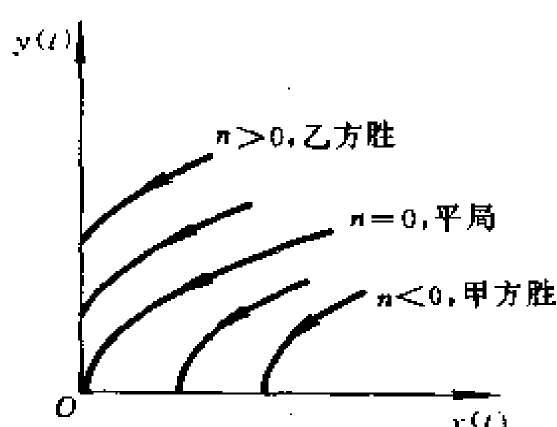


图 5-8 混合战争模型的相轨线

假定以正规部队作战的乙方火力较强，以游击部队作战的甲方虽火力较弱，但活动范围较大．利用(17)式可以估计出乙方为了取胜需投入多大的初始兵力．为确定起见不妨设甲方兵力 $x_0=100$ ，命中率 $p_x=0.1$ ，火力 r_x 是乙方火力 r_y 的一半，活动区域面积 $s_x=0.1$ 平方千米，乙方每次射击的有效面积 $s_{ry}=1$ 平方米，那么由(17)式乙方取胜的条件为

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2>\frac{2\cdot0.1\cdot0.1\times10^6}{2\cdot1\cdot100}=100 \tag{18}$$

即 $y_0/x_0>10$ ，乙方必须10倍于甲方的兵力．

美国人曾用这个模型分析越南战争(甲方为越南，乙方为美国)．根据类似于上面的计算以及四五十年代发生在马来亚、菲律宾、印尼、老挝等地的混合战争的实际情况估计出，正规部队一方要想取胜必须至少投入8倍于游击部队一方的兵力，而美国最多只能派出6倍于越南的兵力．越南战争的结局是美国不得不接受和谈并撤军，越南人民取得最后胜利．

硫黄岛战役 J．H．Engel用二次大战末期美日硫黄岛战役中的美军战地记录，对正规战争模型进行了验证，发现模型结果与实际数据吻合得很好．

硫黄岛位于东京以南660英里的海面上，是日军的重要空军基地．美军在1945年2月19日开始进攻，激烈的战斗持续了一个月，双方伤亡惨重，日方守军21,500人全部阵亡或被俘，美方投入兵力73,000人，伤亡20,265人．战争进行到28天时美军宣布占领该岛，实际战斗到36天才停止．美军的战地记录有按天统计的战斗减员和增援情况．日军没有后援，战地记录则全部遗失．

用$A(t)$和$J(t)$表示美军和日军第t天的人数，在正规战争模型(2)式中忽略非战斗减员，且$v=0$，再加上初始条件，有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=-aJ(t)+u(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}=-bA(t) \\ A(0)=0,\ J(0)=21,500 \end{cases} \tag{19}$$

美军战地记录给出增援率$u(t)$为

$$u(t)=\begin{cases} 54,000, & 0\leqslant t<1 \\ 6,000, & 2\leqslant t<3 \\ 13,000, & 5\leqslant t<6 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{20}$$

并可由每天伤亡人数算出$A(t)$，$t=1,2,\cdots,36$（见图5-9中虚线）．下面要利用这些实际数据代入(19)式，算出$A(t)$的理论值，并与实际值比较．

对方程(19)用求和代替积分可得

$$A(t)=A(0)-a\sum_{\tau=1}^{t}J(\tau)+\sum_{\tau=1}^{t}u(\tau) \tag{21}$$

$$J(t)=J(0)-b\sum_{\tau=1}^{t}A(\tau) \tag{22}$$

为估计b在(22)式中取$t=36$，因为$J(36)=0$，且由$A(t)$的实

际数据可得 $\sum_{\tau=1}^{36} A(\tau)=2,037,000$，于是从(22)式估计出 $b=\frac{21,500}{2,037,000}=0.0106$．再把这个值代入(22)式即可算出 $J(t)$，$t=1,2,\cdots,36$．

然后从(21)式估计 a．令 $t=36$，得

$$a=\frac{\sum_{\tau=1}^{36} u(\tau)-A(36)}{\sum_{\tau=1}^{36} J(\tau)} \tag{23}$$

其中分子是美军的总伤亡人数，为 20,265 人，分母可由已经算出的 $J(t)$得到，为 372,500 人，于是从(23)式有 $a=\frac{20,265}{372,500}=0.0544$．把这个值代入(21)式得

$$A(t)=-0.0544\sum_{\tau=1}^{t} J(\tau)+\sum_{\tau=1}^{t} u(\tau) \tag{24}$$

由(24)式就能够算出美军人数 $A(t)$的理论值，图 5－9 中用实线画出．与虚线表示的实际值相比，可以看出吻合的情况．

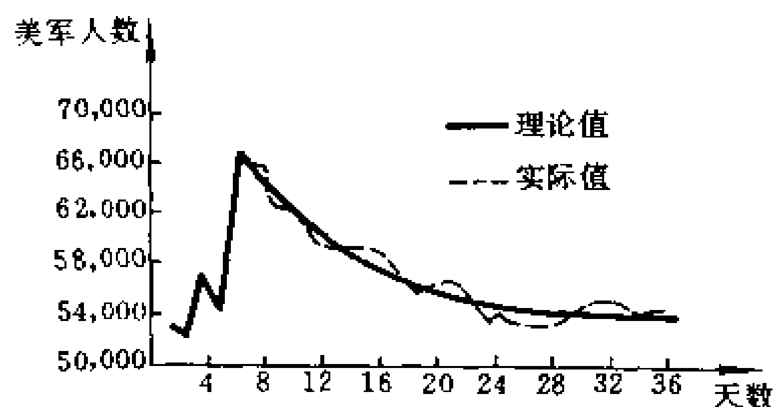


图 5－9　美军兵力实际数据与理论结果的比较

5.4 药物在体内的分布与排除

药物进入机体后，在随血液输运到各个器官和组织的过程中，不断地被吸收、分布、代谢，最终排出体外．药物在血液中的浓度，即单位体积血液（毫升）中药物含量（毫克或微克），称**血药浓度**，随时间和空间（机体的各部分）而变化．血药浓度的大小直接影响到药物的疗效，浓度太低不能达到预期的效果，浓度太高又可能导致药物中毒、副作用太强或造成浪费．因此研究药物在体内吸收、分布和排除的动态过程，及这些过程与药理反应间的定量关系，对于新药研制、剂量确定、给药方案设计等药理学和临床医学的发展都具有重要的指导意义和实用价值．这个学科分支称**药物动力学**．

建立**房室模型**（Compartment Models）是药物动力学研究上述动态过程的基本步骤之一．所谓房室是指机体的一部分，药物在一个房室内呈均匀分布，即血药浓度是常数，而在不同房室之间则按照一定规律进行药物的转移．一个机体分为几个房室，要看不同药物的吸收、分布、排除过程的具体情况，以及研究对象所要求的精度而定．本节只讨论二室模型，即将机体分为血液较丰富的**中心室**（包括心、肺、肾等器官）和血液较贫乏的**周边室**（如肌肉组织）．药物的动态过程在每个房室内是一致的，转移只在两个房室之间以及某个房室与体外之间进行．二室模型的建立和求解方法可以推广到多室模型．显然，将一个机体划分为若干房室是人们为了研究目的所做的简化．值得庆幸的是，这种简化在一定条件下已由临床试验证明是正确的，为医学界和药理学界所接受[54]．

模型假设　可以想到，对于二室模型我们将建立关于两个血药浓度的微分方程描述其动态特性．为了将问题进一步简化，得到线性常系数方程，作如下假设．

1. 机体分为中心室（Ⅰ室）和周边室（Ⅱ 室），两个室的容积（即血液体积或药物分布容积）在过程中保持不变.

2. 药物从一室向另一室的转移速率，及向体外的排除速率，与该室的血药浓度成正比.

3. 只有中心室与体外有药物交换，即药物从体外进入中心室，最后又从中心室排出体外. 与转移和排除的数量相比，药物的吸收可以忽略.

在这些假设下的一种二室模型示意图如图 5－10 所示. $c_i(t)$、$x_i(t)$和 V_i 分别表示第i室（$i=1,2$）的血药浓度、药量和容积，k_{12}和k_{21}是两室之间药物转移速率系数，k_{13}是药物从Ⅰ室向体外排除的速率系数. $f_0(t)$是给药速率，由给药方式和剂量确定（下面将详细讨论）. 这种一级速率系数 k_{ij} 为常数的房室模型称乳突状模型.

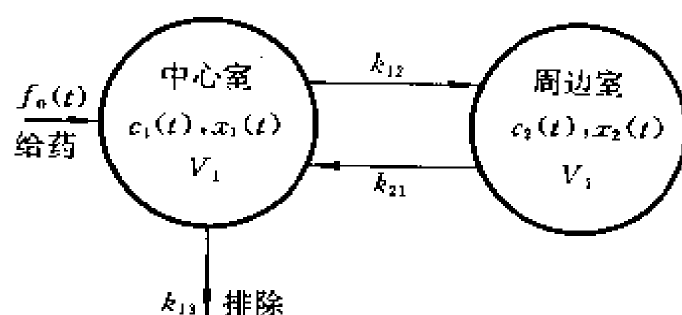


图 5－10 常用的一种二室模型

模型建立 根据假设条件和图 5－9 立即可以写出两个房室中药量 $x_1(t)$，$x_2(t)$满足的微分方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -k_{12}x_1 - k_{13}x_1 + k_{21}x_2 + f_0(t) \\ \dot{x}_2(t) = k_{12}x_1 - k_{21}x_2 \end{cases} \tag{1}$$

$x_i(t)$ 与血药浓度 $c_i(t)$、房室容积 V_i 之间显然有关系式

$$x_i(t) = V_i c_i(t), \quad i=1,2 \tag{2}$$

（2）代入（1）式可得

$$\begin{cases} \dot{c}_1(t) = -(k_{12}+k_{13})c_1 + \frac{V_2}{V_1}k_{21}c_2 + \frac{f_0(t)}{V_1} \end{cases}$$

$$\dot{c}_2(t) = \frac{V_1}{V_2} k_{12} c_1 - k_{21} c_2 \tag{3}$$

这是线性常系数非齐次方程，它的对应齐次方程的通解为(习题4)

$$\begin{cases} \overline{c_1}(t) = A_1 e^{-\alpha t} + B_1 e^{-\beta t} \\ \overline{c_2}(t) = A_2 e^{-\alpha t} + B_2 e^{-\beta t} \end{cases} \tag{4}$$

其中 α、β 由

$$\begin{cases} \alpha + \beta = k_{12} + k_{21} + k_{13} \\ \alpha\beta = k_{21} k_{13} \end{cases} \tag{5}$$

确定．为了求解方程(3)需要设定给药速率 $f_0(t)$ 和初始条件，我们考察下面几种常见的给药方式．

1．快速静脉注射

这种注射可简化为在 $t=0$ 的瞬时将剂量 D_0 的药物输入中心室，于是 $f_0(t)$ 和初始条件为

$$f_0(t) = 0\,,\ c_1(0) = \frac{D_0}{V_1}\,,\ c_2(0) = 0 \tag{6}$$

方程(3)在条件(6)下的解为

$$c_1(t) = Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t},\ A = \frac{D_0(k_{21} - \alpha)}{V_1(\beta - \alpha)}\,,\ B = \frac{D_0(\beta - k_{21})}{V_1(\beta - \alpha)} \tag{7}$$

$$c_2(t) = \frac{D_0 k_{12}}{V_2(\beta - \alpha)}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) \tag{8}$$

其中 α、β 由(5)确定．可以看出当 $t \to \infty$ 时 $c_1(t), c_2(t) \to 0$．

2．恒速静脉滴注

当静脉滴注的速率为 k_0 时，$f_0(t)$ 和初始条件为

$$f_0(t) = k_0\,,\ c_1(0) = 0\,,\ c_2(0) = 0 \tag{9}$$

方程(3)在条件(9)下的解可表示为

$$
\begin{cases}
c_1(t) = A_1 e^{-\alpha t} + B_1 e^{-\beta t} + \dfrac{k_0}{k_{13} V_1} \\
c_2(t) = A_2 e^{-\alpha t} + B_2 e^{-\beta t} + \dfrac{k_{12} k_0}{k_{21} k_{13} V_2} \\
A_2 = \dfrac{V_1 (k_{12} + k_{13} - \alpha)}{k_{21} V_2} A_1, \quad B_2 = \dfrac{V_1 (k_{12} + k_{13} - \beta)}{k_{21} V_2} B_1
\end{cases}
\tag{10}
$$

其中常数 A_1、B_1 由初始条件 $c_1(0) = c_2(0) = 0$ 确定.

当 t 充分大时 $c_1(t)$、$c_2(t)$将趋向于(10)式右端第 3 项表示的常值. 实际上, 若 $t = T$ 后停止滴注, 那么 $c_1(t)$、$c_2(t)$在 $t > T$ 以后将按指数规律衰减并趋于零.

3. 口服或肌肉注射

这种给药方式相当于在药物输入中心室之前先有一个将药物吸收入血液的过程, 可以简化为有一个吸收室, 如图 5-11. $x_0(t)$为吸收室的药量, 药物由吸收室进入中心室的转移速率系数为 k_{01}, 于是 $x_0(t)$满足

$$
\begin{cases}
\dot{x}_0(t) = -k_{01} x_0 \\
x_0(0) = D_0
\end{cases}
\tag{11}
$$

D_0 是给药量. 而药物进入中心室的速率为

$$
f_0(t) = k_{01} x_0(t) \tag{12}
$$

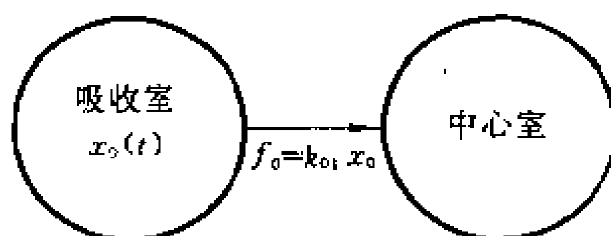


图 5-11 药物经吸收室进入中心室

将方程(11)的解代入(12)式得

$$
f_0(t) = D_0 k_{01} e^{-k_{01} t} \tag{13}
$$

在这种情况下方程(3)的解 $c_1(t)$的一般形式为

$$
c_1(t) = A e^{-\alpha t} + B e^{-\beta t} + E e^{-k_{01} t} \tag{14}
$$

(设 $k_{01} \neq \alpha, \beta$). 其中系数 A、B、E 由初始条件 $c_1(0) = c_2(0) = 0$ 确定.

从以上的讨论可以看出, 中心室的血药浓度 $c_1(t)$取决于转移速率系数 k_{12}、k_{21}、k_{13}, 房室容积 V_1、V_2 以及输入参数 D_0、k_0 等

因素，而房室模型的用途恰是通过对 $c_1(t)$的量测，确定对于药理学和临床医学最为重要的参数，如转移速率系数，特别是从中心室向体外排除的速率系数 k_{13}．显然这是微分方程的反问题．下面介绍在快速静脉注射给药方式下估计诸参数的方法．

参数估计 在 $t=0$ 瞬时快速注射剂量为 D_0 的药物以后，在一系列时刻 $t_i(i=1, 2, \cdots, n)$从中心室采取血样并获得血药浓度 $c_1(t_i)$，根据这些数据利用(7)，(5)式估计参数 k_{12}、k_{21}、k_{13} 的过程可分两步：先计算(7)式中的 α、β、A、B，再确定 k_{12}、k_{21}、k_{13}．

1．计算 α、β、A、B

不妨设 $\alpha<\beta$，于是当 t 充分大时(7)式近似为

$$c_1(t)=Ae^{-\alpha t} \tag{15}$$

或

$$\ln c_1(t)=\ln A-\alpha t \tag{16}$$

对于适当大的 t_i 和相应的 $c_1(t_i)$，用最小二乘法不难估计出 α、$\ln A$ 和 A．

然后计算

$$\tilde{c}_1(t)=c_1(t)-Ae^{-\alpha t} \tag{17}$$

再利用(7)式得

$$\ln \tilde{c}_1(t)=\ln B-\beta t \tag{18}$$

对于较小的 t_i 和由(17)式算出的 $\tilde{c}_1(t_i)$，仍用最小二乘法即可得到 β 和 B．

2．确定 k_{12}、k_{21}、k_{13}

因为 $t\rightarrow\infty$ 时 $c_1(t)$，$c_2(t)\rightarrow 0$，进入中心室的药物全部被排除，所以

$$D_0=k_{13}V_1\int_0^{\infty} c_1(t)\mathrm{d}t \tag{19}$$

将(7)代入(19)式可得

$$D_0 = k_{13} V_1 \left(\frac{A}{\alpha} + \frac{B}{\beta} \right) \tag{20}$$

又因为

$$c_1(0) = \frac{D_0}{V_1} = A + B \tag{21}$$

联合(20)、(21)式解出

$$k_{13} = \frac{\alpha\beta(A+B)}{\alpha B + \beta A} \tag{22}$$

再利用(5)式即可确定

$$k_{21} = \frac{\alpha\beta}{k_{13}} \tag{23}$$

$$k_{12} = \alpha + \beta - k_{13} - k_{21} \tag{24}$$

这就完成了根据中心室血药浓度的量测数据，估计转移和排除速率系数的过程．

评注 建立房室模型的目的是研究体内血药浓度的变化过程，确定诸如转移和排除速率系数等参数，为制订给药方案和剂量大小提供数量依据．建模过程是将机理分析和数据处理相结合，先由机理分析确定方程形式，再由量测数据估计参数．上面介绍的是常用的一种估计方法，实际工作中应该对多名病人进行量测和计算，以验证其正确性．

选用几个房室建模是一个重要问题，可以先选择一室模型(习题5)，其计算非常简单．不满意时再采用二室或多室模型，甚至非线性房室模型．常见的一种非线性模型(以一室为例)是 $\dot{c}_1(t) = -\dfrac{k_1 c_1}{k_2 + c_1}$，当 c_1 较小时它近似于线性模型，称为一级排除过程，而当 c_1 较大时 $\dot{c}_1(t)$ 近似于常数，称为零级排除过程，所以它表示了一种混合型的排除过程．

5.5 香烟过滤嘴的作用

尽管科学家们对于吸烟的危害提出了许多无可辩驳的证据，不少国家的政府和有关部门也一直致力于减少或禁止吸烟，但是仍有不少人不愿抛弃对香烟的嗜好．香烟制造商既要满足瘾君子的需要，又要顺应减少吸烟危害的潮流，还要获取丰厚的利润，于是普遍地在香烟上安装了过滤嘴．过滤嘴的作用倒底有多大，与使用的材料和过滤嘴的长度有什么关系，要从定量的角度回答这些问题就要建立一个描述吸烟过程的数学模型，分析人体吸入的毒物数量与哪些因素有关，以及它们之间的数量表达式[30]．

吸烟时毒物吸入人体的过程大致是这样的：毒物基本上均匀地分布在烟草中，吸烟时点燃处的烟草大部分化为烟雾，毒物由烟雾携带着一部分直接进入空气，另一部分沿香烟穿行．在穿行过程中又部分地被未点燃的烟草和过滤嘴吸收而沉积下来，剩下的进入人体．被烟草吸收而沉积下来的那一部分毒物，当香烟燃烧到那里的时候又通过烟雾部分进入空气，部分沿香烟穿行，这个过程一直继续到香烟燃烧至过滤嘴处为止．于是我们看到，原来分布在烟草中的毒物除了进入空气和被过滤嘴吸收的一部分外，剩下的全都被人体吸入．

实际的吸烟过程非常复杂并且因人而异．点燃处毒物随烟雾进入空气和沿香烟穿行的数量比例，与吸烟的方式、环境等多种因素有关；烟雾穿过香烟的速度随着吸烟动作的变化而不断地改变；过滤嘴和烟草对毒物的吸收作用也会随烟雾穿行速度等因素的影响而有所变化．如果要考虑类似于上面这些复杂情况，将使我们寸步难行．为了能建立一个初步的模型，可以设想一个机器人在典型的环境下吸烟，“他”吸烟的动作、方式及外部环境在整个过程中不变，于是可以认为毒物随烟雾进入空气和沿香烟穿行的数量比例、烟雾穿行的速度、过滤嘴和烟草对毒物的吸收率

等在吸烟过程中都是常数．

基于上述分析，这个模型的假设条件如下．

模型假设

1．烟草和过滤嘴的长度分别是 l_1 和 l_2，香烟总长 $l=l_1+l_2$，毒物 M（毫克）均匀分布在烟草中，密度为 $w_0=M/l_1$．

2．点燃处毒物随烟雾进入空气和沿香烟穿行的数量比例是 $a':a$，$a'+a=1$

3．未点燃的烟草和过滤嘴对随烟雾穿行的毒物的吸收率（单位时间内毒物被吸收的比例）分别是常数 b 和 β．

4．烟雾沿香烟穿行的速度是常数 v，香烟燃烧速度是常数 u，且 $v\gg u$

将一支烟吸完后毒物进入人体的总量（不考虑从空气的烟雾中吸入的）记作 Q，在建立模型以得到 Q 的数量表达式之前，让我们先根据常识分析一下 Q 应与哪些因素有关，采取什么办法可以降低 Q．

首先，提高过滤嘴吸收率 β，增加过滤嘴长度 l_2，减少烟草中毒物的初始含量 M，显然可以降低吸入毒物量 Q．其次，当毒物随烟雾沿香烟穿行的比例 a 和烟雾速度 v 减小时，预料 Q 也会降低．至于在假设条件中涉及的其他因素，如烟草对毒物的吸收率 b、烟草长度 l_1、香烟燃烧速度 u，对 Q 的影响就不容易估计了．

下面通过建模对这些定性分析和提出的问题作出定量的验证和回答．

模型建立　设 $t=0$ 时在 $x=0$ 处点燃香烟，坐标系如图 5－12 所示．

首先定义两个基本函数：

毒物流量 $q(x,t)$～ 时刻 t 单位时间内通过香烟截面 x 处 $(0\leqslant x\leqslant l)$ 的毒物量；

毒物密度 $w(x,t)$～ 时刻 t 截面 x 处单位长度烟草中的毒物

含量 $(0 \leqslant x \leqslant l_1)$．由假设 1，$w(x, 0) = w_0$．

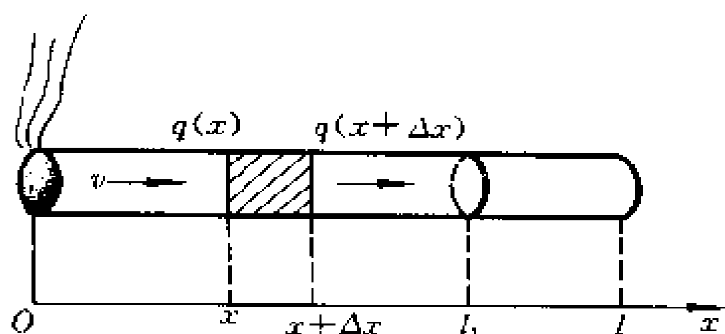


图 5－12　$x=0$ 处点燃的香烟

如果知道了流量函数 $q(x, t)$，吸入毒物量 Q 就是 $x=l$ 处的流量在吸一支烟时间内的总和．注意到关于烟草长度和香烟燃烧速度的假设，我们得到

$$Q = \int_0^T q(l, t)\mathrm{d}t, \ T = l_1/u \tag{1}$$

下面分 4 步计算 Q．

1．求 $t=0$ 瞬间由烟雾携带的毒物单位时间内通过 x 处的数量 $q(x, 0)$．由假设 4 中关于 $v \gg u$ 的假定，可以认为香烟点燃处 $x=0$ 静止不动．

为简单起见，记 $q(x, 0) = q(x)$，考察 $(x, x+\Delta x)$ 一段香烟(图 5－12)，毒物通过 x 和 $x+\Delta x$ 处的流量分别是 $q(x)$和 $q(x+\Delta x)$，根据守恒定律这两个流量之差应该等于这一段未点燃的烟草或过滤嘴对毒物的吸收量，于是由假设 2，4 有

$$q(x) - q(x+\Delta x) = \begin{cases} bq(x)\Delta\tau, & 0 \leqslant x \leqslant l_1, \\ \beta q(x)\Delta\tau, & l_1 \leqslant x \leqslant l, \end{cases} \quad \Delta\tau = \frac{\Delta x}{v}$$

其中 $\Delta\tau$ 是烟雾穿过 Δx 所需时间．令 $\Delta\tau \to 0$ 得到微分方程

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x} = \begin{cases} -\dfrac{b}{v} q(x), & 0 \leqslant x \leqslant l_1 \\ -\dfrac{\beta}{v} q(x), & l_1 \leqslant x \leqslant l \end{cases} \tag{2}$$

在 $x=0$ 处点燃的烟草单位时间内放出的毒物量记作 H_0，根据假设 1、3、4 可以写出方程 (2)的初始条件为

$$q(0)=aH_0,\ H_0=uw_0 \tag{3}$$

求解 (2)、(3)式时先解出 $q(x)\ (0\leqslant x\leqslant l_1)$，再利用 $q(x)$ 在 $x=l_1$ 处的连续性确定 $q(x)\ (l_1\leqslant x\leqslant l)$．其结果为

$$q(x)=\begin{cases} aH_0 e^{-\frac{bx}{v}}, & 0\leqslant x\leqslant l_1 \\ aH_0 e^{-\frac{bl_1}{v}} e^{-\frac{\beta(x-l_1)}{v}}, & l_1\leqslant x\leqslant l \end{cases} \tag{4}$$

2．在香烟燃烧过程的任意时刻 t，求毒物单位时间内通过 $x=l$ 的数量 $q(l,t)$．

因为在时刻 t 香烟燃至 $x=ut$ 处，记此时点燃的烟草单位时间放出的毒物量为 $H(t)$，则

$$H(t)=uw(ut,t) \tag{5}$$

根据与第 1 步完全相同的分析和计算可得

$$q(x,t)=\begin{cases} aH(t)e^{-\frac{b(x-ut)}{v}}, & ut\leqslant x\leqslant l_1 \\ aH(t)e^{-\frac{b(l_1-ut)}{v}} e^{-\frac{\beta(x-l_1)}{v}}, & l_1\leqslant x\leqslant l \end{cases} \tag{6}$$

实际上在 (4)式中将坐标原点平移至 $x=ut$ 处即可得到 (6)式．由 (5)、(6)式能够直接写出

$$q(l,t)=auw(ut,t)e^{-\frac{b(l_1-ut)}{v}} e^{-\frac{\beta l_2}{v}} \tag{7}$$

3．确定 $w(ut,t)$．

因为在吸烟过程中未点燃的烟草不断地吸收烟雾中的毒物，所以毒物在烟草中的密度 $w(x,t)$ 由初始值 w_0 逐渐增加．考察烟草截面 x 处 Δt 时间内毒物密度的增量 $w(x,t+\Delta t)-w(x,t)$，根据守恒定律它应该等于单位长度烟雾中的毒物被吸收的部分，按照假设 2、4 有

$$w(x, t+\Delta t)-w(x, t)=b\frac{q(x, t)}{v}\Delta t$$

令 $\Delta t\to 0$ 并将(5)、(6)式代入得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}=\dfrac{b}{v}auw(ut, t)e^{-\frac{b(x-ut)}{v}} \\ w(x, 0)=w_0\end{cases} \tag{8}$$

方程(8)的解为*)

---

*) 方程(8)的求解步骤如下．对(8)式积分可得

$$w(x, t)=w_0+\frac{bau}{v}e^{-\frac{bx}{v}}\int_0^t w(ut, t)e^{\frac{but}{v}}\mathrm{d}t$$

以 $x=ut$ 代入并两端乘以 $e^{\frac{but}{v}}$ 得

$$w(ut, t)e^{\frac{but}{v}}=w_0e^{\frac{but}{v}}+\frac{bau}{v}\int_0^t w(ut, t)e^{\frac{but}{v}}\mathrm{d}t$$

记 $w(ut, t)e^{\frac{but}{v}}=f(t)$，则上式为

$$f(t)=w_0e^{\frac{but}{v}}+\frac{bau}{v}\int_0^t f(t)\mathrm{d}t$$

对 t 求导并注意到 $t=0$ 时 $f(0)=w_0$，得到关于 $f(t)$ 的微分方程

$$\begin{cases}f'(t)-\dfrac{bau}{v}f(t)=\dfrac{buw_0}{v}e^{\frac{but}{v}} \\ f(0)=w_0\end{cases}$$

其解为

$$f(t)=\frac{w_0}{1-a}e^{\frac{but}{v}}\left(1-ae^{-\frac{(1-a)but}{v}}\right)$$

将 $f(t)$ 代回原来的 $w(ut, t)$ 并注意到 $a'=1-a$，得到

$$w(ut, t)=\frac{w_0}{a'}\left(1-ae^{-\frac{a'but}{v}}\right)$$

$$w(ut,t)=\frac{w_0}{a'}\left(1-ae^{-\frac{a'but}{v}}\right) \tag{9}$$

其中 $a'=1-a$（假设2）.

4. 计算 Q.

将(9)代入(7)式得

$$q(l,t)=\frac{auw_0}{a'}e^{-\frac{bl_1}{v}}e^{-\frac{\beta l_2}{v}}\left(e^{-\frac{but}{v}}-ae^{-\frac{a'but}{v}}\right) \tag{10}$$

最后将(10)代入(1)式作积分得到

$$Q=\int_0^{l_1/u}q(l,t)\mathrm{d}t=\frac{aw_0v}{a'b}e^{-\frac{\beta l_2}{v}}\left(1-e^{-\frac{a'bl_1}{v}}\right) \tag{11}$$

为便于下面的分析将上式化作

$$Q=aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}}\cdot\frac{1-e^{-\frac{a'bl_1}{v}}}{\frac{a'bl_1}{v}} \tag{12}$$

记

$$r=\frac{a'bl_1}{v},\quad \varphi(r)=\frac{1-e^{-r}}{r} \tag{13}$$

则(12)式可写作

$$Q=aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}}\varphi(r) \tag{14}$$

(13)、(14)式是我们得到的最终结果，表示了吸入毒物量 Q 与 a、M、β、l_2、v、b、l_1 等诸因素之间的数量关系.

结果分析

1. Q 与烟草含毒物量 M、毒物随烟雾沿香烟穿行比例 a 成正

比*）．设想将毒物 M 集中在 $x=l$ 处，则吸入量为 aM .

2．因子 $e^{-\frac{\beta l_2}{v}}$ 体现了过滤嘴减少毒物进入人体的作用，提高过滤嘴吸收率 β 和增加长度 l_2 能够对 Q 起到负指数衰减的效果，并且 β 和 l_2 在数量上增加一定比例时起的作用相同．降低烟雾穿行速度 v 也可减少 Q．设想将毒物 M 集中在 $x=l_1$ 处，利用上述建模方法不难证明，吸入毒物量为 $aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}}$.

3．因子 $\varphi(r)$ 表示的是由于未点燃烟草对毒物的吸收而起到的减少 Q 的作用．虽然被吸收的毒物还要被点燃，随烟雾沿香烟穿行而部分地进入人体，但是因为烟草中毒物密度 $w(x,t)$ 越来越高，所以按照固定比例跑到空气中的毒物增多，相应地减少了进入人体的毒物量．

根据实际资料 $r=\frac{a'bl_1}{v}\ll 1$，在 (13)式 $\varphi(r)$ 中的 e^{-r} 取台劳展开的前 3 项可得 $\varphi(r)\doteq 1-\frac{r}{2}$，于是 (14)式为

$$Q\doteq aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}}\left(1-\frac{a'bl_1}{2v}\right) \tag{15}$$

这样，虽然提高烟草吸收率 b 和增加长度 l_1（毒物量 M 不变）也能减少 Q，但与 β 和 l_2 的负指数衰减作用相比，增加 b 和 l_1 的效果要小得多．

4．为了更清楚地了解过滤嘴的作用，不妨比较两支香烟，一支是上述模型讨论的，另一支长度为 l，不带过滤嘴，参数 w_0、b、a、v 与第一支相同，并且吸到 $x=l_1$ 处就扔掉．

吸第一支和第二支烟进入人体的毒物量分别记作 Q_1 和 Q_2，Q_1 当然可由 (11)式给出，Q_2 也不必重新计算，只需把第二支烟

---

*）这里忽略 $\varphi(r)$ 中的 $a'(=1-a)$，因为 $\varphi(r)$ 起的作用较小，见结果分析 3．

设想成吸收率为 b（与烟草相同）的假过滤嘴香烟就行了，这样由(11)式可以直接写出

$$Q_2=\frac{aw_0v}{a'b}e^{-\frac{bl_2}{v}}\left(1-e^{-\frac{a'bl_1}{v}}\right) \tag{16}$$

与(11)式给出的 Q_1 相比，我们得到

$$\frac{Q_1}{Q_2}=e^{-\frac{(\beta-b)l_2}{v}} \tag{17}$$

所以只要 $\beta>b$ 就有 $Q_1<Q_2$，过滤嘴是起作用的．并且，提高吸收率之差 $\beta-b$ 与加长过滤嘴长度 l_2，对于降低比例 Q_1/Q_2 的效果相同．不过提高 β 需要研制新材料，将更困难一些．

评注 这个模型在基本合理的简化假设下，运用精确的数学工具解决了一个粗看起来不易下手的实际问题．从提出假设，引入两个基本函数 $q(x,t)$ 和 $w(x,t)$，到运用物理学上常用的守恒定律建立微分方程，从而构造出动态模型，最后到对结果的分析，整个过程可以说是用建模方法解决实际问题的一个范例．

5.6 水电站调压塔的功能

水电站要把贮存在水库的水经过距离长达数百米的管道引到水轮发电机，在输送水流过程中会遇到严重的“水击作用”致使管道破裂，这种现象的简单原理如下．

在水电、火电综合供电网中水电站通常起着调节用电负荷突然变化的作用．当负荷需求突然上升时要立即增加输送的水量，以增加发电量；当需求下降时又要使水流很快慢下来，减少发电量．于是输送管的水流速度常会出现突然的变化．又由于水基本上是不可压缩的，管道本身的弹性又很微小，致使水的高压波沿管道传播，工程上称为“水击作用”，它可能破坏管道．

缓解这种作用的一个办法是使输送管中的水流进入水轮机前先注入一个称为“调压塔”的贮水箱(图5-13).当负荷需求较低,水轮机需要的水量较少时,调压塔贮存下大量的水,水位较高.当负荷需求突然变大时就可以用塔中的水来满足水轮机对水量需求的增加,避免输送管道中水流速度发生突然的大变化.

本节要建立一个模型,研究当调压塔出口水流速度(即水轮机进口水流速度)变化时,调压塔的水位如何改变,并分析水位变化过程与各个参数之间的关系[27].

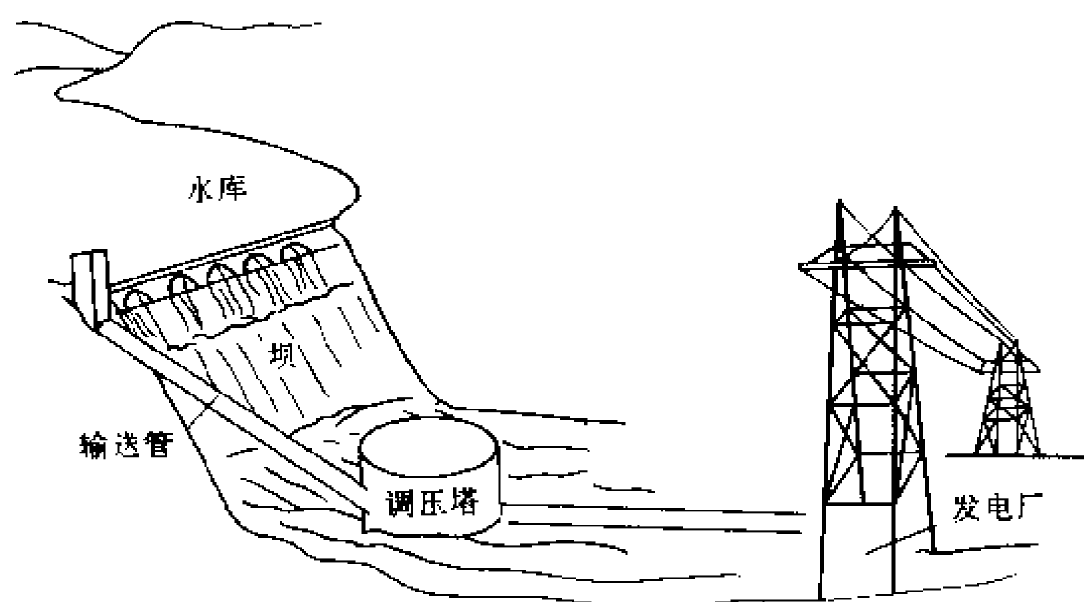


图5-13　水库-调压塔-水电站示意图

模型假设　输水管、调压塔部分的示意图如图5-14.输水管长 L,截面积 s_1,与地面(水平面)夹角 θ,水流速度 $u(t)$,两端压强分别为 p_1 和 $p_2(t)$.调压塔水位 $h(t)$,截面积 s_0,顶部大气压 p_0,出口水流速度 $v(t)$,出口管截面积 s_2,水的密度记为 ρ(以上各量除已标明是时间 t 的函数者以外,都是常数).还需作如下假设.

1.水库水位不变,所以输水管始端压强 p_1 是常数.

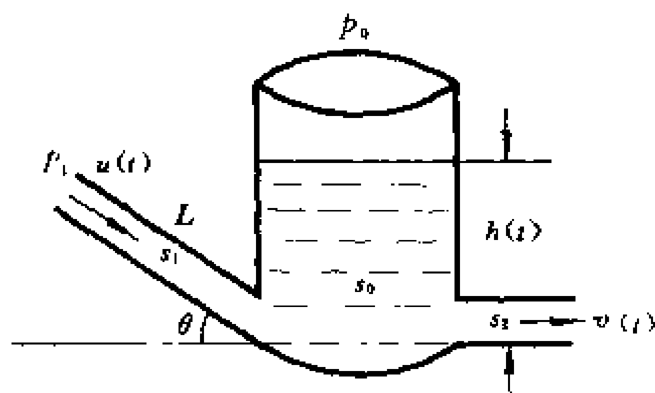


图 5－14　输水管－调压塔示意图

2．水与输水管均无弹性；单位长度管壁对水流的阻力与水流速度的平方成正比，比例常数 c 称粘滞系数．

模型建立　利用力学定律建立几个方程．

1．输水管水流的运动学方程．

作用在水流运动方向的力有：输水管两端压强差形成的压力 $s_1(p_1-p_2)$，水柱本身的重力 $\rho Ls_1g\sin\theta$，管壁对水流的阻力 cLu^2．按照牛顿第二定律可以写出

$$\rho Ls_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=s_1(p_1-p_2)+\rho Ls_1g\sin\theta-cLu^2 \tag{1}$$

2．调压塔的静力学方程．

因为调压塔进水口在塔底部，塔内水柱的重力 ρs_0hg 形成底部与顶部压力之差 $s_1p_2-s_0p_1$，于是静力学方程为

$$s_1p_2-s_0p_1=\rho s_0hg \tag{2}$$

3．调压塔流量平衡方程．

根据守恒定律，调压塔进出水量之差等于塔内水量的变化，即有

$$\rho[s_1u(t)-s_2v(t)]=\rho s_0\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \tag{3}$$

为了研究当调压塔出口水流速度 $v(t)$ 改变时，塔内水位 $h(t)$ 的变化规律，从 (1)～(3) 式中消去 p_2 和 $u(t)$，可得

$$\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2}+\frac{cs_0}{\rho s_1^2}\left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{2cs_2}{\rho s_1^2}v\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}+\frac{gs_1}{Ls_0}h(t)$$

$$=\left(\frac{s_1(p_1-p_0)}{\rho Ls_0}+\frac{s_1g\sin\theta}{s_0}\right)-\frac{s_2}{s_0}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}-\frac{cs_2^2}{\rho s_0s_1^2}v^2 \quad (4)$$

这个非线性方程难以求解，也不便分析．下面转向讨论 $v(t)$ 在稳定状态 v_0 附近有微小变化时，$h(t)$ 在稳定状态 h_0 附近的变化．

首先，在(4)式中令 $h(t)=h_0$(常数)和 $v(t)=v_0$(常数)，得到

$$h_0=\frac{p_1-p_0}{\rho g}+L\sin\theta-\frac{cLs_2^2}{\rho gs_0s_1^3}v_0^2 \quad (5)$$

再设

$$v(t)=v_0+\varepsilon v_1(t),\ h(t)=h_0+\varepsilon h_1(t) \quad (6)$$

其中 ε 很小．将(6)代入(4)式并略去含 ε 及 ε^2 的项可得

$$\frac{\mathrm{d}^2h_1}{\mathrm{d}t^2}+\frac{2cs_2v_0}{\rho s_1^2}\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t}+\frac{gs_1}{Ls_0}h_1(t)=-\frac{s_2}{s_1}\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}-\frac{2cs_2^2v_0}{\rho s_0s_1^2}v_1(t) \quad (7)$$

或记作

$$\ddot{h}_1+\beta\dot{h}_1+kh_1=-\alpha\dot{v}_1-\gamma v_1 \quad (8)$$

$$\beta=\frac{2cs_2v_0}{\rho s_1^2},\quad k=\frac{gs_1}{Ls_0},\quad \alpha=\frac{s_2}{s_1},\quad \gamma=\frac{2cs_2^2v_0}{\rho s_0s_1^2} \quad (9)$$

方程(8)的初始条件可设为

$$h_1(0)=\dot{h}_1(0)=0 \quad (10)$$

对于给定的各种形式的 $v_1(t)$，(8)～(10)式很容易求解．不过这里我们只讨论(8)式对应的齐次方程的通解，显然这个解为

$$\overline{h_1}(t)=a_0e^{-\frac{\beta t}{2}}\cos(\omega t+\varphi_0),\ \omega=\sqrt{k-\frac{\beta^2}{4}} \quad (11)$$

其中 a_0、φ_0 是任意常数．当 $k>\beta^2/4$ 时 $\overline{h_1}(t)$ 呈现振荡，由(9)式振荡的条件可表为

$$\rho^2 g s_1^5 > c^2 L s_0 s_2^2 v_0^2 \tag{12}$$

实际工程中 L、s_0、s_1、s_2 等参数受到各种条件的限制，粘滞系数 c 很小，β 不大，在条件(12)下形成衰减很慢的振荡．又因为 $s_0 \gg s_1$，L 较大，故 k 很小，ω 很小，振荡周期较长，这是不希望的．这个问题可以通过在调压塔中安装升降器(细的、带一些孔的竖直管子)来解决．

非齐次方程(8)～(10)的解由 $\overline{h_1}(t)$ 和 $v_1(t)$ 决定(习题 8)，所以上面对参数的分析仍然能够用来讨论 $h_1(t)$，在工程允许的条件下适当调节这些参数，可以尽可能地实现预期的效果．

评注 这是一个直接利用简单的物理定律描述工程问题的模型．可以看出，即使作了简化假设，得到的方程(4)仍很复杂，直接研究这个方程超出了本书的范围．本节讨论了它的一个特殊情况——稳态附近的解，这对于实际问题也是有意义的．

5.7 人口的预测和控制(一)

人口问题是当今世界上最令人关注的问题之一．一些发展中国家的人口出生率过高，越来越严重地威胁着人类的正常生活，有些发达国家的自然增长率趋近于零，甚至变负，造成劳动力短缺，也是不容忽视的问题．对于我国来说，在集中精力搞好经济建设，努力提高生产力的同时，能否有效地控制人口的增长，已成为本世纪末、下世纪初直到下世纪中叶使我国按人均国民经济生产总值达到小康水平，进而跻身中等发达国家行列的关键．由于我国五六十年代人口政策方面的失误，不仅造成人口总数增长过快，而且年龄结构也不合理，使得对人口增长的严格控制会导致人口老化问题严重．因此在首先保证人口有限增长的前提下适当控制人口老化，把年龄结构调整到合适的水平，是一项长期而又

艰巨的任务．

建立数学模型对人口发展过程进行描述、分析和预测，并进而研究控制人口增长和老化的生育策略，已引起有关专家、官员和社会各方面的极大关注和兴趣，是数学在社会发展中的重要应用领域．近年来我国一些从事自然科学，主要是控制论研究的专家，从我国人口的现状出发，结合当前的人口政策，在人口预测和控制方面做了许多工作．本书介绍的人口模型包含了他们部分的（也是基本的）成果[41]．

在 1.4 节我们讨论过人口的指数增长模型和阻滞增长模型（Logistic 模型），这些模型只考虑人口总数和总的增长率，不涉及年龄结构．事实上，在人口预测中人口按年龄分布状况是十分重要的，因为不同年龄人的生育率和死亡率有着很大的差别．两个国家或地区目前人口总数一样，如果一个国家或地区年青人的比例高于另一国家或地区，那么二者人口的发展状况将大不一样．本节讨论的模型要考虑人口按年龄的分布，即除了时间变量外，年龄是另一个自变量．

下面的模型属于连续型，用偏微分方程描述，其特点是便于理论分析，与这个模型相对应的用于实际计算的离散模型，将在 8.4 节介绍．

人口发展方程 使人口数量和结构变化的因素不外乎出生、死亡和迁移．为简化起见只考虑自然的出生与死亡，不计迁移等社会因素的影响．

在时刻 t，年龄小于 r 的人口记作 $F(r, t)$，t 和 r 均为连续变量，设 F 是连续、可微函数，称**人口分布函数**．时刻 t 的人口总数记作 $N(t)$，最高年龄记作 r_m*)．于是对于非负非降函数 $F(r, t)$有

$$F(0, t) = 0, F(r_m, t) = N(t) \tag{1}$$

定义

*) 理论推导时设 $r_m \to \infty$．

$$p(r,t)=\frac{\partial F}{\partial r}, \quad 0\leqslant r\leqslant r_m \tag{2}$$

称年龄密度函数．$p(r,t)\mathrm{d}r$ 表示时刻 t 年龄在区间 $[r,r+\mathrm{d}r)$ 内的人数．$p(r,t)$非负且

$$p(r_m,t)=0 \tag{3}$$

记 $\mu(r,t)$为时刻 t 年龄 r 的人的**死亡率**，其含义是，$\mu(r,t)p(r,t)\mathrm{d}r$ 表示时刻 t 年龄在 $[r,r+\mathrm{d}r)$内单位时间死亡的人数．

为了得到 $p(r,t)$满足的方程，考察时刻 t 年龄在 $[r,r+\mathrm{d}r)$ 内的人到时刻 $t+\mathrm{d}t$ 的情况．他们中活着的那一部分人的年龄变为 $[r+\mathrm{d}r_1, r+\mathrm{d}r+\mathrm{d}r_1)$，这里 $\mathrm{d}r_1=\mathrm{d}t$．而在 $\mathrm{d}t$ 这段时间内死亡的人数为 $\mu(r,t)p(r,t)\mathrm{d}r\mathrm{d}t$．于是

$$p(r,t)\mathrm{d}r-p(r+\mathrm{d}r_1,t+\mathrm{d}t)\mathrm{d}r=\mu(r,t)p(r,t)\mathrm{d}r\mathrm{d}t$$

上式可写作

$$[p(r+\mathrm{d}r_1,t+\mathrm{d}t)-p(r,t+\mathrm{d}t)]+[p(r,t+\mathrm{d}t)-p(r,t)]\mathrm{d}r\mathrm{d}t$$
$$=-\mu(r,t)p(r,t)\mathrm{d}r\mathrm{d}t$$

注意到 $\mathrm{d}r_1=\mathrm{d}t$ 就可得到

$$\frac{\partial p}{\partial r}-\frac{\partial p}{\partial t}=-\mu(r,t)p(r,t) \tag{4}$$

这是年龄密度函数 $p(r,t)$的一阶偏微分方程，其中死亡率 $\mu(r,t)$为已知函数．

方程(4)有两个定解条件：初始密度函数记作 $p(r,0)=p_0(r)$；单位时间出生的婴儿数记作 $p(0,t)=f(t)$，**称婴儿出生率**．$p_0(r)$可由人口调查资料得到，是已知函数；$f(t)$则对预测和控制人口起着重要作用，后面将对它进一步分析．将方程(4)、(3)及定解条件写作

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial r}+\dfrac{\partial p}{\partial t}=-\mu(r,t)p(r,t), \ t\geqslant 0, \ 0\leqslant r\leqslant r_m \\ p(r,0)=p_0(r) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(0,t)=f(t) \\ p(r_m,t)=0 \end{cases} \tag{5}$$

这个连续型人口发展方程描述了人口的演变过程，从这个方程确定出密度函数 $p(r,t)$ 以后，立即可以得到各个年龄的人口数，即人口分布函数

$$F(r,t)=\int_0^r p(s,t)\mathrm{d}s \tag{6}$$

方程(5)的求解过程比较复杂，这里只给出一种特殊情况下的结果．在社会安定的局面下和不太长的时间内，死亡率大致与时间无关，于是可近似地假设 $\mu(r,t)=\mu(r)$．这时(5)式的解为

$$p(r,t)=\begin{cases} p_0(r-t)\,e^{-\int_{r-t}^{r}\mu(s)\mathrm{d}s}, & 0\leqslant t\leqslant r \\ f(t-r)\,e^{-\int_0^r \mu(s)\mathrm{d}s}, & t>r \end{cases} \tag{7}$$

读者可以验证(7)式满足方程(5)．这个解在 $t\sim r$ 平面上有一个浅显的解释：图 5－15 中对角线 $r=t$ 将 $t\sim r$ 平面 $(t,r\geqslant 0)$ 分为两部分，在 $t<r$ 区域，$p(r,t)$ 完全由年龄为 $r-t$ 的人口初始密度 $p_0(r-t)$ 和这些人的死亡率 $\mu(s)$ $(r-t\leqslant s<t)$ 决定；而在 $t>r$ 区域，$p(r,t)$ 则由未来的生育状况 $f(t-r)$ 及死亡率 $\mu(s)$ $(0\leqslant s<r)$ 决定．

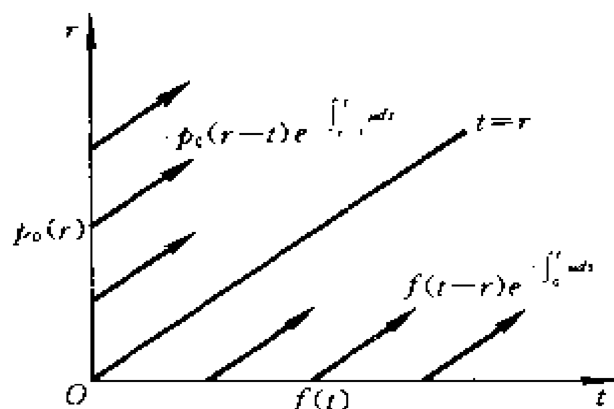


图 5－15　$t\sim r$ 平面上的 $p(r,t)$

生育率和生育模式　在方程(5)或解(7)中 $p_0(r)$ 和 $\mu(r)$ 可从人口统计数据得到，$\mu(r,t)$ 也可由 $\mu(r,0)$ 粗略估计．这样，为了预测和控制人口的发展状况，人们主要关注和可以用作控制手段的就是婴儿出生率 $f(t)$ 了．下面对 $f(t)$ 作进一步分解．

记女性性别比函数为 $k(r,t)$，即时刻 t 年龄在 $[r, r+dr)$ 的女性人数为 $k(r,t)p(r,t)dr$，将这些女性在单位时间内平均每人的生育数记作 $b(r,t)$，设育龄区间为 $[r_1, r_2]$，则

$$f(t)=\int_{r_1}^{r_2} b(r,t)k(r,t)p(r,t)\,dr \tag{8}$$

再将 $b(r,t)$ 定义为

$$b(r,t)=\beta(t)h(r,t) \tag{9}$$

其中 $h(r,t)$ 满足

$$\int_{r_1}^{r_2} h(r,t)dr=1 \tag{10}$$

于是

$$\beta(t)=\int_{r_1}^{r_2} b(r,t)dr \tag{11}$$

$$f(t)=\beta(t)\int_{r_1}^{r_2} h(r,t)k(r,t)p(r,t)dr \tag{12}$$

由(11)式可以看出，$\beta(t)$ 的直接含义是时刻 t 单位时间内平均每个育龄女性的生育数．如果所有育龄女性在她育龄期所及的时刻都保持这个生育数，那么 $\beta(t)$ 也表示平均每个女性一生的总和生育数，所以 $\beta(t)$ 称为**总和生育率**（简称生育率）或生育胎次．从(9)、(10)两式及 $b(r,t)$ 的含义可以看出，$h(r,t)$ 是年龄为 r 女性的生育加权因子，称**生育模式**．在稳定环境下可以近似地认为它与 t 无关，即 $h(r,t)=h(r)$．$h(r)$ 表示了在哪些年龄生育率高，哪些年龄生育率低．图 5－16 给出了 $h(r)$ 的示意图，表明 $r=r_c$ 附近生育率最高．由人口统计资料可以知道当前实际的 $h(r,t)$．作理论分析时人们常采用的 $h(r)$ 的一种形式是借用概

率论中的 Γ 分布

$$h(r)=\frac{(r-r_1)^{\alpha-1}e^{-\frac{r-r_1}{\theta}}}{\theta^{\alpha}\Gamma(\alpha)},\quad r>r_1 \tag{13}$$

并取 $\theta=2$，$\alpha=n/2$，这时有

$$r_c=r_1+n-2 \tag{14}$$

可以看出，提高 r_1 意味着晚婚，而增加 n 意味着晚育。

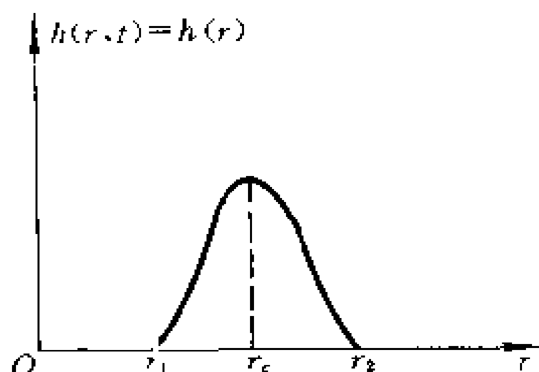


图 5-16 生育模式 $h(r)$示意图

这样，人口发展方程(5)和单位时间出生的婴儿数 $f(t)$ 的表达式(12)，构成了我们的连续型人口模型。模型中死亡率函数 $\mu(r,t)$、性别比函数 $k(r,t)$和初始密度函数 $p_0(r)$ 可以由人口统计资料直接得到，或在资料的基础上估计，而生育率 $\beta(t)$和生育模式 $h(r,t)$则是可以用于控制人口发展过程的两种手段。$\beta(t)$可以控制生育的多少，$h(r,t)$可以控制生育的早晚和疏密。我国的计划生育政策正是通过这两种手段实施的（习题 9）。

从控制论观点看，在方程(5)描述的人口系统中 $p(r,t)$ 可视为状态变量，$p(0,t)=f(t)$ 视为控制变量，是分布参数系统的边界控制函数。(12)式表明控制输入中含有状态变量，形成状态反馈，$\beta(t)$ 视为反馈增益。并且这是一种正反馈，即人口密度函数 $p(r,t)$ 的增加，通过婴儿出生率 $f(t)$ 又使 $p(r,t)$ 进一步增大。方程的解(7)式中因子 $f(t-r)$ 表明这种反馈还有相当大的滞后作用，所以一旦人口政策失误，使 $p(r,t)$ 在一段时间内增长得过多过快，再想通过控制手段 $\beta(t)$ 和 $h(r,t)$ 把人口增长的势头降下来，就很困难并且常常需要相当长（几代人）的时间。

人口指数 在上面的模型中密度函数 $p(r,t)$ 或分布函数

$F(r,t)$固然是人口发展过程最完整的描述，但是使用起来并不方便．在人口统计学中常用一些所谓人口指数来简明扼要地表示一个国家或地区的人口特征．下面是一些人口指数的定义及它们与$p(r,t)$等数量之间的关系．

1．**人口总数** $N(t)$

$$N(t)=\int_0^{r_m} p(r,t)\,\mathrm{d}r \tag{15}$$

2．**平均年龄** $R(t)$

$$R(t)=\frac{1}{N(t)}\int_0^{r_m} r\,p(r,t)\mathrm{d}r \tag{16}$$

3．**平均寿命** $S(t)$　它表示时刻t出生的人不论活到什么时候，死亡率都按时刻t的$\mu(r,t)$计算，这些人的平均存活时间．

$$S(t)=\int_t^{\infty} e^{-\int_0^{\tau-t}\mu(r,t)\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}\tau \tag{17}$$

$S(t)$实际上是预估寿命．通常说目前平均寿命已达到多少岁，是指今年出生婴儿的预估寿命，即$S(0)$．根据统计资料得到当前的死亡率$\mu(r,0)$后就可以算出$S(0)$．

4．**老龄化指数** $\omega(t)$　它定义为

$$\omega(t)=\frac{R(t)}{S(t)} \tag{18}$$

显然，平均年龄$R(t)$越大，$\omega(t)$越大；对于$R(t)$相同的两个国家或地区，平均寿命$S(t)$大的，表示健康水平高，一个人能工作的时间在一生中占的比例大，于是老龄化指数$\omega(t)$较小．

鉴于我国目前人口的年龄结构状况，在控制生育率、降低人口增长速度的同时，需适当考虑不要使老龄化指数变得过高．

5．**依赖性指数** $\rho(t)$

$$\rho(t)=\frac{N(t)-L(t)}{L(t)} \tag{19}$$

$$L(t)=\int_{l_1}^{l_2}[1-k(r,t)]p(r,t)\mathrm{d}r+\int_{l_1'}^{l_2'}k(r,t)p(r,t)\mathrm{d}r \tag{20}$$

其中 $[l_1, l_2]$ 和 $[l_1', l_2']$ 分别是男性和女性有劳动能力的年龄区间，$L(t)$是全体人口中有劳动能力的人数，所以依赖性指数 $\rho(t)$ 表示平均每个劳动者要供养的人数．

5.8 红绿灯下的交通流

各种类型的汽车一辆接着一辆沿公路飞驶而过，其情景就像在湍急的江河中奔腾的水流一样．在这种情况下人们不去分析每辆汽车的运动规律，而是把车队看作连续的流体，称为**交通流**或车流．研究每一时刻通过公路上每一点的交通流的流量、速度和密度等变量间的关系，特别是在出现譬如红绿灯改变、交通事故等干扰的情况下交通流的变化过程．本节首先引入几个描述交通流的基本函数，接着在交通流连续运动和发生间断的情况下，分别建立交通流的基本方程，最后讨论在红灯和绿灯相继出现时交通流的变化过程．实际上，红绿灯可以看作交通事故发生和排除的模拟[17、27]．

交通流的基本函数　研究对象是在无穷长公路上沿单向运动的一条车流．假定不允许超车，公路上也没有岔路，即汽车不会从其它通道进入公路或从公路驶出．

在公路上选定一个坐标原点，记作 $x=0$．以车流运动方向作为 x 轴的正向，于是公路上任一点用坐标 x 表示．对于每一时刻 t 和每一点 x，引入 3 个基本函数：

流量 $q(x,t)$～时刻 t 单位时间内通过点 x 的车辆数；

密度 $\rho(x,t)$～时刻 t 点 x 处单位长度内的车辆数；

速度 $u(x,t)$～时刻 t 通过点 x 的车流速度．

将交通流视为一维流体场，这些函数完全可以类比作流体的流量、密度和速度．注意这里速度 $u(x,t)$ 不表示固定的哪一辆汽车的速度．

3 个基本函数之间存在着密切关系．首先可以知道，单位时间内通过的车辆数等于单位长度内的车辆数与车流速度的乘积，即

$$q(x,t)=u(x,t)\rho(x,t) \tag{1}$$

其次，经验告诉我们，车流速度 u 总是随着车流密度 ρ 的增加而减小的．当一辆汽车前面没有车辆时，它将以最大速度行驶，可描述为 $\rho=0$ 时 $u=u_m$(最大值)；当车队首尾相接造成堵塞时，车辆无法前进，可记为 $\rho=\rho_m$(最大值)时 $u=0$．显然在这两种极端情况下的车流量 $q=0$．进一步观察可以发现，当 ρ 较小时随着 ρ 的增加 q 也会增长；但当 ρ 较大时，q 将随着 ρ 的增加而减小．设 $\rho=\rho^*$ 时 q 达到最大值 q_m．综上分析，流量 q 与密度 ρ 之间的关系可表为图 5－17 的形式．在交通流模型中这个关系常用如下的二次函数表述*)．

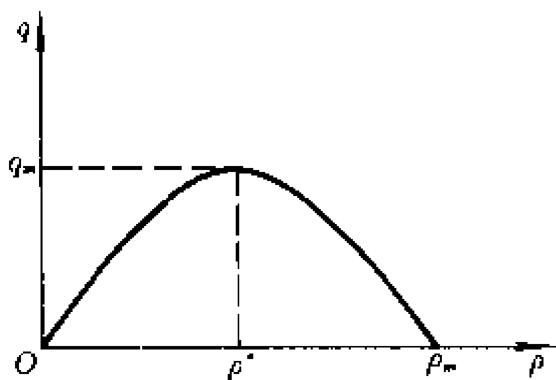


图 5－17　流量 q 与密度 ρ 的关系

$$q=u_m\rho\left(1-\frac{\rho}{\rho_m}\right) \tag{2}$$

注意到(1)式，又有

$$u=u_m\left(1-\frac{\rho}{\rho_m}\right) \tag{3}$$

*）在6.1 节我们将用机理分析方法得到这个关系．

显然，q 的极大值点 $\rho_* = \rho_m/2$.

应该指出，(2)、(3)式是在平衡状态下 ρ、u 和 q 之间的关系，即假定所有车辆的速度相同，公路上各处的车流密度相同.

连续交通流方程 对于正常运动的交通流，可以假定流量 $q(x,t)$、密度 $\rho(x,t)$和速度 $u(x,t)$都是 x 和 t 的连续、可微函数，并满足解析运算所需要的性质. 下面根据守恒原理推导这些函数满足的方程*).

考察 x 的任意区间 $[a,b]$ 和任意时刻 t，单位时间内通过 a、b 点的流量分别为 $q(a,t)$和 $q(b,t)$. 因为时刻 t 在区间 $[a,b]$ 内的车辆数为 $\int_a^b \rho(x,t)\mathrm{d}x$，其变化率为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b \rho(x,t)\mathrm{d}x$.

在公路没有岔路的假定下区间$[a,b]$ 内的车辆数守恒，于是

$$q(a,t)-q(b,t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b \rho(x,t)\mathrm{d}x \tag{4}$$

这是交通流方程的积分形式，它并不需要函数对 x 的连续性.

在关于 q 和 ρ 的解析性质的假定下，

$$q(a,t)-q(b,t)=-\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}q(x,t)\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b \rho(x,t)\mathrm{d}x=\int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t)\mathrm{d}x$$

所以(4)式化为

---

*) 为了便于后面间断交通流方程的推导，这里采用了积分形式. 实际上可以直接讨论它的微分形式(习题 10).

$$\int_a^b \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} \right) \mathrm{d}x = 0$$

由于区间 $[a, b]$ 是任意的，故

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

这就是连续交通流方程．当把 q 表示为 ρ 的已知函数 $q = q(\rho)$时（如(2)式），导数 $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\rho}$ 也是已知函数，记作 $\varphi(\rho)$，于是按照求导法则有

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \varphi(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

这样，方程(5)可以写成

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \varphi(\rho) \dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \varphi(\rho) = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\rho}, \quad t > 0, \ -\infty < x < \infty \\ \rho(x, 0) = f(x) \end{cases} \tag{6}$$

其中 $f(x)$是初始密度．方程(6)的解 $\rho(x, t)$描述了任意时刻公路上各处的车流分布状况，再由 $q(\rho)$即可得到流量函数 $q(x, t)$．

(6)式是一阶拟线性偏微分方程，可用特征方程和首次积分法求解*)．这里直接给出结果．

$$\rho(x(t), t) = f(x_0) \tag{7}$$

$$x(t) = \varphi(f(x_0))t + x_0, \quad x_0 = x(0) \tag{8}$$

容易验证(7)、(8)满足方程(6)．(7)式对 t 求导有

---

*) 解法详见有关著作，如王高雄等编《常微分方程》(第二版)，高等教育出版社，1983 年．

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{9}$$

(8)式对 t 求导得 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi(f(x_0))$，再将(7)式代入有 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi(\rho)$，这个结果代入(9)式就是方程(6)．至于(7)、(8)满足初始条件 $\rho(x, 0) = f(x)$ 则是显然的．

方程(6)的解(7)、(8)两式有着明显的几何意义，在 $x \sim t$ 平面上(8)式表示一族直线(图 5－18)，它与 x 轴交点坐标为 x_0，斜率为 $k = [\varphi(f(x_0))]^{-1}$（$t$ 对 x 的斜率），当函数 φ，f 给定后，k 随 x_0 改变．这族直线称方程的**特征线**．(7)式表明，沿每一条特征线 $x = x(t)$ 车流密度 $\rho(x, t)$ 是常数 $f(x_0)$，当然在不同特征线上 $\rho(x, t)$ 随着 x_0 不同而不同．

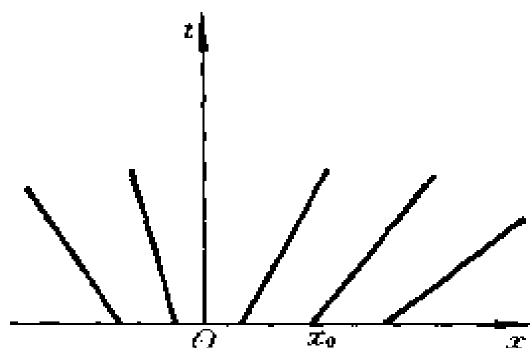


图 5－18　方程(6)的特征线

这样，从形式上看当流量函数 $q(\rho)$ 和初始密度 $f(x)$ 给定后，(7)、(8)就完全确定了方程(6)的解，但是下面将会看到，由于初始密度 $f(x)$ 的不同可以导致两种截然不同的结果．

设 $q(\rho)$ 如(2)式表出，则

$$\varphi(\rho) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\rho} = u_m\left(1 - \frac{2\rho}{\rho_m}\right) \tag{10}$$

$\varphi(\rho)$ 是减函数，当 $\rho = \rho^* = \rho_m/2$ 时 $\varphi(\rho^*) = 0$，对于 $\rho_1 < \rho^*$，$\varphi(\rho_1) > 0$，对于 $\rho_2 > \rho^*$，$\varphi(\rho_2) < 0$（图 5－19）．

如果初始密度 $f(x)$ 是 x 的减函数，如图 5－20(1)所示，即沿车辆行驶的 x 轴正向，前面的密度小，后面的密度大，则特征线的形状如图 5－20(2)．在密度为 ρ^* 的 x^* 点(即 $f(x^*) = \rho^*$)，

因为 $\varphi(f(x^*))=0$，从 x^* 出发的特征线的斜率 $k(x^*)=[\varphi(f(x^*))]^{-1}\to\infty$，所以这条特征线垂直于 x 轴．对于 $x_1>x^*$，$f(x_1)=\rho_1<\rho^*$，因为 $\varphi(\rho_1)>0$，$k(x_1)=[\varphi(\rho_1)]^{-1}>0$，所以从 x_1 出发的特征线的倾斜方向如图 5－20(2)所示；对于 $x_2<x^*$，$f(x_2)=\rho_2>\rho^*$，因为 $\varphi(\rho_2)<0$，$k(x_2)<0$，所以从 x_2 出发的特征线向相反方向倾斜．这种情况下(7)、(8)确是方程(6)的解．

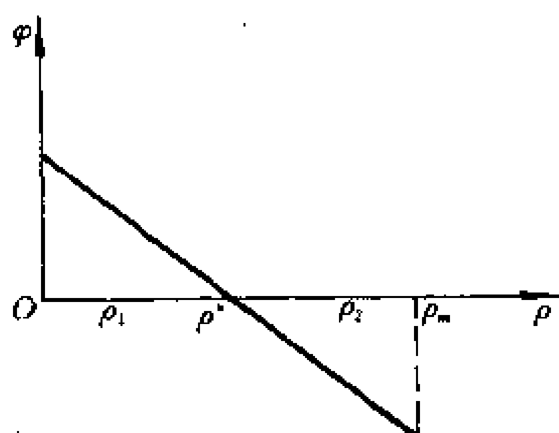


图 5－19　$\varphi(\rho)$的图形

但是如果初始密度 $f(x)$ 是 x 的增函数，如图 5－21(1)，前面密度大，后面密度小．则用类似于上面的分析方法可知，特征线的形状将如图 5－21(2)所示，它们必然相交．我们知道，在任一条特征线上密度 $\rho(x,t)$ 等于该线与 x 轴交点处的初始密度，那么当如图所示从 x_1 和 x_1' 两点出发的特征线相交于 $P(x,t)$ 点时，P 点的密度 $\rho(x,t)$ 将既等于 $f(x_1)$，又等于 $f(x_1')$．当 $f(x_1)\neq f(x_1')$ 时这个结果显然是荒谬的．

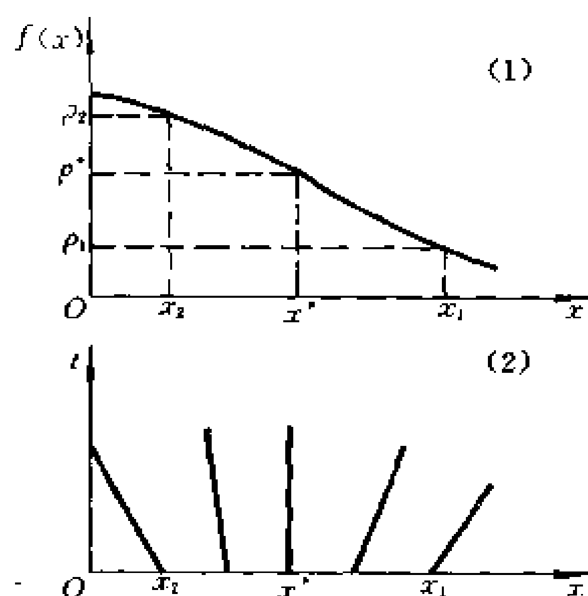


图 5－20　初始密度和特征线

从实际现象分析一下为什么会得到这个错误的结果．与图 5－20(1)给出的初始密度 $f(x)$ 不同，图 5－21(1)的 $f(x)$ 表示前面车辆拥挤，后面车辆稀疏，于是后面的车速比前面大．当速度快的汽车追上速度慢的汽车又不允许超车时，它的速度就会突

然降下来，并且引起在它后面的汽车的连锁反应，一辆接一辆地突然减速．车流速度 $u(x,t)$ 的突变像水波一样向后传播，我们在日常生活中可以观察到这种现象．速度的突变必然导致密度 $\rho(x,t)$ 和流量 $q(x,t)$ 的突变，这意味着函数 $\rho(x,t)$ 和 $q(x,t)$ 在某些 (x,t) 处出现了间断．这种情况下不能再假定这些函数是连续、可微的，因而不能再用微分方程(6)描述车流的分布，方程的解(7)、(8)式当然也就没有意义了．

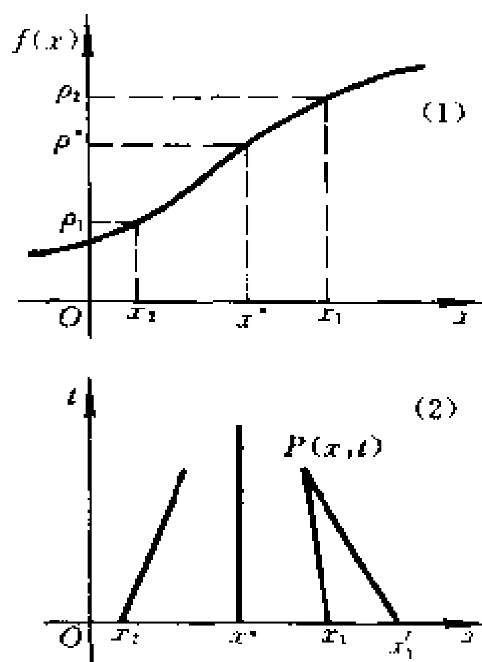


图 5－21　初始密度与特征线，特征线相交

间断交通流方程　当密度函数 $\rho(x,t)$ 出现间断时，具有实际意义的也是常见的一种情况是，一连串的间断点 (x,t) 在 $x\sim t$ 平面上构成一条孤立的、连续的**间断线**，记作 $x=x_s(t)$．图 5－21 引出的间断就是这种情况．下面推导间断线 $x=x_s(t)$ 应满足的方程时，还假定它是可微的．

在任意时刻 t，$x=x_s(t)$ 在 x 轴上是孤立的，可以取区间 $[a,b]$，使 $a<x_s(t)<b$．在 $[a,b]$ 内交通流方程的积分形式(4)仍然成立．将 $[a,b]$ 分为两个区间 $[a,x_s(t))$ 和 $(x_s(t),b]$，在每个区间内 $\rho(x,t)$ 是连续、可微的，于是有

$$q(a,t)-q(b,t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_a^{x_s(t)}\rho(x,t)\mathrm{d}x+\int_{x_s(t)}^{b}\rho(x,t)\mathrm{d}x\right]$$

$$=\int_a^{x_s(t)}\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}x+\rho(x_s^-(t),t)\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t}+\int_{x_s(t)}^{b}\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}x-\rho(x_s^+(t),t)\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t}\tag{11}$$

其中 $x_s^-(t)$和 $x_s^+(t)$分别表示从小于和大于 $x_s(t)$一侧趋向 $x_s(t)$ 时的极限值．在这种趋向下 $\rho(x,t)$和 $q(x,t)$的极限值记作

$$
\begin{aligned}
\rho^- = \rho(x_s^-(t), t), \quad & \rho^+ = \rho(x_s^+(t), t) \\
q^- = q(x_s^-(t), t), \quad & q^+ = q(x_s^+(t), t)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

ρ 和 q 在间断点 x_s 处 *) 的跳跃值记作

$$[\rho] = \rho^+ - \rho^-, \ [q] = q^+ - q^- \tag{13}$$

如图 5－22 所示．

当 $a \to x_s^-(t)$，$b \to x_s^+(t)$时(11)式中的$\int_a^{x_s(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}x = 0$，$\int_{x_s(t)}^{b} \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}x = 0$．利用(12)、(13)式的记号立即得到

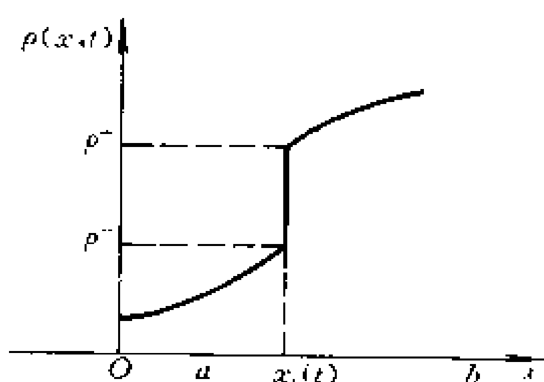


图 5－22 $\rho(x,t)$在 $x_s(t)$处间断

$$[q] = [\rho] \frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t}$$

或记作

$$\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t} = \frac{[q]}{[\rho]} \tag{14}$$

这就是间断线 $x = x_s(t)$应满足的方程，其中 $[\rho]$ 和 $[q]$ 可以用连续交通流方程解得的 ρ 和 q 在间断点处取极限值算出．

红绿灯模型 为方便起见设交通信号灯置于 $x=0$ 处．若原来公路上的交通处于稳定状态，即初始密度 $f(x)$是常数．某时刻交通灯突然变红灯，于是交通灯前面 $(x>0)$的车辆继续行驶，而后面 $(x<0)$的车辆则一辆辆地堵塞起来．经过一段时间后交

*) 在 $x \sim t$ 平面上的间断线对 x 轴而言称间断点．

通灯变绿灯，被堵塞的车辆得以快速地向前行驶．如何用车流密度函数的变化来描述这一过程，绿灯亮后被堵塞的车辆多长时间才能追上远离的车队，多长时间堵塞状态才会消失，交通恢复正常，这些就是红绿灯模型要讨论的问题．

红绿灯的变化必然引起密度函数 $\rho(x, t)$ 的间断，下面用方程(14)研究间断线的变化规律，而在 $\rho(x, t)$ 的连续点处则仍用(7)、(8)式进行分析．

设 $t=0^+$ 时交通灯突然由绿变红，$t=\tau$ 时又由红变绿．下面依时间顺序用图形结合公式计算的方法讨论 $\rho(x, t)$ 的演变过程，并回答上面的"何时追上车队"、"何时堵塞消失"等问题(图5－23)．

1．$t\leqslant 0^-$ 时设 $\rho(x, 0)=f(x)=\rho_0$(常数)，见图5－23(1)．为确定起见不妨假定 $\rho_0<\rho_*$，即初始密度小于使流量达到最大的密度，这种交通流称为**稀疏流**．(如果假定 $\rho_0>\rho_*$，则称为**拥挤流**．得到的结果虽与稀疏流不同，但分析方法相同，见习题11)．

2．$0^+\leqslant t<\tau$ 红灯亮．在红灯后面($x<0$)车辆堵塞导致最大密度 $\rho=\rho_m$，与初始密度 $\rho=\rho_0$ 形成间断，这条**左间断线**记作 $x=x_{sl}(t)$，表示堵塞的车队尾部随时间向后(左)延伸的过程．红灯前面($x>0$)的车辆继续行驶，空出的路段导致 $\rho=0$，与 $\rho=\rho_0$ 形成间断，这条**右间断线**记作 $x=x_{sr}(t)$，表示远离的车队尾部向前(右)延伸的过程，见图5－23(2)．$x_{sl}(t)$ 和 $x_{sr}(t)$ 由方程(14)确定．而流量 $q(\rho)$ 的计算由(2)式给出．

对于 $x=x_{sl}(t)$，

$$[\rho]=\rho_m-\rho_0,\ [q]=q(\rho_m)-q(\rho_0)=-\frac{u_m\rho_0(\rho_m-\rho_0)}{\rho_m}$$

于是

$$\left\{\ \frac{\mathrm{d}x_{sl}}{\mathrm{d}t}=-\frac{u_m\rho_0}{\rho_m}\right.$$

$$\left\{ x_{sl}(0)=0 \right.$$

其解为

$$x_{sl}(t)=-\frac{u_m\rho_0}{\rho_m}t \tag{15}$$

对于 $x=x_{sr}(t)$，$[\rho]=\rho_0$，$[q]=\dfrac{u_m\rho_0(\rho_m-\rho_0)}{\rho_m}$，

$$\begin{cases} \dfrac{dx_{sr}}{dt}=\dfrac{u_m(\rho_m-\rho_0)}{\rho_m} \\ x_{sr}(0)=0 \end{cases}$$

$$x_{sr}(t)=\frac{u_m(\rho_m-\rho_0)}{\rho_m}t \tag{16}$$

因为 $\rho_0<\rho*=\rho_m/2$，由(15)、(16)可知 $x_{sr}(t)$向前的速度比 $x_{sl}(t)$向后的速度大.

3. $t=\tau$ 时绿灯亮，被阻止在 $x<0$ 处的车队开始向前行驶(图 5-23(3)).

4. $\tau<t$. 用 $x_1(t)$表示堵塞车队行驶时最前面那辆车的位置，即由 $\rho=0$ 变为 $\rho>0$ 那一点的位置；用 $x_2(t)$表示堵塞车队行驶时最后面那辆车的位置，即由 $\rho<\rho_m$ 变为 $\rho=\rho_m$ 那一点的位置(图 5-23(4)). 将时间坐标平移为 $t'=t-\tau$，初始密度($t'=0$)可记作

$$f(x)=\begin{cases} \rho_m, & x_{sl}<x<0 \\ 0, & 0<x<x_{sr} \\ \rho_0, & x<x_{sl},\ x>x_{sr} \end{cases}$$

对于 $0<x_0<x_{sr}$，由(10)式可得 $\varphi(f(x_0))=u_m$，在特征线 $x=u_mt'+x_0$ 上，密度 $\rho(x,t')=0$. 令 $x_0\to 0^+$ 我们得到 $x_1(t')=u_mt'$，或

$$x_1(t)=u_m(t-\tau) \tag{17}$$

其实因为最前面的那辆车能以最大速度 u_m 行驶($\rho=0$ 时 $u=u_m$)，(17)式可以立即写出. 类似地，对于 $x_{sl}<x_0<0$，

$\varphi(f(x_0)) = -u_m$,

$$x_2(t) = -u_m(t-\tau) \tag{18}$$

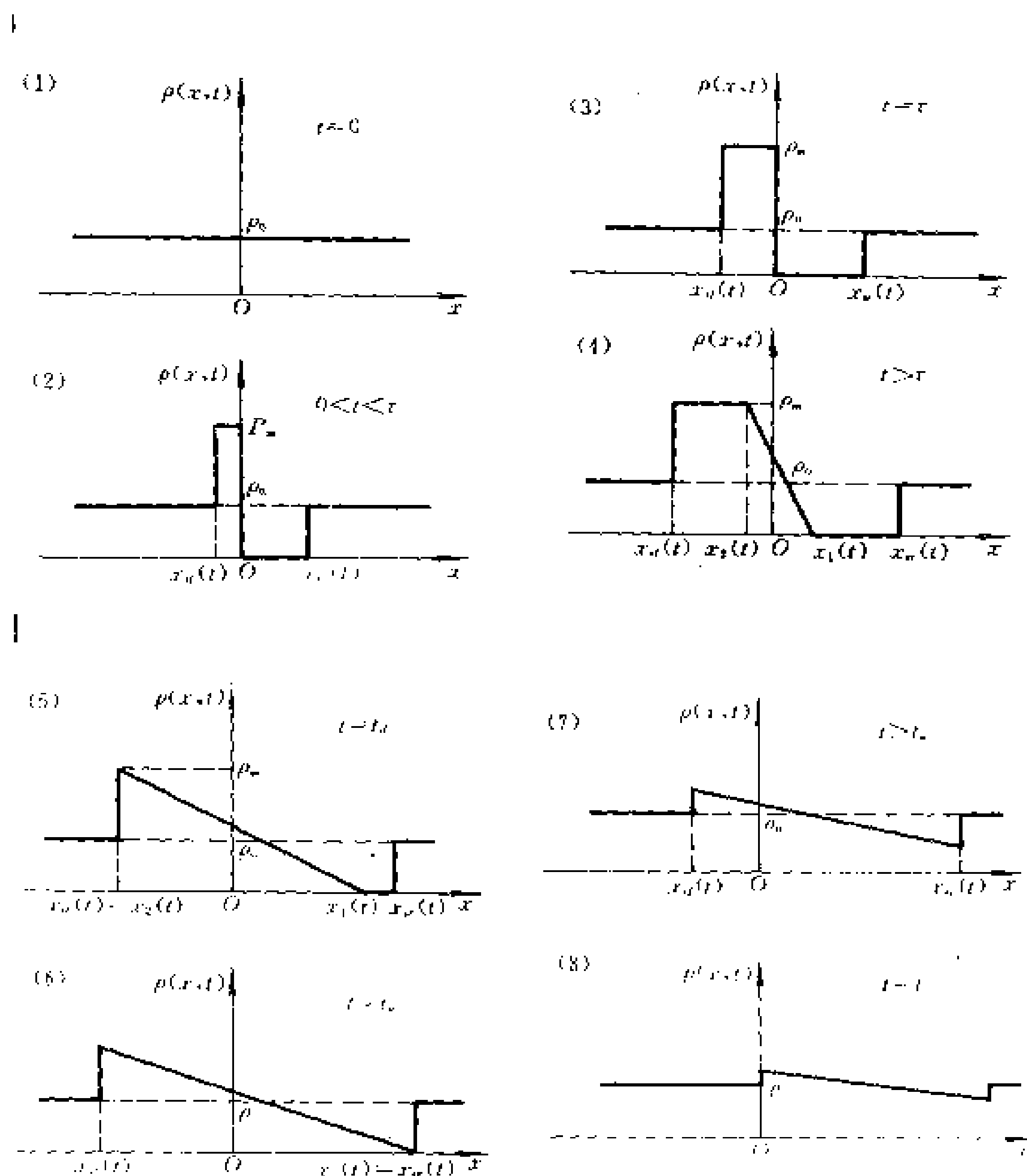


图 5-23 红绿灯模型中 $\rho(x,t)$ 的变化过程

而对于 $x_2(t) \leqslant x \leqslant x_1(t)$，密度 $\rho(x,t)$ 实际上是连续的，利用(7)、(8)式可知 $x=\varphi(\rho)t'$. 再注意到 $\varphi(\rho)$ 的表达式(10)，我们得到(详细推导参看[29])

$$x = u_m\left(1 - \frac{2\rho}{\rho_m}\right)(t-\tau) \tag{19}$$

即

$$\rho(x,t) = \frac{\rho_m}{2}\left[1 - \frac{x}{u_m(t-\tau)}\right],\ x_2(t) \leqslant x \leqslant x_1(t) \tag{20}$$

$\rho(x,t)$对x是线性的，且$\rho(0,t)=\rho_m/2$，所以图中用直线段表示．实际上，在$x_1(t)$与$x_2(t)$之间的那些车辆，是一辆辆逐渐开动起来的，由于初始密度是均匀的，$x_1(t)$、$x_2(t)$又是线性的，所以$\rho(x,t)$与x之间的线性关系是可以预料的．

5．$t=t_d$时堵塞消失（图 5－23(5)）．由于$x_1(t)$、$x_2(t)$向前、向后的移动速度都是u_m（(17)、(18)式），$x_{sl}(t)$向后的速度为$\frac{u_m\rho_0}{\rho_m}$（(15)式），$x_{sr}(t)$向前的速度为$\frac{u_m(\rho_m-\rho_0)}{\rho_m}$（(16)式）．在$\rho_0<\rho*=\rho_m/2$的假定下不难知道，$x_2(t)$会首先赶上$x_{sl}(t)$，记这个时刻为$t_d$，在(15)、(18)式中令$x_{sl}(t_d)=x_2(t_d)$，即

$u_m(t_d-\tau)=\frac{u_m(\rho_m-\rho_0)}{\rho_m}t_d$可解得

$$t_d = \frac{\rho_m}{\rho_m-\rho_0}\tau \tag{21}$$

显然，t_d是堵塞消失的时刻．

6．$t=t_u$时追上车队（图 5－23(6)）．当$x_1(t)$赶上$x_{sr}(t)$时，堵塞车队的最前面那辆车追上远离的车队，记这个时刻为t_u，在(16)、(17)式中令$x_1(t_u)=x_{sr}(t_u)$，可以算出

$$t_u = \frac{\rho_m}{\rho_0}\tau \tag{22}$$

7．$t_u<t$．$x_{sl}(t)$和$x_{sr}(t)$继续移动，而$\rho(x,t)$在间断点处

的跳跃值逐渐减小(图 5－23(7)). 下面分析 $x_{sl}(t)$的变化规律.

$x_{sl}(t)$满足间断交通流方程(14), 其中 ρ^+ 由(20)式确定

($x_{sl}(t)=x_2(t)$) 为 $\rho^+=\frac{\rho_m}{2}\left[1-\frac{x_{sl}}{u_m(t-\tau)}\right]$, 而 $\rho^-=\rho_0$,

由(2)式算出 $q^+=q(\rho^+)$, $q^-=q(\rho^-)$以后代入(14)式可得

$$\frac{\mathrm{d}x_{sl}}{\mathrm{d}t}=\frac{x_{sl}}{2(t-\tau)}+\frac{u_m}{2}\left(1-\frac{2\rho_0}{\rho_m}\right) \tag{23}$$

方程(23)的定解条件是

$$x_{sl}(t_d)=-u_m(t_d-\tau) \tag{24}$$

t_d 由(21)式给出. (23)、(24)的解为

$$x_{sl}(t)=u_m\left(1-\frac{2\rho_0}{\rho_m}\right)(t-\tau)+B_1(t-\tau)^{\frac{1}{2}} \tag{25}$$

$$B_1=-2u_m\left(1-\frac{\rho_0}{\rho_m}\right)\left(\frac{\rho_0\tau}{\rho_m-\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}}<0 \tag{26}$$

对(25)式求导可得

$$\frac{\mathrm{d}x_{sl}}{\mathrm{d}t}=u_m\left(1-\frac{2\rho_0}{\rho_m}\right)+\frac{B_1}{2}(t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \tag{27}$$

当 t 足够大时必有

$$\left|\frac{B_1}{2}(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\right|<u_m\left(1-\frac{2\rho_0}{\rho_m}\right)$$

这时 $\frac{\mathrm{d}x_{sl}}{\mathrm{d}t}>0$. 所以一定存在某个时刻, 使$x_{sl}(t)$由 $t=t_d$时的

向后移动$\left(\text{因为}\ \left.\frac{\mathrm{d}x_{sl}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_d}<0\right)$变成向前移动．

$x_{sr}(t)$的变化规律可作类似地分析．结果表明t足够大以后$x_{sr}(t)$和$x_{sl}(t)$以相同速度向前移动（习题12）．

8．$t=t^*$时$x=0$处交通恢复（图5－23（8））．$x_{sl}(t)$向前移至$x=0$点的时刻记作t^*，在(25)式中令$x_{sl}(t^*)=0$可以解出

$$t^*=\frac{\tau}{\left(1-\frac{2\rho_0}{\rho_m}\right)^2} \tag{28}$$

这时$x=0$处的车流密度$\rho(x,t)$减小到初始密度ρ_0，可以认为$x=0$处的交通恢复正常．从(28)式可知，红灯时间τ越短，初始密度与最大密度之比ρ_0/ρ_m越小，恢复得就越快．

设$\rho_0/\rho_m=3/8$，由(28)式算出$t^*=16\tau$．将τ看作由于事故造成堵塞而停止交通的时间，那么$\tau=5$分钟的堵塞，需要再过$16\times5-5=75$分钟堵塞处的交通才能恢复原状．

当$t>t^*$后$x_{sl}(t)$、$x_{sr}(t)$都在$x>0$处向前移动，并且ρ的跳跃值越来越小．理论上要当$t\to\infty$时全线$(-\infty<x<\infty)$的交通才能恢复到初始状态$\rho=\rho_0$．

5.9 烟雾的扩散与消失

广阔的平原上风和日丽，当一颗炮弹在蔚兰色的天空中爆炸时我们看到，放出的烟雾以爆炸点为中心向四周迅速扩散，形成一个近于圆形的不透光区域．起初这个区域逐渐增大，后来它的边界变得明亮起来，不透光区域渐渐变小，最后烟雾完全消失，又是晴空万里．本节要建立一个模型描述观察到的烟雾扩散和消失过程，分析消失的时间与哪些因素有关，以及怎样预报消失的时刻[43]．

问题分析 炮弹爆炸引起的烟雾传播可以看作在无穷空间由瞬时点源导致的扩散过程，能够由二阶抛物型偏微分方程描述烟雾浓度的变化规律．我们用仪器或肉眼观察到的烟雾扩散和消失过程既与烟雾浓度的变化规律有关、又与烟雾对光线的吸收过程有关，还涉及到仪器或肉眼对亮暗的灵敏程度．譬如用肉眼观察认为烟雾已经消失（由暗变亮），而用灵敏度高的仪器则仍能观测到烟雾（尚未变亮）．

整个建模过程应当包含：烟雾浓度的变化规律；穿过烟雾的光的强度的变化规律；仪器辨别亮暗的灵敏度的描述；不透光区域边界的变化过程等．

模型假设

1．炮弹的爆炸看作在空中某一点向四周等强度地瞬时释放烟雾，烟雾在无穷空间扩散，不计风力和大地的影响．

2．烟雾的传播服从扩散定律，即单位时间通过单位法向面积的流量与它的浓度梯度成正比．

3．光线穿过烟雾时其强度由于烟雾的吸收而减少，单位距离上光强的相对减少量与烟雾浓度成正比；没有烟雾的大气对光线的吸收作用忽略不计．

4．在烟雾扩散过程中，不穿过烟雾直接进入观测仪器的标准光强 I_0 保持不变；对于穿过烟雾进入仪器的光强 I，观测结果只有亮暗之分，仅当 $\frac{I}{I_0}>1-\mu$ 时观测结果为亮．μ 称为仪器的**灵敏度**，μ 越小仪器越灵敏．通常 $\mu \ll 1$．

模型建立

1．烟雾浓度的变化规律．

将爆炸时刻记作 $t=0$，爆炸点选为坐标原点．时刻 t 无穷空间中任一点 (x, y, z) 的烟雾浓度记为 $C(x, y, z, t)$．根据假设 2 单位时间通过单位法向面积的流量

$$q=-k \cdot \operatorname{grad} C \tag{1}$$

k 是扩散系数，grad 表示梯度，负号表示由浓度高向浓度低的地方扩散．考察空间域 Ω，Ω 的体积为 V，包围 Ω 的曲面为 S，S 的外法线向量为 n，则在 $[t, t+\Delta t]$ 内通过 Ω 的流量为

$$Q_1=\int_t^{t+\Delta t}\iint_S q\cdot n\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}t \tag{2}$$

而 Ω 内烟雾的增量为

$$Q_2=\iiint_V [C(x,y,z,t)-C(x,y,z,t+\Delta t)]\mathrm{d}V \tag{3}$$

由质量守恒定律

$$Q_1=Q_2 \tag{4}$$

根据曲面积分的奥氏公式

$$\iint_S q\cdot n\mathrm{d}\sigma=\iiint_V \mathrm{div}\, q\,\mathrm{d}V \tag{5}$$

其中 div 是散度记号．由(1)～(5)式再利用积分中值定理不难得到

$$\frac{\partial C}{\partial t}=k\,\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\, C)=k\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right) \tag{6}$$

这是抛物型偏微分方程．根据假设 1，初始条件为作用在坐标原点的点源函数，可记作

$$C(x,y,z,0)=Q\,\delta(x,y,z) \tag{7}$$

Q 表示炮弹爆炸施放的烟雾总量，$\delta(x,y,z)$是单位强度的点源函数．

方程(6)满足条件(7)的解为

$$C(x,y,z,t)=\frac{Q}{(4\pi kt)^{3/2}}e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4kt}} \tag{8}$$

这个结果表明，对于任意时刻 t 烟雾浓度 C 的等值面是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，并且随着球面半径 R 的增加 C 的值是连续减少的．仅当 $t\to\infty$ 时 $C(x,y,z,t)$才趋于零．

2．穿过烟雾的光强的变化规律．

考察沿一定方向穿过烟雾的光线，此方向的长度坐标记为 l，烟雾浓度为 $C(l)$，光强为 $I(l)$．按照假设 3 应有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}l}=-\alpha C(l)I(l) \tag{9}$$

α 是烟雾对光线的吸收系数．光线未进入烟雾时 $(l=l_0)$的强度记作 I_0，即

$$I(l_0)=I_0 \tag{10}$$

方程(9)在条件(10)下的解为

$$I(l)=I_0 e^{-\alpha\int_{l_0}^{l}C(s)\mathrm{d}s} \tag{11}$$

3．仪器的灵敏度与不透光区域的边界．

从上面分析可知烟雾浓度在空间是连续变化的，穿过烟雾进入仪器的光强也是连续变化的，那么之所以会观察到烟雾扩散时不透光区域的边界有一个先变大、后缩小、最终消失的过程，则完全是因为仪器的观测结果只有亮暗之分，而亮暗分界线由灵敏度 μ 决定．根据假设 4 仅当

$$\frac{I}{I_0}>1-\mu \tag{12}$$

观察结果为亮，这时可以认为烟雾已经消失．

按照假设 3 光强 I_0 穿过没有烟雾的大气时其衰减可以忽略，所以不必对它与直接进入仪器的标准光强加以区分．条件(12)中的光强 I 可由(11)式计算．

为方便起见取沿着 z 轴的光线，不妨设仪器在 $z=\infty$ 处而光源在 $z=-\infty$ 处，由(11)式条件(12)可以写作

$$e^{-\alpha\int_{-\infty}^{\infty}C(x,y,z,t)\mathrm{d}z}>1-\mu \tag{13}$$

因为 $C(x,y,z,t)$的等值面是球面，所以仪器观察到的投影在 xy 平面上的不透光区域的边界是圆周，记作

$$x^2+y^2=r^2 \tag{14}$$

这个圆周的半径随时间的变化规律 $r(t)$应由条件(13)决定．

4．不透光区域边界的变化规律．

利用近似关系 $\ln(1+x)\doteq x\ (x\ll 1)$，(13)式可化为

$$\int_{-\infty}^{\infty}C(x,y,z,t)\mathrm{d}z<\frac{1}{\alpha}\ln\frac{1}{1-\mu}\doteq\frac{\mu}{\alpha}$$

于是不透光区域的边界由

$$\int_{-\infty}^{\infty}C(x,y,z,t)\mathrm{d}z=\frac{\mu}{\alpha} \tag{15}$$

确定．将(8)式表示的 $C(x,y,z,t)$代入(15)进行积分，并利用公式 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/a}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi a}$ 可得

$$\frac{Q}{4\pi kt}e^{-\frac{x^2+y^2}{4kt}}=\frac{\mu}{\alpha} \tag{16}$$

以(14)式代入(16)式即可得到不透光区域的半径为

$$r(t)=\sqrt{4kt\ln\frac{\alpha Q}{4\pi k\mu t}} \tag{17}$$

结果分析　由(17)式可以画出 $r(t)$的图形如图 5－24，并且

不难算出，当

$$t=t_1=\frac{\alpha Q}{4\pi k\mu e} \tag{18}$$

时不透光区域的半径 r 达到最大值 r_m，当

$$t=t_2=\frac{\alpha Q}{4\pi k\mu} \tag{19}$$

时 $r=0$，即 t_2 是观察到烟雾完全消失的时刻.

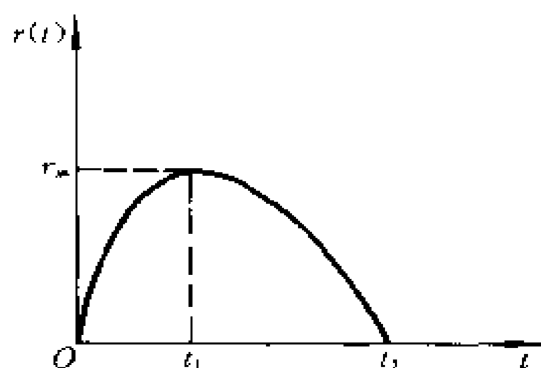


图 5－24　不透光区域半径 $r(t)$ 的示意图

(18)、(19)式表明，t_1、t_2 与烟雾施放量 Q 和烟雾对光线的吸收系数 α 成正比；与扩散系数 k 和仪器灵敏度 μ 成反比. 请读者解释这个结果的合理性.

最后，从(18)、(19)式可得

$$t_2=t_1\cdot e\doteq 2.7\,t_1 \tag{20}$$

所以当观察到烟雾扩散区域达到最大的时刻 t_1 以后，就可以预报烟雾完全消失的时刻 t_2.

(18)或(19)式的另一个用途是用来确定大气中的扩散系数 k.

评注　烟雾在大气中的扩散，光强通过烟雾后的衰减，都服从一定的物理定律. 仅从这些规律得到的结果不能解释观察到的烟雾扩散和消失过程. 这个模型引入仪器灵敏度的指标，成功地解释了上述现象，得到了基本上符合实际的结论. 而仪器灵敏度本身是客观存在的，并非人们所虚构.

5.10　万有引力定律的发现

万有引力定律的发现是伟大科学家牛顿的重大贡献之一. 牛顿在研究力学的过程中发明了微积分，又成功地在开普勒三定律

的基础上运用微积分推出了万有引力定律．这一创造性的成就，可以看作是历史上最著名的数学模型之一．

历史背景 十五世纪下半叶开始，欧洲商品经济的繁荣促进了航海业的发展．哥伦布新大陆的发现、麦哲伦的环球远航，引起了社会的普遍关注．当时远洋航船的方位全靠星球的位置来确定．在强大的社会需要推动下，天文观测的精确程度不断提高．在大量的实际观测数据面前，一直处于天文学统治地位的“地心说”开始动摇了．

波兰天文学家哥白尼(1473－1543)在天文观测的基础上，冲破宗教统治和“地心说”的束缚，提出了“日心说”．这是天文学乃至整个科学的一大革命．但是由于历史条件和科学水平的限制，哥白尼的理论还有一些缺陷．他接受了圆周运动是最完善的天体运动形式的概念，认为行星绕太阳的运行轨道是圆形的．

意大利物理学家伽里略(1564－1642)不仅用观察方法证实了哥白尼的学说，而且用实验方法发现了落体定律和惯性原理，揭示了物体在不受阻挠时作匀速直线运动的规律．

德国天文学家、数学家开普勒(1571－1630)在第谷·布拉赫对于行星运动大量观测资料的基础上用数学方法研究发现，火星的实际位置与按哥白尼理论计算的位置相差8弧分．经过对观测数据长期深入的分析，开普勒终于归纳出著名的所谓行星运动三定律，即

各颗行星分别在不同的椭圆轨道上绕太阳运行，太阳位于这些椭圆的一个焦点上；

每颗行星运行过程中单位时间内太阳－行星向径扫过的面积是常数；

各颗行星运行周期的平方与其椭圆轨道长半轴的3次方成正比．

在伽利略、开普勒的基础上，十七、十八世纪许多科学家致力于行星沿椭圆轨道运行时受力状况的研究．从开普勒定律可以

看出，行星运行速度是变化的，而在当时尚没有计算变速运动的动力学方法．英国物理学家胡克（1635－1703）和荷兰物理学家惠更斯（1629－1695）等人虽然都取得了一些成果，但终未得到有关引力的定律．

卓越的英国物理学家、数学家牛顿（1642－1727）认为一切运动都有其力学原因，开普勒三定律的背后必定有力学定律起作用．他在研究变速运动过程中发明了微积分（当时称流数法），又以微积分为工具在开普勒三定律和牛顿第二定律的基础上，用演绎方法得到所谓万有引力定律，于1687年汇编入《自然科学之数学原理》出版．这一发现成功地解释了许多自然现象，并为一系列观测和实验进一步证实，直到今天仍是物理学中的一条基本定律．

下面介绍的万有引力定律的推导过程是在牛顿使用的流数法的基础上改写的．

模型假设　开普勒三定律和牛顿第二定律是导出万有引力定律的基础，所以需要将它们表述为这个模型的假设条件．

对于任意一颗行星的椭圆运行轨道建立极坐标系(r,θ)，以太阳为坐标原点$r=0$，以椭圆长半轴方向为$\theta=0$，用向径$\mathbf{r}$表示行星的位置（图5－25）*）．

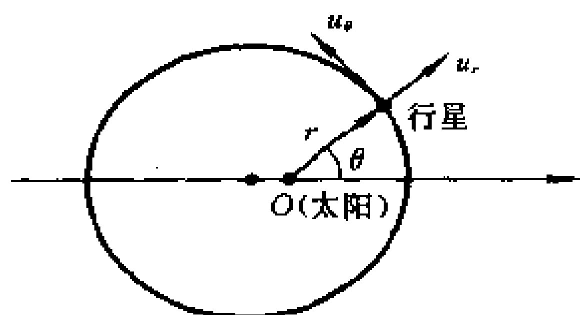


图5－25　极坐标系中的行星轨道

1．轨道方程为

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta},\quad p=\frac{b^2}{a},\quad b^2=a^2(1-e^2) \tag{1}$$

a、b为椭圆的长、短半轴，e为离心率．

2．单位时间内向径$\mathbf{r}$扫过的面积是常数A，即

*）本节用粗体字母表示向量，以区别于标量．

$$\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}=A \tag{2}$$

3．行星运行周期 T 满足

$$T^2=\lambda a^3 \tag{3}$$

其中 λ 是绝对常数，与哪一颗行星无关．

4．行星运行时受的作用力 $\mathbf{f}$ 等于行星加速度 $\ddot{\mathbf{r}}$ 和质量 m 的乘积，即

$$\mathbf{f}=m\ddot{\mathbf{r}} \tag{4}$$

模型建立 首先引入基向量（见图 5－25）

$$\begin{cases}\mathbf{u}_r=\cos\theta\mathbf{i}+\sin\theta\mathbf{j}\\ \mathbf{u}_\theta=-\sin\theta\mathbf{i}+\cos\theta\mathbf{j}\end{cases} \tag{5}$$

向径 $\mathbf{r}$ 可表为

$$\mathbf{r}=r\mathbf{u}_r \tag{6}$$

因为由（5）式可以算出

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{u}}_r=\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta\\ \dot{\mathbf{u}}_\theta=-\dot{\theta}\mathbf{u}_r\end{cases} \tag{7}$$

所以由（6）、（7）式得到行星运动的速度和加速度为

$$\dot{\mathbf{r}}=\dot{r}\mathbf{u}_r+r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta \tag{8}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta \tag{9}$$

根据（2）式可得

$$\dot{\theta}=\frac{2A}{r^2}，\quad \ddot{\theta}=\frac{-4A\dot{r}}{r^3} \tag{10}$$

于是（9）式右端第二项 $r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0$，（9）式化为

$$\ddot{\mathbf{r}}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r \tag{11}$$

对（1）式求导并利用（10）式 $\dot{\theta}$ 的结果，得到

$$\dot{r}=\frac{2Ae}{p}\sin\theta \tag{12}$$

$$\ddot{r} = \frac{4A^2 e}{Pr^2}\cos\theta = \frac{4A^2(p-r)}{pr^3} \tag{13}$$

将(10)和(13)代入(11)式得

$$\ddot{\mathrm{r}} = \frac{-4A^2}{pr^2}\mathrm{u_r} \tag{14}$$

最后把(14)和(6)代入(4)式,我们有

$$\mathrm{f} = -\frac{4A^2 m}{pr^2}\mathrm{r_0}, \quad \mathrm{r_0} = \frac{\mathrm{r}}{r} \tag{15}$$

这里 $\mathrm{r_0}$ 是单位向径,指示向径方向.(15)式表明,行星运行时受的力 f 的方向与它的向径方向 $\mathrm{r_0}$ 相反,即在太阳-行星边线方向,指向太阳;f 的大小与行星质量 m 成正比,与太阳-行星距离 r 的平方成反比.f 为太阳对行星的引力.

为了完成万有引力的推导,只需进一步证明(15)式中的 $\frac{A^2}{p}$ 是绝对常数.即它与哪一颗行星无关(A 和 P 不是绝对常数).

因为 A 是单位时间内向径扫过的面积,行星运行一个周期 T 向径扫过的面积恰是以 a、b 为长、短半轴的椭圆面积,所以

$$TA = \pi ab \tag{16}$$

由(1)、(3)、(16)式容易算出

$$\frac{A^2}{P} = \frac{\pi^2}{\lambda} \tag{17}$$

π 和 λ 均为绝对常数.将(17)代入(15)式有

$$\mathrm{f} = -\frac{4\pi^2 m}{\lambda r^2}\mathrm{r_0} \tag{18}$$

(18)式表明,太阳对行星的作用力 f 的大小除了与行星质量 m 成正比、与相互距离平方 r^2 成反比以外,余下的因子 $4\pi^2/\lambda$ 就只与

太阳本身有关了.将这个结果与我们熟知的形式

$$\mathbf{f} = -k\frac{Mm}{r^2}\mathbf{r}_0 \tag{19}$$

相比较,应该有$\frac{4\pi^2}{\lambda} = kM$($k$为万有引力常数,$M$为太阳质量).请读者验证这个关系(习题14).

评注 从发现万有引力定律的过程可以看出,在正确假设的基础上运用数学演绎方法建模,对自然科学的发展能够发挥多大巨大的作用.虽然我们大多数人发明不了什么定律.但是学习前辈如何创造性地运用数学方法对于培养解决实际问题的能力是大有好处的.

习 题

1.对于5.1节传染病的SIR模型证明:

①若$s_0 > 1/\sigma$,则$i(t)$先增加,在$s = 1/\sigma$处达到最大,然后减少并趋于零;$s(t)$单调减少至s_∞.

②若$s_0 < 1/\sigma$,则$i(t)$单调减少并趋于零,$s(t)$单调减少至s_∞.

2.对于传染病的SIR模型证明(20)~(22)式.

3.在5.2节经济增长模型中,为了适用于不同的对象可将产量函数$Q(t)$折算成现金,仍用$Q(t)$表示.考虑到物价上升因素我们记物价上升指数为$P(t)$(设$P(0)=1$),则产品的表面价值$y(t)$、实际价值$Q(t)$和物价指数$P(t)$之间满足$y(t) = Q(t)P(t)$.

①导出$y(t)$、$Q(t)$、$P(t)$的相对增长率之间的关系,并作解释.

②设雇用工人数目为$L(t)$,每个工人工资为$W(t)$,企业的利润简化为从产品的收入$y(t)$中扣除工人的工资和固定的成本.利用5.2节的(5)式讨论,企业应雇用多少工人能使利润最大.

4.在5.4节的房室模型中证明方程(3)对应的齐次方程通解如(4)、(5)式所示,说明方程的两个特征根α和β一定是负实根.

5.模仿5.4节建立的二室模型建立一室模型(只有中心室),在快速静脉注射、恒速静脉滴注(持续时间为τ)和口服或肌肉注射3种给药方式下求

解血药浓度，并画出浓度曲线图.

6. 利用上题建立的一室模型，讨论按固定时间间隔 T 每次给予固定剂量 D 的多次重复给药方式. 为了维持药品的疗效和保证机体的安全，要求血药浓度 C 控制在 (C_1, C_2) 范围内. 设中心室容积 V 为已知.

①在快速静脉注射的多次重复给药方式下，写出血药浓度表达式并作图，讨论怎样确定 T 和 D，使血药浓度的变化满足上述要求.

②在恒速静脉滴注和口服(或肌肉注射)的多次重复给药方式下，给出血药浓度变化的简图，并在这两种方式选择一种来讨论确定 T 和 D 的问题.

7. 在 5.5 节香烟过滤嘴模型中，

①设 $M=800$ 毫克，$l_1=80$ 毫米，$l_2=20$ 毫米，$b=0.02$(1/秒)，$\beta=0.08$(1/秒)，$v=50$ 毫米/秒，$a=0.3$. 求 Q 和 Q_1/Q_2.

②若有一支不带过滤嘴的香烟，参数同上. 比较全部吸完和只吸到 l_1 处的情况下，进入人体毒物量的区别.

8. 在 5.6 节水电站调压塔模型中，设调压塔出口水流速度在稳定值 v_0 附近有一阶跃变化，即

$$v_1(t)=\begin{cases}1, t\geqslant 0\\ 0, t<0\end{cases}$$

利用方程(8)讨论调压塔水位 $h(t)$ 在稳定值 h_0 附近的变化过程 $h_1(t)$.

9. 在 5.7 节人口的预测和控制模型中，总和生育率 $\beta(t)$ 和生育模式 $h(r,t)$ 是两种控制人口增长的手段. 试说明我国目前的人口政策，如提倡一对夫妇只生一个孩子，晚婚晚育，及生第 2 胎的一些规定，怎样通过这两种控制手段加以实施.

10. 在 5.8 节连续交通流模型中，考察在 $[t, t+\Delta t]$ 内公路段 $[x, x+\Delta x]$ 的流量 $q(x,t)$ 和密度 $\rho(x,t)$ 的变化，直接导出交通流方程(5).

11. 在 5.8 节红绿灯模型中，讨论初始密度是拥挤流即 $\rho_0>\rho^*$ 时密度函数 $\rho(x,t)$ 的变化(类似于图 5-23 对于稀疏流 $\rho_0<\rho^*$ 的分析，画出分阶段的 $\rho(x,t)$ 示意图，求出"追上车队"和"堵塞消失"的时刻，分析间断点的变化规律等).

12. 证明红绿灯模型中左右间断线 $x_{sl}(t)$ 和 $x_{sr}(t)$ 当 t 足够大后以相同速度向前移动.

13. 讨论绿灯模型. 设初始密度($t=0$)为

$$\rho(x,0)=\begin{cases}\rho_m, & x<0\\ 0, & x>0\end{cases}$$

①画出 $t>0$ 时 $\rho(x,t)$ 的示意图.

②证明 $t=0$ 时位于 $x=-d(d>0)$ 处的车辆通过 $x=0$ 的时刻为 $t=\frac{4d}{u_m}$.

③证明 $[0,T]$ 内通过 $x=0$ 的车辆数为 $\frac{\rho_m u_m}{4}T$.

14. 将5.10节得到的万有引力定律(18)式与熟知的形式(19)进行比较. 查询太阳质量、地球运行轨道(椭圆)的长半轴、引力常数等数据,说明二者是一致的.

* 15. 对于技术革新的推广,在下列几种情况下分别建立模型.

①推广工作通过已经采用新技术的人进行,推广速度与已采用新技术的人数成正比,推广是无限的.

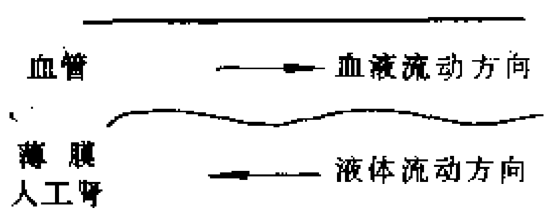
②总人数有限,因而推广速度随着尚未采用新技术人数的减少而降低.

③在②的前提下还要考虑广告等媒介的传播作用[10,27].

* 16. 建立耐用消费品市场销售量的模型. 如果知道了过去若干时期销售量的情况,如何确定模型的参数.

* 17. 根据经验当一种新商品投入市场后,随着人们对它的拥有量的增加,其销售量 $s(t)$ 的下降速度与 $s(t)$ 成正比. 广告宣传可给销量添加一个增长速度,它与广告费 $a(t)$ 成正比,但广告只能影响这种商品在市场上尚未饱和的部分(设饱和量为 M). 建立销量 $s(t)$ 的模型. 若广告宣传只进行有限时间 τ,且广告费为常数 a,问 $s(t)$ 如何变化[10].

* 18. 人工肾是帮助人体从血液中带走废物的装置. 它通过一层薄膜与需要带走废物的血管相通(见图5-26). 人工肾中通以某种液体,其流动方向与血液在血管中的流动方向相反,血液中的废物透过薄膜进入人工肾.



设血液和人工肾中液体的流速均为常数,废物进入人工肾的数量与它在这两种流体中的浓度差成正比. 人工肾总长 L,建立单位时间内人工肾带

走废物数量的模型[10]．

*19．在鱼塘中投放 n_0 尾鱼苗，随着时间的增长，尾数将减少而每尾的重量将增加．

① 设尾数 $n(t)$ 的相对减少率 $\frac{\dot{n}}{n}$ 为常数；由于喂养引起的每尾鱼量的增加率与鱼表面积成正比，由于消耗引起的每尾鱼量的减少率与鱼重量成正比．分别建立尾数和每尾鱼重的微分方程，并求解．

② 用控制网眼的办法不捕小鱼，到时刻 T 才开始捕捞，捕捞能力用尾数的相对减少量 $|\dot{n}/n|$ 表示，记作 E，即单位时间捕获量是 $En(t)$．问如何选择 T 和 E，使从 T 开始的捕获量最大[10]．

*20．侦察机搜索潜艇．设 $t=0$ 时艇在 O 点，飞机在 A 点，$OA=6$ 浬(见图 5－27)．此时艇潜入水中并沿着飞机不知道的某一方向以直线形式逃去，艇速 20 浬／时．飞机以速度 40 浬／时按照待定的航线搜索潜艇，当且仅当飞到艇的正上方时才可发现它．

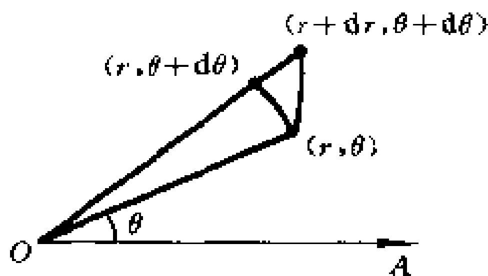


图 5－27

① 在极坐标系中设时刻 t 飞机在 (r,θ)，艇在 $(r,\theta+d\theta)$．证明飞机为了与艇在 $(r+dr,\theta+d\theta)$ 相遇，航线必是对数螺线 $r=r_0 e^{\frac{\theta-\theta_0}{\sqrt{3}}}$，其中 (r_0,θ_0) 是满足 $OP_0=\frac{1}{2}AP_0$ 的某一点 P_0 的坐标，例如 $P_0(2,0)$．即飞机先由 A 点沿直线飞到 P_0 点，再沿对数螺线飞行．画出航线示意图．说明飞机最多沿螺线飞一周(360°)总可发现潜艇．

② 证明：为了使整条航线是一条光滑曲线，飞机应先飞到 $P_1(2\sqrt{3},\frac{\pi}{2})$ 点，再沿螺线飞行．

③ 在所有可以发现潜艇的航线中哪一条航线最短，长度若干．光滑航线的长度又若干[28]．

*21．建立铅球掷远模型．不考虑阻力，设铅球初速为 v，出手高度为 h，出手角度为 α(与地面夹角)，建立投掷距离与 v、h、α 的关系式，并在 v、h

一定的条件下求最佳出手角度．

*22．建立肿瘤生长模型．通过大量医疗实践发现肿瘤细胞的生长有以下现象：i)当肿瘤细胞数目超过 10^{11} 时才是临床可观察的；ii)在肿瘤生长初期几乎每经过一定时间肿瘤细胞就增加一倍；iii)在肿瘤生长后期由于各种生理条件限制肿瘤细胞数目趋向某个稳定值．

① 比较 Logistic 模型与 Gompertz 模型：$\frac{dn}{dt}=-\lambda n\ln\frac{n}{N}$，其中 $n(t)$ 是细胞数，N 是极限值，λ 是参数．

② 说明上述两个模型是 Usher 模型：$\frac{dn}{dt}=\frac{\lambda n}{\alpha}\left(1-\left(\frac{n}{N}\right)^{\alpha}\right)$ 的特例，解释参数 α 的意义[19]．

*23．建立一个模型说明要用三级火箭发射人造卫星的道理．

① 设卫星绕地球作匀速圆周运动，证明其速度为 $v=R\sqrt{\frac{g}{r}}$，R 为地球半径，r 为卫星与地心距离，g 为地球表面重力加速度．v 也就是火箭的末速．问要把卫星送上离地面 600 公里的轨道，火箭末速应为多少．

② 设火箭飞行中速度为 $v(t)$，质量为 $m(t)$，初速为零，初始质量 m_0，火箭喷出的气体相对于火箭的速度为 u，忽略重力和阻力对火箭的影响．用动量守恒原理证明 $v(t)=u\ln\frac{m_0}{m(t)}$．由此你认为要提高火箭的末速应采取什么措施．

③ 火箭质量包括 3 部分：有效载荷（卫星）m_p；燃料 m_f；结构（外壳、燃料仓等）m_s．其中 m_s 在 m_f+m_s 中的比例 λ 难以小于 10%．证明当 $m_p=0$（火箭不带卫星），燃料用完时火箭达到的最大速度为 $v_m=u\ln\frac{1}{\lambda}$．已知目前的 $u=3$ 千米/秒，取 $\lambda=10\%$，求 v_m．这个结果说明什么．

④ 假设火箭燃料燃烧的同时，不断丢弃无用的结构部分，即结构质量与燃料质量以 λ 和 $1-\lambda$ 的比例同时减少，用动量守恒原理证明 $v(t)=(1-\lambda)\cdot u\ln\frac{m_0}{m(t)}$．问燃料用完时火箭末速为多少．与前面的结果有何不同．

⑤ ④ 是个理想化的模型，实际上只能用建造多级火箭的办法一段段地丢弃无用的结构．记 m_i 为第 i 级火箭质量（燃料和结构），λm_i 为结构质量（λ 对各级是一样的）．有效载荷仍用 m_p 表示．当第 1 级的燃料用完时丢弃第 1 级的结构，同时第 2 级点火．再设燃烧级的初始质量与其负载质量之比保持不变，比例系数为 k．证明 3 级火箭的末速 $v_3 = 3u\ln\frac{k+1}{\lambda k+1}$．计算要使 $v_3 = 10.5$ 千米／秒，发射 1 吨重的卫星需要多重的火箭（u、λ 用以前的数据）．若用 2 级或 4 级火箭，结果如何．由此得出使用 3 级火箭发射卫星的道理[48]．

第 6 章 稳定性方法建模

(平衡与稳定状态模型)

虽然动态过程的变化规律一般要用微分方程建立的动态模型来描述，但是对于某些实际问题，建模的主要目的并不是要寻求动态过程每个瞬时的性态，而是研究某种意义下稳定状态的特征，特别是当时间充分长以后动态过程的变化趋势．譬如在什么条件下描述过程的变量会越来越接近某些确定的数值，在什么情况下又会越来越远离这些数值而导致过程不稳定．为了分析这种稳定与不稳定的规律常常不需要求解微分方程(并且我们将会看到，即使对于不太复杂的方程，解析解也不是总能得到的)，而可以利用微分方程稳定性理论，直接研究平衡状态的稳定性就行了．

在下面建模过程中，大多数情况下我们将直接引用微分方程稳定性理论的结果．不熟悉这方面内容的读者可以参阅 6.7 节．

6.1 平衡状态的交通流

桥梁、隧道、狭窄路段往往成为阻碍交通的“瓶颈”，这些地方车辆拥挤、车速很慢，以致单位时间通过的车辆较少．另一方面，交通空闲的路段车速固然很快，但是由于车辆稀少，单位时间通过的车辆也不多．对于交通的规划和指挥者来说，如何安排和控制车辆的密度使得单位时间通过的车辆最多，自然是十分重要的课题．

交通流本是一个动态过程，在 5.8 节中车流的密度、速度和流量都是时间 t 和位置 x 的函数，分别记作 $\rho(x,t)$、$u(x,t)$ 和 $q(x,t)$．按照它们的定义，对于任意的 t 和 x 都有(5.8 节的(1)式)

$$q=\rho u \tag{1}$$

这一节讨论平衡状态下的交通流．所谓平衡状态是指所有车辆速度相同、车长和相互间隔也相同，即速度 u 和密度 ρ 在任何时间和地点都一样．在平衡状态下将车流密度 ρ 作为自变量，确定速度 u 与 ρ 之间的函数关系 $u(\rho)$，进而由(1)式得到流量 q 的模型 $q(\rho)$，以便研究怎样控制密度 ρ 使流量 q 最大的问题．[17, 32]

问题分析 为了得到平衡状态下的 $u(\rho)$，需要先分析动态过程中车辆的位置、速度和受力之间的关系，在一定假设条件下建立动力学方程．

考察一个车队，按前后顺序编号为 1，2，…，j，…，第 j 车在时刻 t 的位置记作 $x_j(t)$，速度记作 $v_j(t)$．让我们从实际经验分析为了恢复被干扰破坏的平衡状态，第 j 车的司机将如何操纵他的汽车．

如果在他前面的第 $j-1$ 车突然减速，即 $v_{j-1}(t)<v_j(t)$，使车队偏离平衡状态，则他将施加制动力，使第 j 车也减速，并且当两车之间的速度差 $v_j(t)-v_{j-1}(t)$ 越大时，制动力也越大．相反，如果第 $j-1$ 车加速，$v_{j-1}(t)>v_j(t)$，则他要施加驱动力，$v_{j-1}(t)-v_j(t)$ 越大时，驱动力也越大．此外，制动力（或驱动力）还与车流密度有关，当车流拥挤，即两车之间的距离 $|x_j(t)-x_{j-1}(t)|$ 较小时，为避免冲撞，制动力会较大，而当车流稀疏，即 $|x_j(t)-x_{j-1}(t)|$ 较大时，制动力较小．

另一方面，按照牛顿第二定律，制动力（或驱动力）与第 j 车的加速度成正比．如果假定司机从发现前面车辆速度变化到他施加制动力（或驱动力）有一个反应时间 τ，那么制动力（驱动力）将与 $\dfrac{\mathrm{d}v_j(t+\tau)}{\mathrm{d}t}$ 成正比．

模型假设 分别对交通流的平衡状态及其受到干扰引起的动态过程作简化假设．

1．所有车辆的车长为 l，质量为 m．在平衡状态下所有车辆的速度 u 相同，间隔 d 相同，因而车流密度 $\rho=1/(l+d)$ 是常数

初始状态为平衡状态.

2. 在平衡状态下车流速度 u 是密度 ρ 的函数，$\rho=\rho_m$(车辆首尾相接造成堵塞时的最大密度)时，$u(\rho_m)=0$；在$0\leqslant\rho\leqslant\rho_0$ 范围内 $u(\rho)=u_m$(受限制的最大车速)，ρ_0 是已知的小正数.

3. 在平衡被破坏的动态过程中，第 j 车的制动力(或驱动力)与前后两车的速度差 $|v_j(t)-v_{j-1}(t)|$ 成正比，与前后两车之间距离 $|x_j(t)-x_{j-1}(t)|$ 成反比，比例系数 k 对所有车辆都相同，所有车辆司机的反应时间 τ 相同.

模型建立 首先，由上述分析和假设 3，利用牛顿第二定律可以写出该动态过程满足的微分方程

$$-m\frac{\mathrm{d}v_j(t-\tau)}{\mathrm{d}t}=k\frac{v_j(t)-v_{j-1}(t)}{|x_j(t)-x_{j-1}(t)|} \tag{2}$$

注意到 $x_j(t)<x_{j-1}(t)$，(2)式可变为

$$\frac{\mathrm{d}v_j(t+\tau)}{\mathrm{d}t}=\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln|x_j(t)-x_{j-1}(t)|,\ \lambda=\frac{k}{m}>0 \tag{3}$$

对方程(3)两边积分得到

$$v_j(t+\tau)=\lambda\ln|x_j(t)-x_{j-1}(t)|+\alpha_j \tag{4}$$

α_j 是由初始条件确定的常数.(4)式是可以恢复平衡状态的动态方程.

在平衡状态下根据假设 1 有

$$v_j(t+\tau)=u,\quad \alpha_j=\alpha,\quad |x_j(t)-x_{j-1}(t)|=\mathrm{d}+l=1/\rho$$

将这些关系代入(4)式得到平衡状态下车流速度 u 和密度 ρ 满足

$$u=\lambda\ln\frac{1}{\rho}+\alpha \tag{5}$$

常数 α 可由假设 2 中的 $u(\rho_m)=0$ 确定，于是得到

$$u=\lambda\ln\frac{\rho_m}{\rho} \tag{6}$$

而常数λ则可以利用假设 2 中的条件 $u(\rho_0)=u_m$ 求出，有

$$\lambda=\frac{u_m}{\ln(\rho_m/\rho_0)}$$

代入(6)式我们得到车流速度的表达式

$$u(\rho)=\begin{cases}u_m, & 0\leqslant\rho\leqslant\rho_0\\ u_m\dfrac{\ln(\rho_m/\rho)}{\ln(\rho_m/\rho_0)}, & \rho_0<\rho\leqslant\rho_m\end{cases}\tag{7}$$

再利用(1)式立即得到流量函数

$$q(\rho)=\begin{cases}u_m\rho, & 0\leqslant\rho\leqslant\rho_0\\ u_m\rho\dfrac{\ln(\rho_m/\rho)}{\ln(\rho_m/\rho_0)}, & \rho_0<\rho\leqslant\rho_m\end{cases}\tag{8}$$

图 6－1 给出了(8)式的示意图(通常 ρ_0 很小).

用微分法不难算出使流量达到最大值 $q=q_m$ 时的密度 $\rho*$ 为

$$\rho*=\frac{\rho_m}{e}=0.368\,\rho_m\tag{9}$$

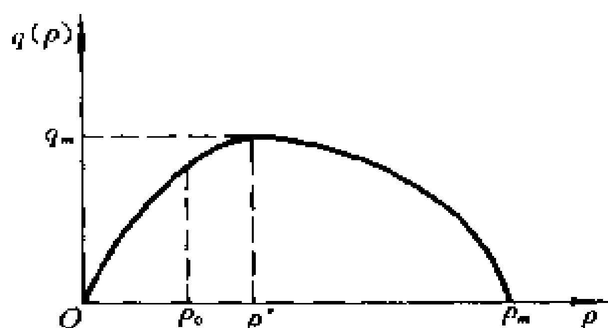


图 6－1　流量函数$q(\rho)$示意图

在桥梁、隧道等“瓶颈”路段，将车流密度控制在 $\rho*$附近，可以获得较大的交通流量.

流量函数(8)式比较复杂，为了应用上的方便可作如下的改进.

模型改进　将假设 3 中的“制动力(或驱动力)与 $|x_j(t)-x_{j-1}(t)|$ 成反比”改为“与 $[x_j(t)-x_{j-1}(t)]^2$ 成反比”，则微分方程(2)变为

$$-m\frac{\mathrm{d}v_j(t+\tau)}{\mathrm{d}t}=k\frac{v_j(t)-v_{j-1}(t)}{[x_j(t)-x_{j-1}(t)]^2}\tag{10}$$

在其他假设不变和类似的推导下可以得到平衡状态下的车流密度为(习题1)

$$u(\rho)=\lambda(\rho-\rho_m) \tag{11}$$

为简单起见利用 $u(0)=u_m$ 来确定 λ，可得

$$u(\rho)=u_m\left(1-\frac{\rho}{\rho_m}\right),\quad 0\leqslant\rho\leqslant\rho_m \tag{12}$$

最后，流量函数为

$$q(\rho)=u_m\rho\left(1-\frac{\rho}{\rho_m}\right),0\leqslant\rho\leqslant\rho_m \tag{13}$$

q 是 ρ 的二次函数．容易知道，当 $\rho=\rho*=\rho_m/2$ 时 q 达到最大值 $q_m=\frac{u_m\rho_m}{4}$．

(12)和(13)式就是5.8节红绿灯模型中应用的速度和流量函数．

评注　从实际经验看在平衡状态下车流速度是密度的减函数流量则随着密度的增加先增加后减少，当密度适中时流量最大．本节在合理的简化假设下通过对司机施加的制动力(或驱动力)的分析，由动态方程导出平衡状态下的模型(7)、(8)式及(12)、(13)式，定性上与经验相符．可以看出，所得结果主要依赖于假设条件3中关于制动力(或驱动力)的假定．这个力与两车速度差成正比是没有什么异议的，但它究竟是与两车距离成反比(由此导出(7)式)，还是与两车距离平方成反比(由此导出(12)式)，或者根本与两车距离无关(习题2)，则缺乏充分的理由．事实上，如果说当前面车辆突然减速，后面的司机施加的制动力与两车距离(或它的平方)成反比还有一定道理的话，那么当前面车辆突然加速，后面司机施加的驱动力似乎应与两车距离没有多大关系．而在这种考虑下我们将无法得到关于平衡状态的统一结果．

6.2 捕鱼业的持续收获

渔业资源是一种再生资源，再生资源要注意适度开发，不能为了一时的高产去"竭泽而渔"，应该在持续稳产的前提下追求产量或最优经济效益.

考察一个渔场，其中的鱼量在天然环境下按一定规律增长，如果捕捞量恰好等于增长量，那么渔场鱼量将保持不变，这个捕捞量就可以持续.本节要建立在捕捞情况下渔场鱼量遵从的方程，分析鱼量稳定的条件，并且在稳定的前提下讨论如何控制捕捞使持续产量或经济效益达到最大.最后研究所谓捕捞过度的问题[13,24].

产量模型 记时刻 t 渔场中鱼量为 $x(t)$，关于 $x(t)$的自然增长和人工捕捞作如下假设：

1.在无捕捞条件下 $x(t)$的增长服从 Logistic 规律(见 1.4 节的阻滞增长模型)，即

$$\dot{x}(t)=f(x)=rx\left(1-\frac{x}{N}\right) \tag{1}$$

r 是固有增长率，N 是环境容许的最大鱼量，用 $f(x)$表示单位时间的增长量.

2.单位时间的捕捞量(即产量)与渔场鱼量 $x(t)$成正比，比例常数 k 表示单位时间捕捞率.k 可以进一步分解为 $k=qE$，E 称**捕捞强度**，用可以控制的参数譬如出海渔船数量来度量；q 称**捕捞系数**，表示单位强度下的捕捞率.在本节中为了方便起见可以选择合适的捕捞强度的单位，使 $q=1$.于是单位时间的捕捞量为

$$h(x)=kx=Ex \tag{2}$$

根据以上假设并记

$$F(x)=f(x)-h(x)$$

得到捕捞情况下渔场鱼量满足的方程

$$\dot{x}(t)=F(x)=rx\left(1-\frac{x}{N}\right)-Ex \tag{3}$$

我们并不需要解方程(3)以得到 $x(t)$的动态变化过程，只希望知道渔场的稳定鱼量和保持稳定的条件，即时间 t 足够长以后渔场鱼量 $x(t)$的趋向，并由此确定最大持续产量．为此可以直接求方程(3)的平衡点并分析其稳定性．

令

$$F(x)=rx\left(1-\frac{x}{N}\right)-Ex=0$$

得到两个平衡点

$$x_0=N\left(1-\frac{E}{r}\right),\quad x_1=0 \tag{4}$$

不难算出

$$F'(x_0)=E-r,\quad F'(x_1)=r-E$$

所以若

$$E<r \tag{5}$$

有 $F'(x_0)<0$，$F'(x_1)>0$，故 x_0 点稳定，x_1 点不稳定（判断平衡点稳定性的准则见 6.7 节）；若 $E>r$ 则结果正好相反．

E 是捕捞率（$E=k$），r 是最大的增长率，上述分析表明只要捕捞适度（$E<r$），就可使渔场鱼量稳定在 x_0，从而获得持续产量 $h(x_0)=Ex_0$；而当捕捞过度时（$E>r$），渔场鱼量将减至 $x_1=0$，当然谈不上获得持续产量了．

进一步讨论渔场鱼量稳定在 x_0 的前提下，如何控制捕捞强度 E 使持续产量最大的问题．用图解法可以非常简单地得到结

果.

根据(1)、(2)式作抛物线 $y=f(x)$ 和直线 $y=h(x)=Ex$,如图6-2.注意到 $y=f(x)$ 在原点的切线为 $y=rx$,所以在条件(5)下 $y=Ex$ 必与 $y=f(x)$ 有交点 P,P 的横坐标就是稳定平衡点 x_0.

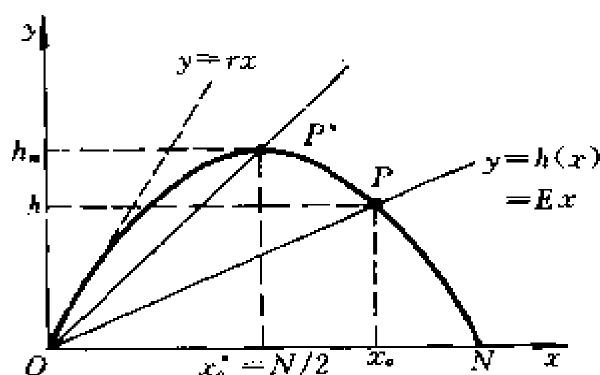


图6-2 最大持续产量的图解法

根据假设2,P 点的纵坐标 h 为稳定条件下单位时间的持续产量,由图6-2立刻知道,当 $y=Ex$ 与 $y=f(x)$ 在抛物线顶点 P^* 相交时可获得最大的持续产量,此时的稳定平衡点为

$$x_0^*=\frac{N}{2} \tag{6}$$

且单位时间的最大持续产量为

$$h_m=\frac{rN}{4} \tag{7}$$

而由(4)式不难算出保持渔场鱼量稳定在 x_0^* 的捕捞强度为

$$E^*=\frac{r}{2} \tag{8}$$

综上所述,产量模型的结论是将捕捞强度控制在 E^*,或者说使渔场鱼量保持在最大鱼量 N 的一半时,可以获得最大的持续产量.

效益模型 从经济角度看不应追求产量最大,而应考虑效益

最佳．如果经济效益用从捕捞所得的收入中扣除开支后的利润来衡量，并且简单地假设：鱼的销售单价为常数 p，单位捕捞强度(如每条出海渔船)的费用为常数 c，那么单位时间的收入 T 和支出 S 分别为

$$T=ph(x)=pEx, \quad S=cE \tag{9}$$

单位时间的利润为

$$R=T-S=pEx-cE \tag{10}$$

在稳定条件 $x=x_0$ 下，以(4)代入(10)式得

$$R(E)=T(E)-S(E)=pNE\left(1-\frac{E}{r}\right)-cE \tag{11}$$

用微分法容易求出使利润 $R(E)$ 达到最大的捕捞强度为

$$E_R=\frac{r}{2}\left(1-\frac{c}{pN}\right) \tag{12}$$

将 E_R 代入(4)式可得最大利润下的渔场稳定鱼量 x_R 及单位时间的持续产量 h_R 为

$$x_R=\frac{N}{2}+\frac{c}{2p} \tag{13}$$

$$h_R=rx_R\left(1-\frac{x_R}{N}\right)=\frac{rN}{4}\left(1-\frac{c^2}{p^2N^2}\right) \tag{14}$$

将(12)～(14)式与产量模型中的(6)～(8)式相比较可以看出，在最大效益原则下捕捞强度和持续产量均有所减少，而渔场稳定鱼量有所增加．并且减少或增加的比例随着捕捞成本 c 的增长而变大，随着销售价格 p 的增长而变小，这显然是符合实际情况的．

捕捞过度　上面的效益模型是以计划捕捞(或称封闭式捕捞)为基础的，即渔场由单独的经营者有计划地捕捞，可以追求最大

利润．如果渔场向众多的盲目的经营者开放，那么即使只有微薄的利润，经营者也会去捕捞，这种情况称为盲目捕捞（或开放式捕捞）．这种捕捞方式将导致捕捞过度．下面讨论这个模型．

（11）式给出了利润与捕捞强度的关系 $R(E)$，令 $R(E)=0$ 的解为 E_S，可得

$$E_S = r\left(1-\frac{c}{pN}\right) \tag{15}$$

当 $E<E_S$ 时利润 $R(E)>0$，盲目的经营者们会加大捕捞强度；若 $E>E_S$ 利润 $R(E)<0$，他们当然要减小强度．所以 E_S 是盲目捕捞下的临界强度．

E_S 也可由图解法确定．在图 6－3 中以 E 为横坐标按（11）式画出 $T(E)$ 和 $S(E)$，它们交点的横坐标即为 E_S．容易知道 E_S 存在的必要条件（即 $E_S>0$）是

$$p > \frac{c}{N} \tag{16}$$

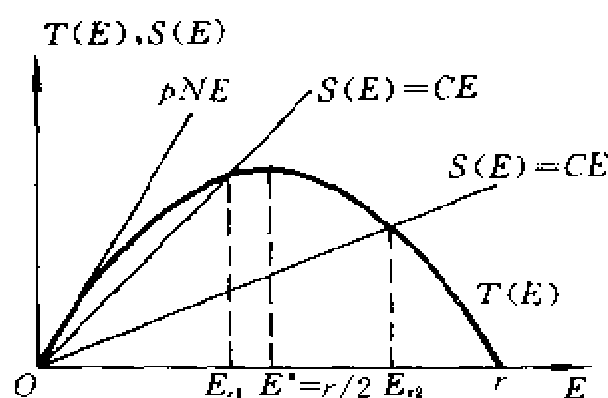


图 6－3 盲目捕捞强度的图解法

即售价大于（相对于总量而言）成本．并且由（15）式可知，成本越低，售价越高，则 E_S 越大．

将（15）代入（4）式得到盲目捕捞下的渔场稳定鱼量为

$$x_S = \frac{c}{p} \tag{17}$$

x_S 完全由成本－价格比决定，随着价格的上升和成本的下降，x_S 将迅速减少，出现捕捞过度．

比较（12）和（15）式可知 $E_S=2E_R$，即盲目捕捞强度比最大效益下捕捞强度大一倍．

从(15)式和图6－3还可以得到，当 $\frac{c}{N}<p<2\frac{c}{N}$ 时 $(E_R<)E_S<E^*$，如图中 E_{S1}，称经济学捕捞过度；当 $p>2\frac{c}{N}$ 时 $E_S>E^*$，如图中 E_{S2}，称生态学捕捞过度．

评注 为了研究渔业的产量、效益及捕捞过度问题，首先在对鱼的自然增长和捕捞情况的合理假设下，建立渔场鱼量的基本方程(3)，并利用平衡点稳定性分析确定了保持渔场鱼量稳定的条件．产量、效益和捕捞过度3个模型在稳定的前提下步步深入，数学推导过程十分简单，却得到了在定性关系上与实际情况完全符合的结果．

如果改变对鱼的自然增长和人工捕捞的假设，模型及结果将随之变化(习题3、4)．

6.3 军备竞赛

两个国家或两个国家集团之间由于相互不信任和各种矛盾的存在、发展而不断增加自己的军事力量，防御对方可能发动的战争．能否用一个数学模型描述这种军备竞赛的过程，从定性和定量的角度对竞赛的结果作出解释或预测．本节介绍L．F．Richardson 1939年提出的一个模型．当然影响军备竞赛的因素是错综复杂的，无法用数学工具给以恰当的圆满的描述．这个模型只不过告诉我们，一个复杂的实际过程可以被合理地简化到什么程度，得到的结果又怎样用来解释实际现象．并且如果允许军备竞赛沿着机械的本能和固定的模式发展的话，会导致什么样的结局[9,10]．

模型假设与构成 为了方便起见用军备这个词表示军事力量的总和，如兵力、装备、军事预算等．甲乙双方在时刻 t 的军备分别记作 $x(t)$ 和 $y(t)$，假定它们的变化只取决于下面3个因素．

1．由于相互不信任及矛盾的发展，一方军备越大，另一方军备增加得越快；

2．由于各方总的经济力量的限制，任一方军备越大，对军备增长的制约作用越大；

3．由于相互敌视或领土争端，每一方都存在着增加军备的固有潜力．

进一步假定前两个因素的影响是线性的，第3个因素的影响是常数，那么$x(t)$和$y(t)$的变化过程可用微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\alpha x + ky + g \\ \dot{y}(t) = lx - \beta y + h \end{cases} \tag{1}$$

表示，其中的系数均大于或等于零．k、l是被对方军备刺激程度的度量；α、β是自己经济力量约束程度的度量；g、h是军备竞赛的固有潜力．

我们主要关心军备竞赛的结局由什么因素决定．因此用微分方程稳定性理论讨论时间充分长以后$x(t)$、$y(t)$的变化趋势，即方程(1)的平衡点的稳定情况．

令(1)式右端等于零，容易算出平衡点(x_0, y_0)为

$$x_0 = \frac{kh + \beta g}{\alpha\beta - kl}, \quad y_0 = \frac{lg + \alpha h}{\alpha\beta - kl} \tag{2}$$

方程(1)的系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & k \\ l & -\beta \end{bmatrix}$$

于是按照判断平衡点稳定性的方法计算(见6.7节(9)～(13)式)

$$p = -(a_{11} + a_{22}) = \alpha + \beta > 0 \tag{3}$$

$$q = \det A = \alpha\beta - kl \tag{4}$$

由稳定性准则(见6.7节(15)式)，当

$$\alpha\beta > kl \tag{5}$$

时，平衡点 (x_0, y_0) 是稳定的；反之，是不稳定的．

这就是说，在(5)式的条件下，时间足够长以后双方的军备将分别趋向一个有限值，军备竞赛是稳定的．

模型的定性解释 根据方程(1)和平衡点稳定性的分析，可以解释几个简单而又重要的现象．

1．如果 $g, h \neq 0$，即使由于某种原因（如裁军协定）在某个时候双方军备大减，不妨设 $x(t)=y(t)=0$，那么因为 $\dot{x}=g$，$\dot{y}=h$ 也将使双方重整军备．这说明未经和解的裁军（即不消除敌视或领土争端）是不会持久的．

2．如果由于某种原因（如战败或协议）在某个时候一方的军备大减，不妨设 $x(t)=0$，那么因为 $\dot{x}=ky+g$ 也将使该方重整军备．这说明存在不信任 $(k\neq 0)$ 或固有争端 $(g\neq 0)$ 的单方面裁军也不会持久．

3．条件(5)表明，当双方的约束程度 $\alpha\beta$ 大于双方的刺激程度 kl 时，军备竞赛才会趋向稳定．反之，$x(t)$，$y(t)$ 将趋向无穷，竞赛无限地进行下去，可能导致战争．

4．如果 $g=h=0$，则 $x_0=0$，$y_0=0$ 是方程(1)的平衡点，并且在条件(5)下它是稳定的．于是如果在某个时候有 $x(t)=y(t)=0$，它们就永远保持为零．这种情况可以解释为双方不存在任何敌视和争端，通过裁军可以达到持久和平．两个友好的邻国正是这样．

模型参数的估计 为了利用(5)式判断军备竞赛是否会趋于稳定，需要知道 α、β、k、l 的数值．估计这些参数无疑是很困难的，下面是 Richardson 提出的一种方法．

1．k、l 的估计

设 $g=0$，$y=y_1$，$x(0)=0$，于是在 t 不太大时，方程(1)中的 αx 较小，忽略后可得

$$\dot{x} = ky_1 \tag{6}$$

设 $x(\tau)=y_1$，则由(6)式得到

$$k^{-1}=\tau \tag{7}$$

这说明 k^{-1} 是甲方军备从零到赶上乙方军备 y_1 所需的时间．

例如德国从1933年开始重整军备，只用了约3年的时间就赶上了它的邻国．假设它增加军备的固有潜力 g 被约束效应 αx 所抵消，那么可以认为德国的 $k^{-1}\doteq 3$（年），即 $k\doteq 0.3$．

l 可以类似地估计，或者合理地假定它与国家的经济实力成正比．这样若乙国的经济实力是德国的2倍，则可以估计 $l\doteq 0.6$．

2．α、β 的估计

设 $g=0$，$y=0$，由方程(1)可得

$$x(t)=x(0)e^{-\alpha t}$$

以 $t=\alpha^{-1}$ 代入算出

$$x(\alpha^{-1})=\frac{x(0)}{e}$$

这表示 α^{-1} 是在乙方无军备时甲方军备减少到原来的 $\frac{1}{e}$ 所需的时间．Richardson 认为这大概是一个国家议会的任期，对于议会任期5年的国家来说，$\alpha\doteq 0.2$．

对模型和参数的粗略检验　考察第一次世界大战前夕欧洲的两个国家同盟——法俄同盟和德奥匈同盟的军备竞赛情况．

两个同盟的经济实力大致相等，且约为德国的3倍，因为德国的 $k\doteq 0.3$，所以这两个同盟的 $k=l\doteq 0.9$．同时假定 $\alpha=\beta\doteq 0.2$，那么由于 $\alpha\beta<kl$，(5)式不成立，它们的军备竞赛不会趋向稳定．

事实上，当时两个同盟之间既有军备竞赛也有贸易往来．用 x_1、y_1 表示双方的军事预算，x_2、y_2 表示双方的贸易往来，从军事预算中扣除贸易往来作为双方的军备，即 $x=x_1-x_2$，$y=y_1-y_2$．以 $k=l$、$\alpha=\beta$ 代入方程(1)，并将两式相加得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x+y)=(k-\alpha)(x+y)+g+h \tag{8}$$

或表为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_1+y_1)=(k-\alpha)\left[(x_1+y_1)-(x_2+y_2)+\frac{1}{k-a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_2+y_2)+\frac{g+h}{k-a}\right] \tag{9}$$

为了与实际数据比较，表 6－1 列出了两个同盟从 1909 年到 1913 年的军事预算，表中第 5 行 $\Delta(x_1+y_1)$ 是 x_1+y_1 的年增加量，最后一行 $\overline{x_1+y_1}$ 是相应的年平均值．用 $\Delta(x_1+y_1)$ 和 $\overline{x_1+y_1}$ 的数据作图（图 6－4），图中圆点表示这组数据．它们的关系可以很好地用直线近似为

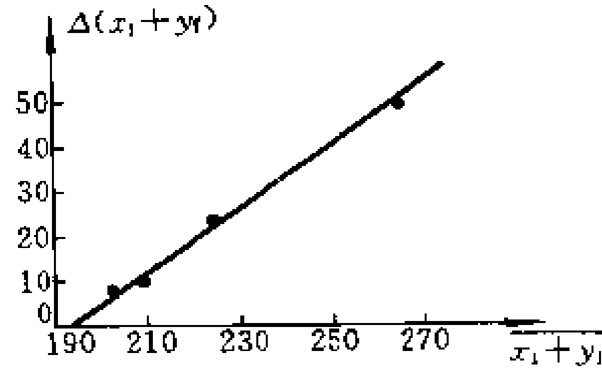


图 6－4 $\overline{x_1+y_1}$ 与 $\Delta(x_1+y_1)$ 的关系

$$\Delta(x_1+y_1)=0.73(\overline{x_1+y_1}-194) \tag{10}$$

表 6－1 两个同盟的军事预算（以百万英磅为单位）

	1909	1910	1911	1912	1913
法俄 x_1	115.3	119.4	127.8	145.0	166.7
德奥匈 y_1	83.9	85.4	87.1	93.7	122.3
x_1+y_1	199.2	204.8	214.9	238.7	289.0
$\Delta(x_1+y_1)$	5.6	10.1	23.8	50.3	
$\overline{x_1+y_1}$	202.0	209.8	226.8	263.8	

比较（9）和（10）式，（10）式的线性关系粗略地说明本节介绍的模型具有一定的合理性．同时（10）式的 $k-\alpha=0.73$ 也与前面

给出的估值 $k \doteq 0.9$，$\alpha \doteq 0.2$ 相符，由军事预算体现的军备将继续增加．事实上，两个同盟间的军备竞赛终于引发了第一次世界大战．

评注 用如此简单的模型描述错综复杂的军备竞赛过程也许难以令人信服，但是如果你没有更深入、可靠的知识去建立更满意的模型，那就不妨先做象本节这样的尝试．这种简化模型既是进一步研究的基础，也是建模方法的练习．

6.4 种群的相互竞争

当某个自然环境中只有一种生物的群体（生态学上称为**种群**）生存时，人们常用 Logistic 模型来描述这个种群数量的演变过程，即

$$\dot{x}(t)=rx\left(1-\frac{x}{N}\right) \tag{1}$$

$x(t)$是种群在时刻 t 的数量，r 是固有增长率，N 是环境资源容许的种群最大数量，在 1.4 节和 6.2 节我们曾应用过这种模型．由方程(1)可以直接得到，$x_0=N$ 是稳定平衡点，即 $t\to\infty$ 时 $x(t)\to N$．从模型本身的意义看这是明显的结果．

如果一个自然环境中有两个或两个以上种群生存，那么它们之间就要存在着或是相互竞争，或是相互依存，或是弱肉强食（食饵与捕食者）的关系．本节和下面两节将从稳定状态的角度分别讨论这些关系．

当两个种群为了争夺有限的同一种食物来源和生活空间而进行生存竞争时，最常见的结局是竞争力较弱的种群灭绝，竞争力较强的种群达到环境容许的最大数量．人们今天可以看到自然界长期演变成的这样的结局．例如一个小岛上虽然有四种燕子栖息，但是它们的食物来源各不相同，一种只在陆地上觅食，另两种分

别在浅水的海滩上和离岸稍远的海中捕鱼，第四种则飞越宽阔的海面到远方攫取海味，每一种燕子在它各自生存环境中的竞争力明显地强于其它几种．本节要建立一个模型解释类似的现象，并分析产生这种结局的条件[2,9,27,35,36]．

模型建立 有甲乙两个种群，当它们独自在一个自然环境中生存时，数量的演变均遵从 Logistic 规律．记 $x_1(t)$、$x_2(t)$是两个种群的数量，r_1、r_2是它们的固有增长率，N_1、N_2是它们的最大容量．于是对于种群甲有

$$\dot{x}_1(t)=r_1 x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}\right)$$

其中因子 $\left(1-\frac{x_1}{N_1}\right)$ 反映由于甲对有限资源的消耗导致的对它本身增长的阻滞作用，$\frac{x_1}{N_1}$ 可解释为相对于 N_1 而言单位数量的甲消耗的供养甲的食物量(设食物总量为 1)．

当两个种群在同一自然环境中生存时，考察由于乙消耗同一种有限资源对甲的增长产生的影响，可以合理地在因子 $\left(1-\frac{x_1}{N_1}\right)$ 中再减去一项，该项与种群乙的数量 x_2(相对于 N_2 而言)成正比，得到种群甲增长的方程

$$\dot{x}_1(t)=r_1 x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right) \tag{2}$$

这里 σ_1 的意义是，单位数量乙(相对 N_2 而言)消耗的供养甲的食物量为单位数量甲(相对 N_1)消耗的供养甲的食物量的 σ_1 倍．

类似地，甲的存在也影响了乙的增长，种群乙的方程应该是

$$\dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(1-\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right) \tag{3}$$

对 σ_2 可作相应的解释.

在两个种群的相互竞争中 σ_1、σ_2 是两个关键指标. 从上面对它们的解释可知, $\sigma_1>1$ 表示在消耗供养甲的资源中, 乙的消耗多于甲, 因而对甲增长的阻滞作用乙大于甲, 即乙的竞争力强于甲. 对 $\sigma_2>1$ 可作相应的理解.

一般地说, σ_1 与 σ_2 之间没有确定的关系, 但是可以把下面这种特殊情况作为较常见的一类实际情况的典型代表, 即两个种群在消耗资源中对甲增长的阻滞作用与对乙增长的阻滞作用相同. 具体地说就是, 因为单位数量的甲和乙消耗的供养甲的食物量之比是 $1:\sigma_1$, 消耗的供养乙的食物量之比是 $\sigma_2:1$, 所谓阻滞作用相同即 $1:\sigma_1=\sigma_2:1$, 所以这种特殊情形可以定量地表示为

$$\sigma_1\sigma_2=1 \tag{4}$$

即 σ_1、σ_2 互为倒数. 可以简单地理解为, 如果一个乙消耗的食物是一个甲的 $\sigma_1=k$ 倍, 则一个甲消耗的食物是一个乙的 $\sigma_2=1/k$.

下面我们仍然讨论 σ_1、σ_2 相互独立的一般情况, 而将条件(4)下对问题的分析留给读者(习题5).

稳定性分析 为了研究两个种群相互竞争的结局, 即 $t\to\infty$ 时 $x_1(t)$、$x_2(t)$的趋向, 不必要解方程(2)、(3)[*], 只需对它的平衡点进行稳定性分析.

首先根据微分方程(2)、(3)解代数方程组

$$\begin{cases} f(x_1,x_2)\equiv r_1x_1\left(1-\dfrac{x_1}{N_1}-\sigma_1\dfrac{x_2}{N_2}\right)=0 \\ g(x_1,x_2)\equiv r_2x_2\left(1-\sigma_2\dfrac{x_1}{N_1}-\dfrac{x_2}{N_2}\right)=0 \end{cases} \tag{5}$$

---

*) 事实上也无法求出 $x_1(t)$、$x_2(t)$的解析表达式.

得到 4 个平衡点：

$$P_1(N_1, 0),\ P_2(0, N_2),\ P_3\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\ \frac{N_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right),$$

$$P_4(0, 0)$$

因为仅当平衡点位于平面坐标系的第一象限时($x_1, x_2 \geqslant 0$)才有实际意义，所以对 P_3 而言要求 σ_1、σ_2 同时小于 1，或同时大于 1.

按照判断平衡点稳定性的方法(见 6.7 节(18)、(19)式)计算

$$A=\begin{bmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} \\ g_{x_1} & g_{x_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_1\left(1-\dfrac{2x_1}{N_1}-\dfrac{\sigma_1 x_2}{N_2}\right) & -\dfrac{r_1\sigma_1 x_1}{N_2} \\ -\dfrac{r_2\sigma_2 x_2}{N_1} & r_2\left(1-\dfrac{\sigma_2 x_1}{N_1}-\dfrac{2x_2}{N_2}\right) \end{bmatrix}$$

$$p=-(f_{x_1}+g_{x_2})|_{P_i},\quad i=1, 2, 3, 4$$

$$q=\det A\,|_{P_i},\quad i=1, 2, 3, 4$$

将 4 个平衡点 p、q 的结果及稳定条件列入表 6－2*).

表 6－2　种群竞争模型的平衡点及稳定性

平衡点	p	q	稳定条件
$P_1(N_1, 0)$	$r_1-r_2(1-\sigma_2)$	$-r_1r_2(1-\sigma_2)$	$\sigma_1<1, \sigma_2>1$
$P_2(0, N_2)$	$-r_1(1-\sigma_1)+r_2$	$-r_1r_2(1-\sigma_1)$	$\sigma_1>1, \sigma_2<1$
$P_3\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2}, \frac{N_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right)$	$\frac{r_1(1-\sigma_1)+r_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\frac{r_1r_2(1-\sigma_1)(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\sigma_1<1, \sigma_2<1$
$P_4(0, 0)$	$-(r_1+r_2)$	r_1r_2	不稳定

*) 表中最后一列“稳定条件”除了6.7 节(15)式给出的 $p>0$，$q>0$ 以外，还有其他原因，见下面的具体分析．

为了便于对平衡点 P_1、P_2、P_3 的稳定条件进行分析，在相平面上讨论它们．

在代数方程组(5)中记

$$\varphi(x_1, x_2) = 1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}$$

$$\psi(x_1, x_2) = 1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}$$

对于 σ_1、σ_2 的不同取值范围，直线 $\varphi=0$ 和 $\psi=0$ 在相平面上的相对位置不同，图 6－5 给出了它们的 4 种情况．

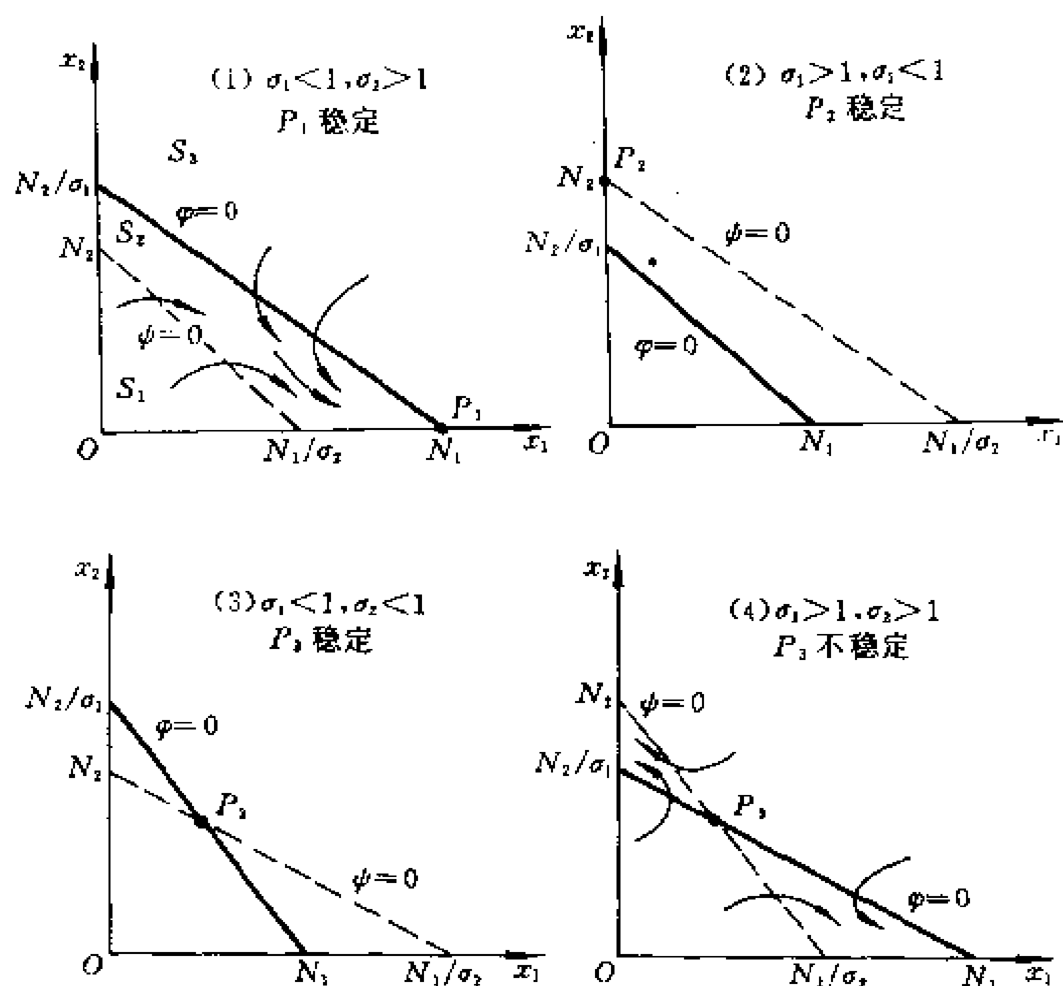


图 6－5　平衡点稳定性的相平面分析

下面分别对这 4 种情况进行分析.

1. $\sigma_1<1$, $\sigma_2>1$. 由表 6-2 知对于 $P_1(N_1,0)$ 有 $p>0$, $q>0$, P_1 稳定*). P_1 的稳定性还可以从 $t\to\infty$ 时相轨线的趋向来分析. 图 6-5(1)中 $\varphi=0$ 和 $\psi=0$ 两条直线将相平面($x_1\geqslant 0$, $x_2\geqslant 0$)划分为 3 个区域:

$$S_1: \dot{x}_1>0,\ \dot{x}_2>0 \tag{6}$$

$$S_2: \dot{x}_1>0,\ \dot{x}_2<0 \tag{7}$$

$$S_3: \dot{x}_1<0,\ \dot{x}_2<0 \tag{8}$$

可以证明, 不论轨线从哪个区域出发, $t\to\infty$ 时都将趋向 $P_1(N_1,0)$.

若轨线从 S_1 出发, 由(6)可知随着 t 的增加轨线向右上方运动, 必然进入 S_2;

若轨线从 S_2 出发, 由(7)可知轨线向右下方运动, 那么它或者趋向 P_1 点, 或者进入 S_3. 但是进入 S_3 是不可能的, 因为, 如果设轨线在某时刻 t_1 经直线 $\varphi=0$ 进入 S_3, 则 $\dot{x}_1(t_1)=0$, 由方程(2)不难算出

$$\ddot{x}_1(t_1)=-\frac{r_1\sigma_1}{N_2}x_1(t_1)\dot{x}_2(t_1)$$

由(7)、(8)知 $\dot{x}_2(t_1)<0$, 故 $\ddot{x}_1(t_1)>0$, 表明 $x_1(t)$ 在 t_1 达到极小值, 而这是不可能的, 因为在 S_2 中 $\dot{x}_1>0$, 即 $x_1(t)$ 一直是增加的;

若轨线从 S_3 出发, 由(8)可知轨线向左下方运动, 那么它或者趋向 P_1 点, 或者进入 S_2. 而进入 S_2 后, 根据上面的分析最终也将趋向 P_1.

综上分析可以画出轨线示意图(图 6-5(1)). 因为直线 $\varphi=0$ 上 $\mathrm{d}x_1=0$, 所以在 $\varphi=0$ 上轨线方向垂直于 x_1 轴; 在 $\psi=0$ 上 $\mathrm{d}x_2=0$, 轨线方向平行于 x_1 轴.

---

*) 实际上只须 $\sigma_2>1$ 就可保证 $p>0$, $q>0$, 加上条件 $\sigma_1<1$ 的原因见 4.

2. $\sigma_1>1$，$\sigma_2<1$. 类似的分析可知$P_2(0,N_2)$稳定.

3. $\sigma_1<1$，$\sigma_2<1$. 由表6-2知对于P_3点$p>0$，$q>0$，故P_3稳定. 对轨线趋势的分析留给读者（习题6）.

4. $\sigma_1>1$，$\sigma_2>1$. 由表6-2知对于P_3点$q<0$，故P_3不稳定（鞍点）. 轨线或者趋向P_1，或者趋向P_2，由轨线的初始位置决定，示意图见图6-5(4). 在这种情况下P_1和P_2都不能说是稳定的，正因为这样，所以P_1稳定（与初始条件无关）的条件需要加上$\sigma_1<1$. P_2稳定的条件加上$\sigma_2<1$.

结果解释 根据建模过程中σ_1、σ_2的含义，说明P_1、P_2、P_3点稳定在生态学上的意义.

1. $\sigma_1<1$，$\sigma_2>1$. $\sigma_1<1$意味着在对供养甲的资源的竞争中乙弱于甲，$\sigma_2>1$意味着在对供养乙的资源的竞争中甲强于乙，于是种群乙终将灭绝，种群甲趋向最大容量，即$x_1(t)$、$x_2(t)$趋向平衡点$P_1(N_1,0)$.

2. $\sigma_1<1$，$\sigma_2>1$. 情况与1正好相反.

3. $\sigma_1<1$、$\sigma_2<1$. 因为在竞争甲的资源中乙较弱，而在竞争乙的资源中甲较弱，于是可以达到一个双方共存的稳定的平衡状态P_3. 这是种群竞争中很少出现的情况.

4. $\sigma_1>1$，$\sigma_2>1$. 请读者作出解释.

生态学中有一个**竞争排斥原理**：若两个种群的单个成员消耗的资源差不多相同，而环境能承受的种群甲的最大容量比种群乙大，那么种群乙终将灭亡. 用本节的模型很容易解释这个原理.

将方程(2)、(3)改写为

$$\dot{x}_1(t)=r_1x_1\left(1-\frac{x_1+\sigma_1\dfrac{N_1}{N_2}x_2}{N_1}\right)$$

$$\dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(1-\frac{\sigma_2\dfrac{N_2}{N_1}x_1+x_2}{N_2}\right)$$

原理的两个条件相当于

$$\sigma_1 \frac{N_1}{N_2} = 1, \quad \sigma_2 \frac{N_2}{N_1} = 1, \quad N_1 > N_2$$

从这 3 个式子显然可得 $\sigma_1 < 1$，$\sigma_2 > 1$，这正是 P_1 稳定，即种群乙灭绝的条件．

6.5 种群的相互依存

自然界中处于同一环境下两个种群相互依存而共生的现象是很普遍的．植物可以独立生存，昆虫的授粉作用又可以提高植物的增长率，而以花粉为食物的昆虫却不能离开植物单独存活．人类与人工饲养的牲畜之间也有类似的关系．这种共生现象可以描述如下[2,36]．

设种群甲可以独立存在，按 Logistic 规律增长，种群乙为甲提供食物，有助于甲的增长．类似于 6.4 节的方程(2)，种群甲的数量演变规律可以写作(r_1、N_1、N_2 的意义同前)

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} + \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right) \tag{1}$$

6.4 节中 σ_1 前面的 − 号这里变成 + 号，表示乙不是消耗甲的资源而是为甲提供食物．σ_1 的含义是，单位数量乙(相对于 N_2)提供的供养甲的食物量为单位数量甲(相对于 N_1)消耗的供养甲食物量的 σ_1 倍．

种群乙没有甲的存在会灭亡，设其死亡率为 r_2，则乙单独存在时有

$$\dot{x}_2(t) = -r_2 x_2 \tag{2}$$

甲为乙提供食物，于是(2)式右端应加上甲对乙增长的促进作用，有

$$\dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(-1+\sigma_2\frac{x_1}{N_1}\right) \tag{3}$$

显然仅当 $\frac{\sigma_2 x_1}{N_1}>1$ 时种群乙的数量才会增长．与此同时乙的增长又会受到自身的阻滞作用，所以(3)式右端还要添加 Logistic 项，方程变为

$$\dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(-1+\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right) \tag{4}$$

方程(1)、(4)构成相互依存现象的数学模型．下面利用平衡点的稳定性分析，讨论时间足够长以后两个种群的变化趋向．

类似于6.4节的作法将方程(1)、(4)的平衡点及其稳定性分析的结果列入表6－3．

表6－3　种群依存模型的平衡点及稳定性

平衡点	p	q	稳定条件
$P_1(N_1,0)$	$r_1-r_2(\sigma_2-1)$	$-r_1r_2(\sigma_2-1)$	$\sigma_2<1$，$\sigma_1\sigma_2<1$
$P_2\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\frac{N_2(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right)$	$\frac{r_1(1-\sigma_1)+r_2(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\frac{r_1r_2(1-\sigma_1)(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\sigma_1<1$，$\sigma_2>1$，$\sigma_1\sigma_2<1$
$P_3(0,0)$	$-r_1+r_2$	$-r_1r_2$	不稳定

显然，P_2 点稳定才表明两个种群在同一环境里相互依存而共生，我们着重分析 P_2 稳定的条件．

由 P_2 点的表达式容易看出，要使平衡点 P_2 有实际意义，即位于相平面第一象限($x_1, x_2\geq 0$)，必须满足下面两个条件中的一个：

A_1：$\sigma_1<1$，$\sigma_2>1$，$\sigma_1\sigma_2<1$

A_2：$\sigma_1>1$，$\sigma_2<1$，$\sigma_1\sigma_2>1$

而由表6－3中 P_2 点的 p、q 可知，仅在条件 A_1 下 P_2 才是稳定

的（而在 A_2 下 P_2 是鞍点，不稳定）．图 6－6 画出了条件 A_1 下相轨线的示意图，其中 $\varphi = 1 - \frac{x_1}{N_1} + \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}$，$\psi = -1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}$．直线 $\varphi = 0$ 和 $\psi = 0$ 将相平面（$x_1, x_2 \geqslant 0$）划分成 4 个区域，S_1：$\dot{x}_1 > 0$，$\dot{x}_2 < 0$；S_2：$\dot{x}_1 > 0$，$\dot{x}_2 > 0$；S_3：$\dot{x}_1 < 0$，$\dot{x}_2 > 0$；S_4：$\dot{x}_1 < 0$，$\dot{x}_2 < 0$．从 4 个区域中 $\dot{x}_1$，$\dot{x}_2$ 的正负不难看出其相轨线的趋向如图所示．

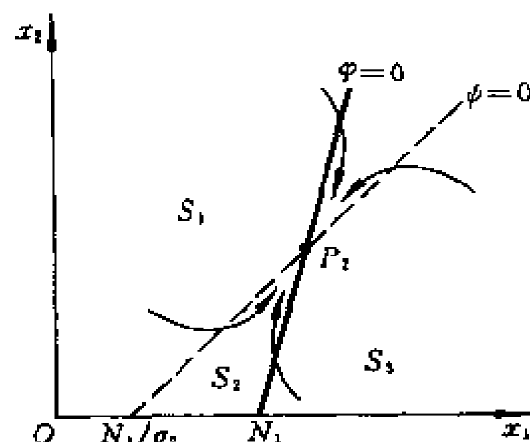


图 6－6 P_2 稳定的相轨线图

分析条件 A_1 的实际意义，其关键部分是 $\sigma_2 > 1$．考虑到 σ_2 的含义，这表示种群甲要为乙提供足够的食物维持其生长．而 $\sigma_1\sigma_2 < 1$ 则是在 $\sigma_2 > 1$ 条件下为使 P_2 位于相平面第一象限所必需的，当然这要求 σ_1 很小（$\sigma_1 < 1$ 是必要条件）．注意到 σ_1 的含义，这实际上是对乙向甲提供食物加以限制，以防止甲的过份增长．

在种群依存模型（1）、（4）中如果平衡点 $P_1(N_1, 0)$ 稳定，那么种群乙灭绝，没有种群的共存．请读者分析导致 P_1 稳定的条件及在生态学上的意义（习题 7）．

评注 模型（1）、（4）是种群相互依存的一种类型，即种群甲可独立生存，而种群乙不能．依存模型还有其它类型，如两个种群均能独立生存，及均不能独立生存的情况．这些情况的稳态结果如何，留作习题 8.9．

6.6 种群的弱肉强食

处于同一自然环境中两个种群之间的关系除了相互竞争和相互依存之外，还有一种更为有趣的生存方式：种群甲靠丰富的天

然资源生长，而种群乙则靠掠食甲为生．地中海里的食用鱼与鲨鱼，加拿大森林中的美洲兔与山猫，阿尔卑斯山中的落叶松与芽虫等都是这种生存方式的典型．生态学上种群甲称为食饵(Prey)，种群乙称为捕食者(Predator)，二者共处组成**食饵－捕食者系统**(简称 $P-P$ 系统)．二十世纪初以来一些生态学家、数学家对这个系统的数学模型和它的解的性质的研究，一直保持着浓厚的兴趣．本节只能介绍它的最初的、最简单的模型，这个模型的由来还有一段历史背景．

意大利生物学家 D'Ancona 曾致力于鱼类种群相互制约关系的研究，从第一次世界大战期间地中海各港口捕获的几种鱼类占捕获总量百分比的资料中，发现鲨鱼等(捕食者)的比例有明显的增加(见表 6－4)．他知道，捕获的各种鱼的比例基本上代表了地中海渔场中各种鱼的比例．战争中捕获量大幅度下降，当然使渔场中食用鱼(食饵)增加，以此为生的鲨鱼也随之增加．但是捕获量的下降为什么会使鲨鱼的比例增加，即对捕食者而不是对食饵更有利呢？他无法解释这个现象，于是求助于著名的意大利数学家 V．Volterra，希望建立一个食饵－捕食者系统的数学模型，定量地回答这个问题[9,27,35]．

表 6－4　一次大战期间地中海某港口捕获鲨鱼的比例

年　代	1914	1915	1916	1917	1918
百分比(%)	11.9	21.4	22.1	21.2	36.4
年　代	1919	1920	1921	1922	1923
百分比(%)	27.3	16.0	15.9	14.8	10.7

Volterra 模型　食饵和捕食者在时刻 t 的数量分别记作 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$．因为大海中资源丰富，可以假设如果食饵独立生存则将以增长率 r_1 按指数规律增长，即有 $\dot{x}_1=r_1x_1$．捕食者的存在使食饵的增长率降低，设降低的程度与捕食者数量成正比，于是

$x_1(t)$满足方程

$$\dot{x}_1(t) = x_1(r_1 - \lambda_1 x_2) \tag{1}$$

比例系数 λ_1 反映捕食者掠取食饵的能力.

捕食者离开食饵无法生存，若设它独自存在时死亡率为 r_2，即 $\dot{x}_2 = -r_2 x_2$，而食饵为它提供食物的作用相当于使死亡率降低，或使之增长. 设这个作用与食饵数量成正比，于是 $x_2(t)$满足

$$\dot{x}_2(t) = x_2(-r_2 + \lambda_2 x_1) \tag{2}$$

比例系数 λ_2 反映食饵对捕食者的供养能力.

方程(1)、(2)是在没有人工捕获情况下自然环境中食饵与捕食者之间的制约关系，是 Voletrra 提出的最简单的模型. 可以看出这个模型没有考虑自身的阻滞作用，即未引入 Logistic 项.

模型分析 仍然通过平衡点的稳定性分析，研究 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 的变化规律.

容易得到方程(1)、(2)的平衡点为

$$P_0\left(\frac{r_2}{\lambda_2}, \frac{r_1}{\lambda_1}\right), \quad P_0'(0, 0) \tag{3}$$

计算它们的 p、q 发现，对于 P_0'，$q<0$，P_0'不稳定；对于 P_0，$p=0$，$q>0$，处于临界状态，不能用判断线性方程平衡点稳定性的准则(见 6.7 节(15)、(16)式)讨论非线性方程(1)、(2)的平衡点 P_0的情况. 下面用分析相轨线的方法解决这个问题.

为确定相轨线，从(1)、(2)中消去 dt 得

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_1(r_1 - \lambda_1 x_2)}{x_2(-r_2 + \lambda_2 x_1)}$$

将变量分离后作积分得到

$$-r_2 \ln x_1 + \lambda_2 x_1 = r_1 \ln x_2 - \lambda_1 x_2 + c_1$$

上式可以写成

$$(x_1^{r_2} e^{-\lambda_2 x_1})(x_2^{r_1} e^{-\lambda_1 x_2}) = c \tag{4}$$

c是任意常数．为了研究由(4)式确定的相轨线的图形，记

$$\varphi(x_1)=x_1^{r_2}e^{-\lambda_2 x_1} \tag{5}$$

$$\psi(x_2)=x_2^{r_1}e^{-\lambda_1 x_2} \tag{6}$$

利用数学分析方法可以作出φ和ψ的图形(图6－7)，若它们的极大值分别记作φ_m和ψ_m，则不难确定x_1^0、x_2^0满足

$$\varphi(x_1^0)=\varphi_m,\ x_1^0=\frac{r_2}{\lambda_2} \tag{7}$$

$$\psi(x_2^0)=\psi_m,\ x_2^0=\frac{r_1}{\lambda_1} \tag{8}$$

显然仅当(4)式右端常数$c\leqslant\varphi_m\psi_m$时相轨线才有定义．

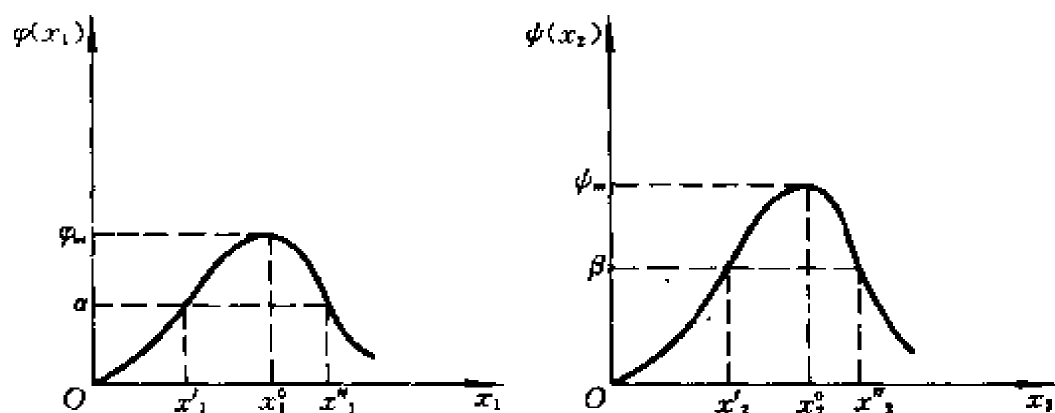


图6－7　φ和ψ的示意图

当$c=\varphi_m\psi_m$时，$x_1=x_1^0$，$x_2=x_2^0$，将(7)、(8)与(3)式比较可知(x_1^0,x_2^0)正是平衡点P_0，所以P_0是相轨线的退化点．

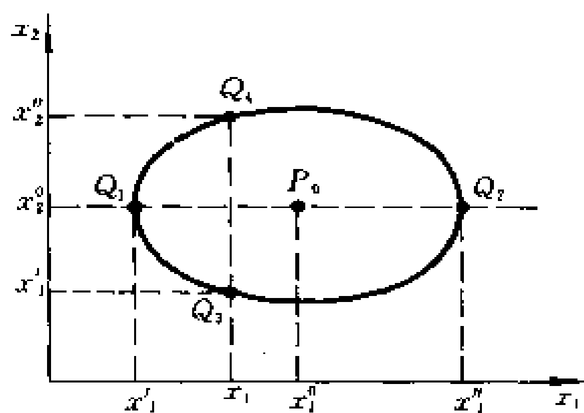


图6－8　P_0点和一条相轨线

为了考察$c<\varphi_m\psi_m$时$(c>0)$轨线的形状，首先设$c=\alpha\psi_m(0<\alpha<\varphi_m)$．若令$x_2=x_2^0$，则由(4)～(8)式可得$\varphi(x_1)=\alpha$．而从图

6－7 知道，必存在 x_1' 和 x_1'' 使 $\varphi(x_1')=\varphi(x_1'')=\alpha$，且 $x_1'<x_1^0<x_1''$. 于是这条轨线应通过 $Q_1(x_1', x_2^0)$ 和 $Q_2(x_1'', x_2^0)$ 点（图 6－8）. 接着，分析区间 (x_1', x_1'') 内的任一点 x_1. 因为 $\varphi(x_1)>\alpha$，代入 $\varphi(x_1)\psi(x_2)=\alpha\psi_m$ 可知 $\psi(x_2)<\psi_m$，记 $\psi(x_2)=\beta(<\psi_m)$，从图 6－7 知道，存在 x_2' 和 x_2'' 使 $\psi(x_2')=\psi(x_2'')=\beta$，且 $x_2'<x_2^0<x_2''$. 于是这条轨线又通过 $Q_3(x_1, x_2')$ 和 $Q_4(x_1, x_2'')$ 点（图 6－8）. 注意到 x_1 点是 (x_1', x_1'') 内的任意点，立即可知这条轨线必是如图所示的封闭曲线，同时它决不会越出区间 $[x_1', x_1'']$.

这样，对于不同的 c 值 $(0<c\leqslant\varphi_m\psi_m)$. 方程（1）、（2）的解（4）式确定的轨线是一族以平衡点 P_0 为中心的封闭曲线，称闭轨线族. 当 c 由 $\varphi_m\psi_m$ 变小时闭轨线向外扩展.

闭轨线的方向很容易确定. 考察相平面上被 $x_1=x_1^0$ 和 $x_2=x_2^0$ 两条直线分成的 4 个区域内 $\dot{x}_1$、$\dot{x}_2$ 的正负. 由方程（1）、（2）可得如图 6－9 所示的结果，因而决定了闭轨线如箭头表示的方向.

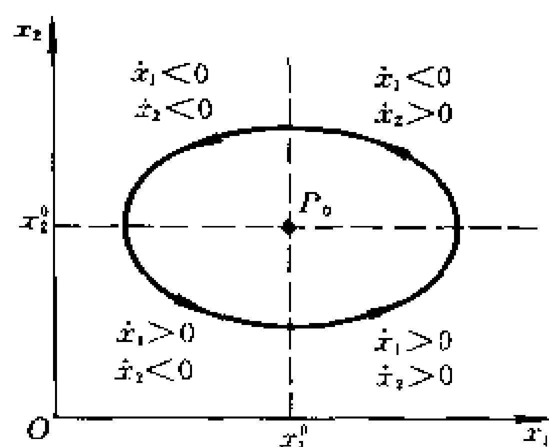


图 6－9 闭轨线族及其方向

闭轨线对应着方程的周期解 $x_1(t)$，$x_2(t)$，记周期为 T，图 6－10 画出了周期解的示意图，其增减性是由图 6－9 闭轨线的方向决定的. 可以看出，食饵 $x_1(t)$ 的变化比捕食者 $x_2(t)$ 提前了 $\frac{1}{4}T$.

闭轨线（周期解）的存在说明 $P_0(x_1^0, x_2^0)$ 点不是（渐近）稳定的. $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 分别在 x_1^0 和 x_2^0 上下振动. 我们只能用 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 在一周期 T 内的平均值作为食饵和捕食者数量的近似度量. 记这两个平均值分别为 $\overline{x_1}$ 和 $\overline{x_2}$. 因为方程（2）可写作

$$x_1(t)=\frac{1}{\lambda_2}\left(\frac{\dot{x}_2}{x_2}+r_2\right)$$

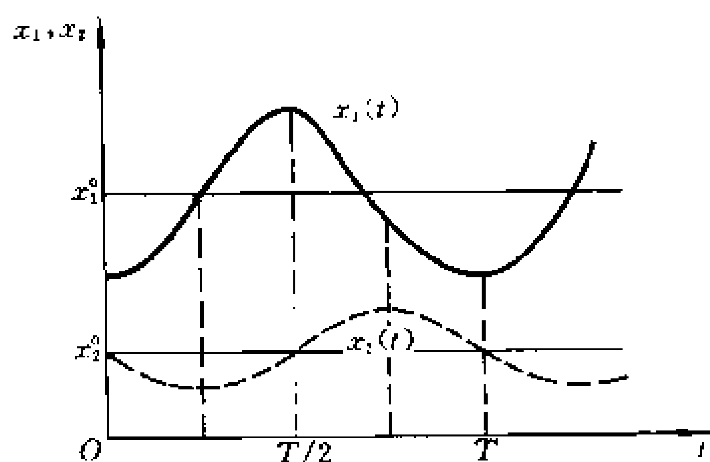


图 6-10 $x_1(t)$和$x_2(t)$的周期变化

所以容易由此算出 $x_1(t)$在 T 内的平均值(利用 $x_2(T)=x_2(0)$)

$$\overline{x_1}=\frac{1}{T}\int_0^T x_1(t)\,\mathrm{d}t=\frac{r_2}{\lambda_2}$$

类似地可得 $\overline{x_2}=\frac{r_1}{\lambda_1}$. 于是

$$\overline{x_1}=x_1^0=\frac{r_2}{\lambda_2}, \quad \overline{x_2}=x_2^0=\frac{r_1}{\lambda_1} \tag{9}$$

这表明食饵和捕食者在平衡点 P_0 的值正好代表了它们的(平均)数量.

模型解释 (9)式表明,食饵的数量取决于捕食者方程(2)中的两个参数 r_2 和 λ_2,而捕食者的数量取决于食饵方程(1)中的两个参数 r_1 和 λ_1. 当食饵的自然增长率 r_1 下降时捕食者的数量将减少,这就是说,在弱肉强食情况下降低弱者的繁殖率可以使强者减少. 而当捕食者掠取食饵的能力 λ_1 提高时也会使捕食者减少. 另一方面,捕食者死亡率 r_2 的下降,或者食饵对捕食者供养

能力 λ_2 的提高，都将导致食饵的减少．

为了用 Volterra 模型解释本节开头提出的战争期间捕获量下降对鲨鱼(捕食者)比对食用鱼(食饵)更有利的问题，需要在上述自然环境下所得结果的基础上考虑人工捕获的影响(图 6－11)．

设表示捕获能力的系数为 e，相当于食饵的自然增长率由 r_1 降为 r_1-e，捕食者的死亡率由 r_2 增为 r_2+e．用 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 表示这种情况下食饵和捕食者的数量，平衡点由 P_0 变为 P_0'，可以利用(9)式的结果得到 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 的平均值为

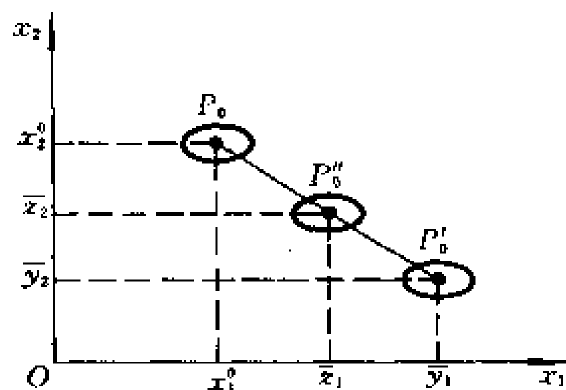


图 6－11　捕获系数的改变对食饵、捕食者数量的影响

$$\overline{y_1}=\frac{r_2+e}{\lambda_2}\ ,\ \overline{y_2}=\frac{r_1-e}{\lambda_1} \tag{10}$$

战争期间捕获系数由 e 下降为 e_1，食饵 $z_1(t)$ 和捕食者 $z_2(t)$ 的平均值为

$$\overline{z_1}=\frac{r_2+e_1}{\lambda_2}\ ,\ \overline{z_2}=\frac{r_1-e_1}{\lambda_1} \tag{11}$$

因为 $e_1<e$，所以显然有

$$\overline{z_1}<\overline{y_1}\ ,\ \overline{z_2}>\overline{y_2}$$

平衡点又变为 P_0''．这就是说，战争时期捕获能力的下降使食用鱼(食饵)数量减少，而鲨鱼(捕食者)数量增加．Volterra 用他的模型解释了 D'Ancona 提出的问题．

用 Volterra 模型还可以对使用杀虫剂的影响作出似乎出人意料的解释．自然界里不少以农作物为主的害虫都有它的天敌—益虫，益虫不吃农作物只吃害虫，是捕食者，害虫是它的食

饵．于是构成一个食饵 − 捕食者系统．如果某种杀虫剂不仅杀死害虫，也能杀死益虫，那么使用这种杀虫剂就相当于前面讨论的人工捕获鱼类．而比较(9)、(10)二式知

$$\overline{y_1} > \overline{x_1}\ ,\ \ \overline{y_2} < \overline{x_2}$$

这说明从长期效果看(平均意义下)，使用这种杀虫剂将使害虫增多，益虫减少，与使用者的愿望正好相反．

尽管 Volterra 模型可以解释一些现象，但是它作为近似反映现实对象的一个数学模型，必然有许多局限性．

首先，一般认为自然界里长期存在的呈周期变化的生态平衡系统都应该是结构稳定的，即系统受到不可避免的干扰而偏离原来的周期轨道后，其内部制约作用会使系统自动恢复原状，如恢复原有的周期和振幅．而 Volterra 模型的周期变化状态却不是结构稳定的，因为一旦离开某一条闭轨线，就进入另一条闭轨线(不同闭轨线的周期和振幅互不相同)，不可能恢复原状．

其次，许多生态学家指出，多数食饵 − 捕食者系统都观察不到 Volterra 模型显示的那种周期振荡，而是趋向于某个平衡状态，即系统存在稳定平衡点．

为了得到能反映周期变化的结构稳定的模型，需要利用极限环的概念．而要使食饵 − 捕食者系统趋向稳定平衡点，只需在 Volterra 模型中加入考虑自身阻滞作用的 Logistic 项即可．下面简单介绍这种模型．

另一个食饵 − 捕食者模型 为了便于与种群相互竞争模型(6.4 节)和种群相互依存模型(6.5 节)比较，仍引用那里的符号，于是 Volterra 方程(1)、(2)中加上 Logistic 项以后可以写成

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right) \tag{12}$$

$$\dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right) \tag{13}$$

这组方程的平衡点为

$$P_1(N_1,0),P_2\left(\frac{N_1(\sigma_1+1)}{1+\sigma_1\sigma_2},\ \frac{N_2(\sigma_2-1)}{1+\sigma_1\sigma_2}\right),P_3(0,0)$$

显然 P_2 点应该是在现实中观察到的食饵－捕食者系统的稳定平衡点．可以验证 P_2 点的稳定条件是 $\sigma_2>1$（习题 11）．因为 σ_2 表示的是食饵对捕食者的供养能力，所以只要它足够大，系统就会趋向二者共存的稳定状态．不过有兴趣的读者只要分析这个模型的相轨线，可以发现其趋向平衡点的方式与种群竞争和依存模型是完全不同的．

评注 用数学模型描述、分析食饵－捕食者系统的动态过程和稳定状态，不仅对生态学的研究有重要意义，而且因为它与微分方程定性理论有着密切联系，所以也引起了许多数学家的关注．对这个题目有兴趣的读者可参看进一步的文献．

在 6.4 ～ 6.6 三节中讨论了两个种群在同一自然环境下生存时相互关系的三种模型．可以看出，这些模型的结构相似，只是相互作用项、自身规律项（繁殖或死亡）的正负号不同．从统一的角度研究两个种群相互关系的模型可参看文献[2,50]．

6.7 微分方程稳定性理论简介

本节的介绍仅限于前面几节用到的有关内容．

一阶方程的平衡点及稳定性

设有微分方程

$$\dot{x}(t)=f(x) \tag{1}$$

右端不显含自变量 t，代数方程

$$f(x)=0 \tag{2}$$

的实根 $x=x_0$ 称为方程（1）的**平衡点**（或奇点）．它也是方程（1）的解（奇解）．

如果从所有可能的初始条件出发，方程（1）的解 $x(t)$ 都满足

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=x_0 \tag{3}$$

则称平衡点 x_0 是**稳定**的（稳定性理论中称渐近稳定）；否则，称 x_0 是**不稳定**的（不渐近稳定）.

判断平衡点 x_0 是否稳定通常有两种方法．利用定义即（3）式称间接法．不求方程（1）的解 $x(t)$，因而不利用（3）式的方法称直接法．下面介绍直接法．

将 $f(x)$ 在 x_0 点作台劳展开，只取一次项，方程（1）近似为

$$\dot{x}(t)=f'(x_0)(x-x_0) \tag{4}$$

（4）称为（1）的近似线性方程．x_0 也是方程（4）的平衡点．关于 x_0 点稳定性有如下的结论，

若 $f'(x_0)<0$，则 x_0 对于方程（4）和（1）都是稳定的；

若 $f'(x_0)>0$，则 x_0 对于方程（4）和（1）都是不稳定的．

x_0 对于方程（4）的稳定性很容易由定义（3）证明，因为（4）的一般解是

$$x(t)=ce^{f'(x_0)t}+x_0 \tag{5}$$

其中 c 是由初始条件决定的常数．

二阶（平面）方程的平衡点和稳定性

方程的一般形式可用两个一阶方程表为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t)=f(x_1,x_2) \\ \dot{x}_2(t)=g(x_1,x_2) \end{cases} \tag{6}$$

右端不显含 t．代数方程组

$$\begin{cases} f(x_1,x_2)=0 \\ g(x_1,x_2)=0 \end{cases} \tag{7}$$

的实根 $x_1=x_1^0$，$x_2=x_2^0$ 称为方程（6）的平衡点，记作 $P_0(x_1^0, x_2^0)$．

如果从所有可能的初始条件出发，方程（6）的解 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 都满足

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t)=x_1^0,\quad \lim_{t\to\infty} x_2(t)=x_2^0 \tag{8}$$

则称平衡点 P_0 是稳定的(渐近稳定);否则,称 P_0 是不稳定的(不渐近稳定).

为了用直接法讨论方程(6)的平衡点的稳定性,先看线性常系数方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t)=a_1x_1+a_2x_2 \\ \dot{x}_2(t)=b_1x_1+b_2x_2 \end{cases} \tag{9}$$

系数矩阵记作

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

并假定 A 的行列式

$$\det A\neq 0 \tag{11}$$

于是原点 $P_0(0,0)$是方程(9)的唯一平衡点,它的稳定性由(9)的特征方程

$$\det(A-\lambda I)=0 \tag{12}$$

的根 λ(特征根)决定.方程(12)可以写成更加明确的形式

$$\begin{cases} \lambda^2+p\lambda+q=0 \\ p=-(a_1+b_2) \\ q=\det A \end{cases} \tag{13}$$

将特征根记作 λ_1、λ_2,则

$$\lambda_1,\lambda_2=\frac{1}{2}\left(-p\pm\sqrt{p^2-4q}\right) \tag{14}$$

方程(9)的一般解具有形式 $c_1e^{\lambda_1t}+c_2e^{\lambda_2t}$($\lambda_1\neq\lambda_2$)或 $c_1e^{\lambda_1t}+c_2te^{-\lambda_1t}$($\lambda_1=\lambda_2$),$c_1$、$c_2$ 为任意常数.按照稳定性的定义(8)式可知,当 λ_1、λ_2 为负数或有负实部时 $P_0(0,0)$是稳定平衡点;而当 λ_1、λ_2 有一个为正数或有正实部时 $P_0(0,0)$是不稳定平衡

点.(在条件(11)下λ_1、λ_2不可能为零).

微分方程稳定性理论将平衡点分为结点、焦点、鞍点、中心等类型，完全由特征根λ_1、λ_2或相应的p、q取值决定.表6－5简明地给出了这些结果，表中最后一列指按照定义(8)式得到的关于稳定性的结论.

表6－5 由特征方程决定的平衡点的类型和稳定性

λ_1,λ_2	p,q	平衡点类型	稳定性
$\lambda_1<\lambda_2<0$	$p>0,q>0,p^2>4q$	稳定结点	稳定
$\lambda_1>\lambda_2>0$	$p<0,q>0,p^2>4q$	不稳定结点	不稳定
$\lambda_1<0<\lambda_2$	$q<0$	鞍点	不稳定
$\lambda_1=\lambda_2<0$	$p>0,q>0,p^2=4q$	稳定退化结点	稳定
$\lambda_1=\lambda_2>0$	$p<0,q>0,p^2=4q$	不稳定退化结点	不稳定
$\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i,\alpha<0$	$p>0,q>0,p^2<4q$	稳定焦点	稳定
$\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i,\alpha>0$	$p<0,q>0,p^2<4q$	不稳定焦点	不稳定
$\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i,\alpha=0$	$p=0,q>0$	中心	不稳定

由表6－5可以看出，根据特征方程的系数p、q的正负很容易判断平衡点的稳定性，准则如下：若

$$p>0,q>0 \tag{15}$$

则平衡点稳定；若

$$p<0 \text{ 或 } q<0 \tag{16}$$

则平衡点不稳定.

以上是对线性方程(9)的平衡点$P_0(0,0)$稳定性的结论，对于一般的非线性方程(6)，可以用近似线性方法判断其平衡点$P_0(x_1^0,x_2^0)$的稳定性.在P_0点将$f(x_1,x_2)$和$g(x_1,x_2)$作台劳展开，

只取一次项，得(6)的近似线性方程

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1(t)=f_{x_1}(x_1^0, x_2^0)(x_1-x_1^0)+f_{x_2}(x_1^0, x_2^0)(x_2-x_2^0) \\
\dot{x}_2(t)=g_{x_1}(x_1^0, x_2^0)(x_1-x_1^0)+g_{x_2}(x_1^0, x_2^0)(x_2-x_2^0)
\end{cases} \tag{17}
$$

系数矩阵记作

$$
A=\begin{bmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} \\ g_{x_1} & g_{x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{P_0(x_1^0, x_2^0)} \tag{18}
$$

特征方程系数为

$$
p=-(f_{x_1}+g_{x_2})|_{P_0}, \quad q=\det A \tag{19}
$$

显然，P_0 点对于方程(17)的稳定性由表 6－5 或准则(15)、(16)决定．而且已经证明了如下结论．

若方程(17)的特征根不为零或实部不为零，则 P_0 点对于方程(6)的稳定性与对于近似方程(17)的稳定性相同．

这样，P_0 点对于方程(6)的稳定性也由准则(15)、(16)决定．

习　题

1．在 6.1 节平衡状态的交通流模型中，从对于制动力(或驱动力)的假设(10)式及 $u(0)=u_m$ 出发，推导平衡状态下的速度和流量函数(12)和(13)式．

2．在交通流模型中如果假定制动力(或驱动力)与两车距离无关，推导平衡状态的速度和流量函数，这个结果符合实际吗？

3．在 6.2 节捕鱼模型中，如果渔场鱼量的自然增长仍服从 Logistic 规律，而单位时间捕捞量为常数 h，

① 分别就 $h<\frac{rN}{4}$、$h>\frac{rN}{4}$ 和 $h=\frac{rN}{4}$ 3 种情况讨论渔场鱼量方程的平衡点及其稳定状况．

② 如何获得最大持续产量，其结果与 6.2 节的产量模型有何不同．

4．与 Logistic 模型不同的另一种描述种群增长规律的是 Gompertz 模

型：

$$\dot{x}(t)=rx\ln\frac{N}{x}$$

其中 r 和 N 的意义与 Logistic 模型相同.

设渔场鱼量的自然增长服从这个模型，又单位时间捕捞量为 $h=Ex$. 讨论渔场鱼量的平衡点及其稳定性，求最大持续产量 h_m 及获得最大产量的捕捞强度 E_m 和渔场鱼量水平 x_0^*.

5. 在 6.4 节种群竞争模型中设 $\sigma_1\sigma_2=1\ (\sigma_1\neq\sigma_2)$，求平衡点并分析其稳定性.

6. 对于 6.4 节种群竞争模型的第 3 种情况：$\sigma_1<1$，$\sigma_2<1$ (图 6-5(3))，分析相轨线的趋势并画出示意图，解释平衡点 P_3 稳定的意义.

7. 在 6.5 节种群相互依存模型中，按以下 4 种情况作相轨线示意图，并解释平衡点稳定的意义.

① $\sigma_2<1$，$\sigma_1\sigma_2<1$

② $\sigma_2>1$，$\sigma_1\sigma_2>1$

③ $\sigma_1>1$，$\sigma_2<1$，$\sigma_1\sigma_2>1$

④ $\sigma_1<1$，$\sigma_2>1$，$\sigma_1\sigma_2<1$

(其中① 已经由图 6-6 给出，可作为参考)

8. 与 6.5 节的模型稍有不同，如果两个种群都能独立生存，共处时又能相互提供食物，试建立种群依存模型并讨论平衡点的稳定性，解释稳定的意义.

9. 对于第 8 题，如果两个种群都不能独立生存，但共处时可以相互提供食物，试建模以讨论共处的可能性.

10. 在 6.6 节食饵 - 捕食者系统中，如果在食饵方程 (1) 中增加自身阻滞作用的 Logistic 项，方程 (2) 不变，讨论平衡点及稳定性，解释其意义.

11. 如果在 6.6 节的食饵和捕食者方程中都增加 Logistic 项，即方程 (12)、(13)，讨论平衡点及稳定性.

12. 如果在食饵 - 捕食者系统中，捕食者掠食的对象只是成年的食饵，而未成年的食饵因体积太小免遭捕获. 在适当的假设下建立这三者之间关系的模型，求平衡点[9].

*13. 一个岛屿上栖居着食肉爬行动物和哺乳动物，又长着茂盛的植物. 爬行动物以哺乳动物为食物，哺乳动物又依赖植物生存. 在适当假设下建立

三者之间关系的模型，求平衡点[9]．

*14．大陆上物种数目是常数，各物种独立地从大陆向附近一岛屿迁移．岛上物种数量的增加与尚未迁移的物种数目有关，而随着迁移物种数的增加又导致岛上物种的减少．在适当假设下建立岛上物种数的模型，并讨论稳定状况[27]．

*15．人体注射葡萄糖溶液时，血液中葡萄糖浓度 $g(t)$ 的增长率与注射速率 r 成正比，与人体血液体积 v 成反比，而由于人体组织的吸收作用，$g(t)$ 的减少率与 $g(t)$ 本身成正比．分别在以下几种假设下建立模型，并讨论稳定情况．

① 人体血液体积 v 不变．

② v 随着注入溶液而增加．

③ 由于排泄等因素 v 的增加有极限值．

④ 注射是间断进行的[27]．

*16．讨论资金积累、国民收入与人口增长的关系．

① 若国民平均收入 x 与按人口平均资金积累 y 成正比，说明仅当总资金积累的相对增长率 k 大于人口的相对增长率 r 时，国民平均收入才是增长的．

② 作出 $k(x)$ 和 $r(x)$ 的示意图，说明二曲线交点是平衡点，讨论它的稳定性．

③ 分析人口激增会引起什么后果[4]．

*17．讨论另一种捕鱼业持续收获的效益模型．设渔场鱼量方程仍为 6.2 节(3)式，但捕捞强度为变量 $E(t)$，其变化规律是，当单位时间收入 T 大于支出 S 时(见 6.2 节(9)式)E 增加，T 小于 S 时 E 减少，E 的变化率与 $T-S$ 成正比．

① 建立关于 $E(t)$ 的方程，求 $x(t)$，$E(t)$ 的平衡点并讨论其稳定性．

② 将所得结果与 6.2 节的效益模型和捕捞过度模型进行比较[36]．

第7章　变分法建模（动态优化模型）

我们已经看到，动态过程常常用微分方程模型描述，基于动态过程的优化问题一般要归结为求最优控制函数使某个泛函达到极值．当控制函数可以事先确定为某种特殊的函数形式时，问题又简化为求普通函数的极值．本章将从具体的研究对象出发给出几个动态优化模型的实例．

求解泛函极值通常有两种方法：古典变分法和最优控制论．因为后者需要较多的现代控制理论，本书无意涉及，所以这里选择的都是可以用变分法解决的问题．不熟悉变分法的读者可参阅7.8节．

7.1　生产计划的制订

工厂与客户签订了一项在某时刻提交一定数量产品的合同，在制订生产计划时要考虑生产和贮存两种费用．生产费用通常取决于生产率(单位时间的产量)，生产率越高费用越大；贮存费用自然由已经生产出来的产品数量决定，数量越多费用越大．所谓生产计划这里简单地看作是到每一时刻为止的累积产量，它与每单位时间(如每天)的产量可以互相推算．建模目的是寻求最优的生产计划，使完成合同所需的总费用(生产与贮存费用之和)最小[20]．

假设　开始生产时刻记为 $t=0$，按照合同应在 $t=T$ 提交数量为 Q 的产品．到时刻 t 为止的产量记作 $x(t)$，$x(t)$即生产计划．因为时刻 t 的生产率表示为 $\dot{x}(t)$，所以单位时间的生产费用可以一般地记作 $f(\dot{x}(t))$，而单位时间的贮存费用则应记为 $g(x(t))$．于是从 $t=0$ 到 $t=T$ 的总费用 $C(x(t))$ 是

$$C(x(t))=\int_0^T[f(\dot{x}(t))+g(x(t))]\mathrm{d}t \tag{1}$$

为了确定f和g的具体形式作如下假设.

1.单位时间内生产率提高一个单位所需的生产费用与这时的生产率成正比.在需求饱满、生产率很高的工厂里这个假设是合理的.

2.贮存费与贮存量(即累积产量)成正比.这是关于贮存费的最常用的假设.

假设1表明,生产费f对生产率$\dot{x}$的变化率与$\dot{x}$成正比,即

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\dot{x}}\propto\dot{x}$$

于是

$$f(\dot{x}(t))=k_1\dot{x}^2(t) \tag{2}$$

k_1是比例系数.由假设2则可以直接写出

$$g(x(t))=k_2x(t) \tag{3}$$

k_2是单位数量产品单位时间的贮存费.

建模 将(2)、(3)代入(1)式并注意到$x(t)$在$t=0$和$t=T$时的值,我们有

$$C(x(t))=\int_0^T[k_1\dot{x}^2(t)+k_2x(t)]\mathrm{d}t \tag{4}$$

$$x(0)=0,\ x(T)=Q \tag{5}$$

制订最优生产计划归结为在固定端点条件(5)下,求$x(t)$使(4)式定义的泛函$C(x(t))$取得最小值.

用变分法求解.记$F(t,x,\dot{x})=k_1\dot{x}^2+k_2x$,根据欧拉方程(见7.8节(11)式)

$$F_x(t,x,\dot{x})-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})=0$$

可得关于 $x(t)$的二阶微分方程

$$k_2-2k_1\ddot{x}(t)=0 \tag{6}$$

方程(6)在端点条件(5)下的解为

$$x(t)=\frac{k_2}{4k_1}t^2+\frac{4k_1Q-k_2T^2}{4k_1T}t \tag{7}$$

这就是使总费用 $C(x(t))$达到最小的生产计划．

由(7)式不难画出 $x(t)$的示意图(图7－1)，它是过 $x(0)=0$，$x(T)=Q$ 两点的抛物线，且因 $\ddot{x}(t)>0$ 而呈下凸状．随着参数 k_1、k_2、T、Q 的不同，曲线$x(t)$可能有 S_1 和 S_2 两种形状．但是对于生产计划 $x(t)$ 应该有明显的限制条件

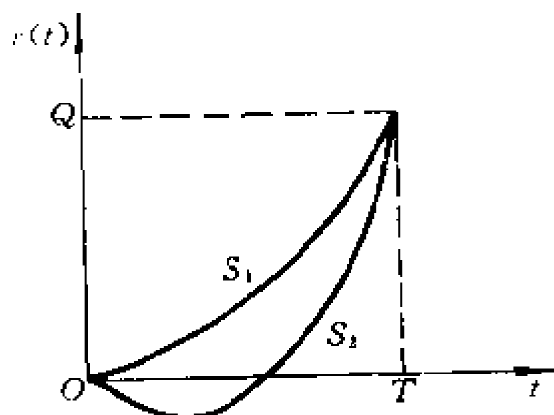


图 7－1　$x(t)$的两种形式

$$x(t)\geqslant 0,\ 0\leqslant t\leqslant T \tag{8}$$

这就是说，只有当 $x(t)$呈S_1 形状时才有实际意义．

容易看出，对于(7)式表示的 $x(t)$条件(8)等价于

$$\dot{x}(0)\geqslant 0 \tag{9}$$

由(7)式算出 $\dot{x}(0)$，可知(9)式又表示为

$$Q\geqslant\frac{k_2T^2}{4k_1} \tag{10}$$

于是仅当(10)式成立时(7)式确定的 $x(t)$才是最优生产计划．

当 k_1，k_2 固定时条件(10)表明，在一定交货期 T 内要完成的产量 Q 相当大，需要从 $t=0$ 就开始生产，如图中曲线 S_1．

但是，当

$$Q<\frac{k_2T^2}{4k_1} \tag{11}$$

即在 T 内要完成的产量 Q 较小时最优生产计划是什么呢？

直观的想法是为了节省贮存费用，到 $t=t_1$ 才开始生产，如图7－2的曲线 S_3 所示．S_3 是否就是如(7)式所示、图7－1中曲线 S_2 在 $x\geqslant 0$ 的那一部分呢？如果不是，时刻 t_1 和曲线 S_3 又如何确定(习题1)．

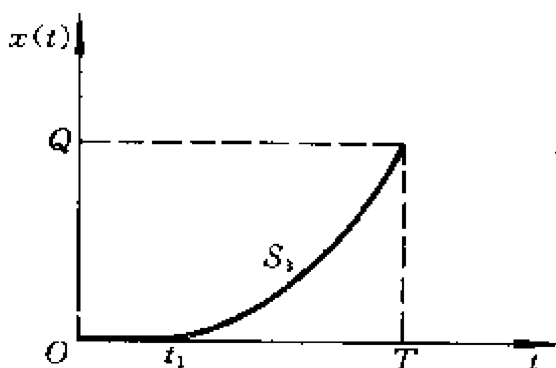


图7－2 条件(11)下的 $x(t)$

解释 为了对最优生产计划作出解释，考察它满足的方程(6)式，(6)式可以表示为

$$k_2=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\dot{x}}(k_1\dot{x}^2)\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\dot{x}}\right) \tag{12}$$

式中 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\dot{x}}$ 是单位时间内生产率提高一个单位所需的生产费用，经济理论中称为边际成本．而 k_2(单位时间单位数量产品的贮存费)称为边际贮存．于是(12)式表明，使边际成本的变化率等于边际贮存的生产计划是最优的．

评注 优化模型通常包括目标函数和约束条件(或寻优范围)两部分．在这个模型中目标函数只考虑了两种最基本的费用，并对它们作了相当简化的假设．至于约束条件，由于我们要用古典变分法求解，所以 $x(t)$ 除了要满足端点条件(5)以外，还需假定它是二阶可微函数．这个条件并不影响(7)式的最优意义，因为

一般说来不会存在一个不满足二阶可微条件的、比(7)式更优的解．但是在另一些约束条件下问题就较难处理了．如这个模型应该要求 $x(t)\geq 0$，我们看到当参数满足条件(11)时最优解已经需要仔细考虑．若还要对生产率加以限制，譬如规定一个范围即 $A\leq \dot{x}(t)\leq B$，则问题的求解更加困难．实际上，对控制函数施加的这类闭集约束，可能导致古典变分法的失败．

7.2 生产与贮存的控制

一个集生产、销售于一体的公司，希望生产率和贮存量都尽量稳定在预先设定的水平上．如果销售量可以准确地预测，公司需要制订一个根据贮存量控制生产率的策略．

下面先建立这个问题的一般模型，再在简单的特殊情况下讨论求解过程及对结果的解释．

一般模型 记时刻 t 的贮存量为 $x(t)$，单位时间的产量和销量分别为 $u(t)$ 和 $v(t)$，则它们满足

$$\dot{x}(t)=u(t)-v(t) \tag{1}$$

其中 $v(t)$ 是已知函数．

预先设定的生产率(即单位时间产量)和贮存量分别记为 u_0 和 x_0．使生产率 $u(t)$ 和贮存量 $x(t)$ 尽量分别稳定在 u_0 和 x_0 的水平上，这句话用数学式子可以表示为，求控制函数 $u(t)$ 使

$$J(u(t))=\int_0^T\left[\frac{1}{2}(u(t)-u_0)^2+\frac{\alpha^2}{2}(x(t)-x_0)^2\right]\mathrm{d}t \tag{2}$$

达到最小值，其中 T 是任意给定的时间，α 是加权因子，用来调节 $u(t)$ 稳定和 $x(t)$ 稳定二者之间的重要程度，并应具有时间倒数的量纲．(2)式称为二次型目标泛函．在(1)、(2)中贮存量 $x(t)$ 是状态函数，为确定起见不妨设 $t=0$ 和 $t=T$ 时贮存量为零，即固定端点条件

$$x(0)=0,x(T)=0 \tag{3}$$

另外，实际上对生产率和贮存量都会有所限制，不妨记作

$$0\leqslant u(t)\leqslant u_m,0\leqslant x(t)\leqslant x_m \tag{4}$$

问题归结为在约束条件(1)、(3)、(4)下求 $u(t)$使(2)式之泛函 J 达到最小值.

从(1)式中解出 $u(t)$代入(2)式，并将其写成 $x(t)$的泛函

$$J(x(t))=\int_0^T\left[\frac{1}{2}(\dot{x}(t)+v(t)-u_0)^2+\frac{\alpha^2}{2}(x(t)-x_0)^2\right]\mathrm{d}t \tag{5}$$

暂不考虑条件(4),则(3)、(5)构成一个固有端点的泛函极值问题，可用变分法求解. 得到最优解 $x(t)$后再代回方程(1)，即可得到最优控制函数.

销量为常数的情况 为简化求解过程，设销量为已知常数即

$$v(t)=v_0 \tag{6}$$

以(6)代入(5)式，根据欧拉方程可得最优解 $x(t)$应满足方程

$$\alpha^2(x-x_0)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}+v_0-u_0)=0$$

即

$$\ddot{x}-\alpha^2(x-x_0)=0 \tag{7}$$

方程(7)在端点条件(3)下的解为

$$x(t)=x_0-x_0\frac{(1-e^{-\alpha T})e^{\alpha t}+(e^{\alpha T}-1)e^{-\alpha t}}{e^{\alpha T}-e^{-\alpha T}} \tag{8}$$

将(8)代入(1)式得

$$u(t)=v_0-\alpha x_0\frac{(1-e^{-\alpha T})e^{\alpha t}-(e^{\alpha T}-1)e^{-\alpha t}}{e^{\alpha T}-e^{-\alpha T}} \tag{9}$$

(9)和(8)分别为最优控制函数和最优状态函数.

为了研究最优解 $u(t)$和 $x(t)$之间的关系,由(8)、(9)两式可以得到

$$u(t)=v_0+\alpha(x_0-x(t))-\frac{2\alpha x_0(1-e^{-\alpha T})}{e^{\alpha T}-e^{-\alpha T}}e^{\alpha t} \tag{10}$$

令 $T\to\infty$,则对任意有限的 t,上式右端最后一项趋于零,于是有

$$u=v_0+\alpha(x_0-x) \tag{11}$$

此式表明,根据状态 x(贮存量)可以直接确定控制函数 u(生产率),而不涉及自变量 t(时间),并且当 x 增加时 u 减少,这种控制方式称为**状态负反馈**.它比形如(9)式的显含 t 的控制函数应用起来方便得多,因为只需根据易于观测的状态 x 就可以决定控制量 u.

最后考察约束条件(4).利用双曲函数可将(8)、(9)两式重新表示为

$$x(t)=x_0\left[1-\frac{\mathrm{sh}\alpha(T-t)+\mathrm{sh}\,\alpha t}{\mathrm{sh}\alpha T}\right] \tag{12}$$

$$u(t)=v_0+\alpha x_0\frac{\mathrm{ch}\alpha(T-t)-\mathrm{ch}\alpha t}{\mathrm{sh}\,\alpha T} \tag{13}$$

根据(12)、(13)式图 7-3 画出了最优解 $x(t)$和 $u(t)$的示意图.可以看出,只要 $x_m\geqslant x_0$,就有 $0\leqslant x(t)\leqslant x_m$,即 $x(t)$满足条件(4).而给出的参数 x_m 和 x_0 自然应该有 $x_m\geqslant x_0$.另一方面,因为

$$\max_{0\leq t\leq T} u(t)=u(0)=v_0+\alpha x_0\frac{\mathrm{ch}\alpha T-1}{\mathrm{sh}\,\alpha T}$$

$$\min_{0\leq t\leq T} u(t)=u(T)=v_0-\alpha x_0\frac{\mathrm{ch}\alpha T-1}{\mathrm{sh}\alpha T}$$

所以只要 $u(0)\leq u_m, u(T)\geq 0$，就有 $0\leq u(t)\leq u_m$．在这样的条件下(8)、(9)两式给出的 $x(t)$，$u(t)$ 也是考虑到约束条件(4)的原问题的最优解，因为在约束条件的边界上泛函极值问题(3)、(5)不可能得到优于(8)、(9)的解．

但是，如果(8)、(9)表示的 $x(t)$，$u(t)$ 越出了条件(4)的限制，就会出现类似7.1节条件(11)下的问题，模型求解将变得非常复杂，变分法会无能为力．

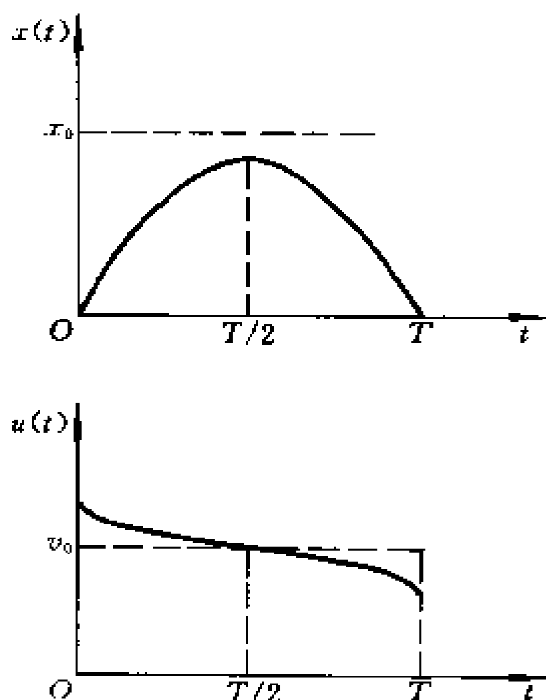


图 7－3　最优解 $x(t)$ 和 $u(t)$ 的图形

7.3　国民收入的增长

国民经济收入主要用于两个方面：扩大再生产的积累资金和满足人民生活需要的消费资金．如何安排积累和消费资金的比例使国民收入得到最快的增长，是一个重大的理论和实践问题．本节仅从最优控制的角度介绍一个十分简化的模型．

一般模型　将时刻 t 的国民经济收入记作 $x(t)$，其中用于积累资金的部分记作 $y(t)$，积累资金在国民经济收入中占的比例 $u(t)=\dfrac{y(t)}{x(t)}$ 称为**积累率**．建模的目的是寻求最优积累率 $u(t)$

使国民收入 $x(t)$增长最快．下面给出模型的一般形式．

国民收入的增长率 $\dot{x}(t)$取决于当时的收入总值 $x(t)$和积累率 $u(t)$，可以表示为

$$\dot{x}(t)=f(t,x,u) \tag{1}$$

考虑一段时间 T(一个五年或十年计划)，使 $x(t)$从初值 x_0 达到尽可能大的 $x(T)$，即

$$x(0)=x_0 \tag{2}$$

$$\max x(T) \tag{3}$$

问题归结为在条件(1)、(2)下求$u(t)$满足(3)．而这又等价于它的对偶问题：在固定端点条件 $x(T)=x_1$ 下使 T 最小．于是若记

$$x(0)=x_0, x(T)=x_1 \tag{4}$$

$$J(u(t))=\int_0^T \mathrm{d}t \tag{5}$$

则模型的一般提法是在条件(1)、(4)下求$u(t)$使(5)式的 J 达到最小．这是我们熟悉的泛函极值问题的形式．

按照泛函的条件极值问题的解法(见 7.8 节(24)～(30)式)构造哈密尔顿函数

$$H=1+\lambda f(t,x,u) \tag{6}$$

并得到方程组

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t)=-\lambda f_x(t,x,u) \\ \lambda f_u(t,x,u)=0 \\ \dot{x}(t)=f(t,x,u) \\ x(0)=x_0, x(T)=x_1 \end{cases} \tag{7}$$

由此求解最优控制函数 $u(t)$和最优状态(即最优轨线)$x(t)$．

简化模型 为了确定函数f具体的、简化的形式我们粗略地考虑这样的经济规律：当积累率u较小时，国民收入的相对增长率$\frac{\dot{x}}{x}$随着u的增加而增加，这是因为积累资金的扩大再生产起着促进作用；随着u的变大$\frac{\dot{x}}{x}$增加得越来越慢；当u增到一定程度后$\frac{\dot{x}}{x}$反而会减小，这是由于消费资金比例太小，各种制约因素导致国民收入下降．描述这种规律的最简单的模型是

$$\frac{\dot{x}}{x}=u(a-bu) \tag{8}$$

其中a、b为常数，可以根据统计数据或经验估计．

比较(1)、(8)式得到$f=u(a-bu)x$，代入方程(7)得

$$\begin{cases} \dot{\lambda}=-\lambda u(a-bu) \\ \lambda(a-2bu)x=0 \\ \dot{x}=u(a-bu)x \\ x(0)=x_0,x(T)=x_1 \end{cases} \tag{9}$$

方程(9)的解为

$$u(t)=\frac{a}{2b} \tag{10}$$

$$x(t)=x_0e^{\frac{a^2}{4b}t} \tag{11}$$

即最优积累率是常数$\frac{a}{2b}$，这时国民收入以指数形式(11)增长，用最短时间

$$T=\frac{4b}{a^2}\ln\frac{x_1}{x_0} \tag{12}$$

从 x_0 上升到 x_1.

评注 一般情况下国民收入依赖于积累率的最优增长是典型的快速控制问题(1)、(4)、(5),最优解要从非线性方程组(7)得到.而在我们对国民收入的简化假设(8)下,得到的是平凡解——常数 $\frac{a}{2b}$.实际上,对于这种简单情况不必求解泛函极值问题.由(8)式可以直接看出,当 $u=\frac{a}{2b}$ 时 $\dot{x}$ 最大,所以 $u(t)=\frac{a}{2b}$ 必定是模型的最优控制函数.

7.4 林木砍伐的最佳时机

林业是一项投资大、周期长的经营活动.设想某公司从银行贷款租地、雇工、购买幼苗,种树成林,几年、几十年后开始伐林出售木材,向银行还本付息.显然,经营者面临着一个什么时候砍伐林木才能获得最大经济效益的问题.伐林太早,树尚未成材,出售得到的收入自然较少;伐林太晚,树木生长已经减缓,木材量增加换来的收入可能尚不足抵消贷款利息的付出.

要建立一个模型决定林木砍伐的最佳时机,除了需要对树木生长规律、砍伐方式作出适当的简化假设外,还要就木材售价、种植和砍伐的费用、银行贷款利率、通货膨胀率等给出合理的描述[32].

模型假设

1.一棵树的生长遵从 Logistic 规律,即

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=rx\left(1-\frac{x}{x_m}\right) \\ x(0)=x_0 \end{cases} \tag{1}$$

$x(t)$是时刻 t 树木的成材量,r 是固有增长率,x_m 是最大成材量.

经营者共种植 N 棵树，每棵树都按相同的规律(1)生长.

2. N 棵树一次砍伐. 由于砍伐时间(几天或几周)与树木生长时间相比很短，可认为砍伐在瞬时完成.

3. 单位体积木材的售价为 $p(t)$，砍伐林木、种植幼苗等费用为 $c(t)$，经营者时刻 t 伐林所得利润为

$$R(t)=Nx(t)p(t)-c(t) \tag{2}$$

4. 通货膨胀率为 γ 记 $p=p(0)$，$c=c(0)$，则[*)]

$$p(t)=pe^{\gamma t}, c(t)=ce^{\gamma t} \tag{3}$$

5. 银行贷款利率为 μ，即若 $t=0$ 时贷款 M_0，则时刻 t 应归还本息共

$$M(t)=M_0e^{\mu t} \tag{4}$$

建模与求解 模型的目标函数显然应该是经营者的利润，但是不能简单地取作(2)式的 $R(t)$，因为经营者贷款后要按照(4)式的关系还本付息，所以要将时刻 t 的利润 $R(t)$ 折算到 $t=0$ 时的价值，才是合理的目标函数，记为 $F(t)$，有

$$F(t)=e^{-\mu t}R(t) \tag{5}$$

将(2)、(3)代入(5)式得

$$F(t)=e^{-\mu t}e^{\gamma t}[Npx(t)-c] \tag{6}$$

记

$$V(t)=Npx(t)-c \tag{7}$$

$$\delta=\mu-\gamma \tag{8}$$

则

$$F(t)=e^{-\delta t}V(t) \tag{9}$$

---

*) 通货膨胀率即货币贬值率，定义为价格的相对上涨率 $\gamma=\frac{\dot{p}(t)}{p(t)}=\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}$，由此可得(3)式.

这里 $V(t)$是除去通货膨胀因素以后木材的实际价值(折合到 $t=0$ 时的价值). δ 是贷款利率与通货膨胀率之差，称**折扣因子**.是经营者付给银行的实际利率，通常 $\delta>0$.*)

以 $F(t)$为目标函数确定砍伐林木的最佳时刻，归结为求 t 使 $F(t)$达到最大. 因为

$$\dot{F}(t)=e^{-\delta t}(\dot{V}(t)-\delta V(t)) \tag{10}$$

$$\ddot{F}(t)=e^{-\delta t}[\ddot{V}(t)-2\delta(\dot{V}(t)-\delta V(t))-\delta^2 V(t)] \tag{11}$$

所以在 $t=t^*$,$F(t^*)$取得极大值的充分条件为

$$\dot{V}(t^*)=\delta V(t^*) \tag{12}$$

$$\ddot{V}(t^*)<\delta^2 V(t^*) \tag{13}$$

为了得到具体的结果需要将方程(1)的解 $x(t)$代入(7)式，我们曾经给出过(1.4 节(7)式)

$$x(t)=\frac{x_m}{1+\left(\frac{x_m}{x_0}-1\right)e^{-rt}}$$

于是

$$V(t)=\frac{Np\,x_m}{1+be^{-rt}}-c\,,\ 1+b=\frac{x_m}{x_0} \tag{14}$$

因为 x_0 足够小，x_m 足够大，所以可以合理地假定

$$V(0)=Np\,x_0-c<0 \tag{15}$$

$$V(\infty)=V_\infty=Npx_m-c>0 \tag{16}$$

由(7)式可知 $V(t)$的图形与 $x(t)$的图形相似，只是下移了距离

---

*) 即$\mu>\gamma$.因为如果 μ(贷款利率)$<\gamma$(通货膨胀率)，那么人们只要靠贷款买进货物，过一段时间出售就可以发财，于是不再会有任何投资经营产业(如林业)的活动了.

c.在图 7－4 中画出了 $V(t)$的示意图，其中 $t_0=\dfrac{1}{r}\ln\dfrac{bc}{V_\infty}$.根据这个图形如果知道了 $V(t^*)$，便可以按箭头方向得到 t^*.

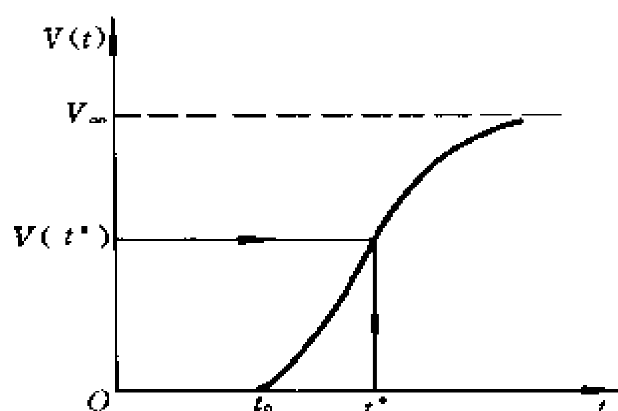


图 7－4　由 $V(t^*)$确定 t^*

为了利用(12)式确定 $V(t^*)$，由(14)式计算

$$\dot V(t)=\frac{Npx_m bre^{-rt}}{(1+be^{-rt})^2}$$

$$=\frac{r}{Npx_m}(V(t)+c)(V_\infty-V(t))$$

代入(12)式得

$$(V(t^*)+c)(V_\infty-V(t^*))=\frac{Npx_m\delta}{r}V(t^*) \qquad (17)$$

(17)式是关于 $V(t^*)$的二次方程，$V(t^*)$应该是这个方程的正根.正根的存在和唯一性可以从方程的图解法看出(图 7－5)，它是抛物线 $y=(V+c)(V_\infty-V)$和直线 $y=\dfrac{Npx_m\delta}{r}V$ 的交点的横坐标.

这样，通过图 7－4、图 7－5(或(14)～(17)式)唯一确定了满足(12)式的 t^*.

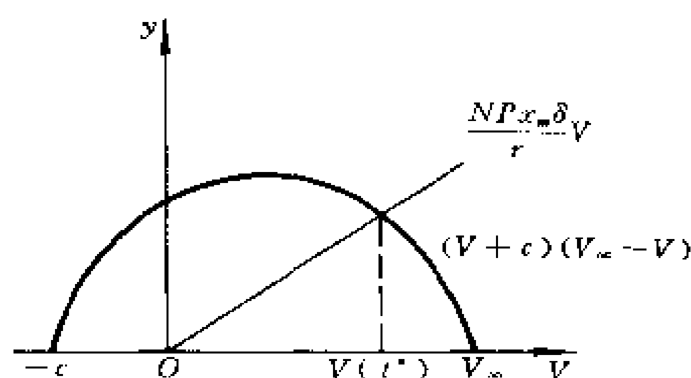


图 7－5　$V(t^*)$的图解法

将验证 t^*满足条件(13)的工作留给读者(习题 3).

模型解释　从经济学角度可以对由(12)式确定的林木最佳砍伐时刻 t^* 作出解释．设折扣因子 $\delta=\mu-\gamma$ 很小，时间以年为单位．

比较经营者在第 t 年砍伐林木与第 $t+1$ 年砍伐林木时的损失与得益．损失显然为实际利润(折合到 $t=0$)的减少 $V(t+1)-V(t)\doteq\dot{V}(t)$(注意 $\Delta t=1$)；得益相当于将第 t 年砍伐所得的实际利润 $V(t)$存入银行，1 年后得到的实际利息(利率扣除贬值率)，即 $V(t)e^{\delta}-V(t)\doteq\delta V(t)$(因为 $e^{\delta}\doteq1+\delta$)．若 $\dot{V}(t)>\delta V(t)$,则砍伐得太早，因为让林木少生长 1 年带来的损失大于这 1 年的得益；若 $\delta V(t)>\dot{V}(t)$,则砍伐太晚，因为早 1 年砍伐存入银行的收益超过了没有让林木多生长 1 年的损失．于是只有使 $\dot{V}(t)=\delta V(t)$成立的 $t=t^*$才是砍伐的最佳时刻，这正是(12)式所表明的．

经济学上 $\dot{V}(t)$ 称**边际损失**，$\delta V(t)$称**边际得益**．于是，最佳时刻应在边际损失被边际得益平衡时取得．称为**边际解释**．

评注　这个模型中首次引入了折扣因子 δ 的概念，在考察一段时间的、动态的经济效益问题时这是必需的．试想，如果不考虑折扣因子，即 $\delta=0$，那么越晚砍伐越好，因为 $V(t)$一直是增加的．这当然不符合实际情况．正如本节所述，折扣因子来自利

率和贬值率，今后我们将直接引用折扣因子，不再解释它.

这个动态优化问题没有归结为求泛函极值，只用求函数 $F(t)$ 的极值就解决了，是因为选择了特殊形式的控制函数，即模型假设 2 的“砍伐在瞬间完成”.实际上，如果将控制函数 $u(t)$ 定义为单位时间的砍伐比例(相对于林木总数 N 而言)，则目标泛函应表为

$$J(u(t))=\int_0^{\infty} e^{-\delta t} V(t)u(t)\mathrm{d}t \tag{18}$$

假设 2 的“瞬间完成”相当于 $u(t)$ 取为脉冲函数 $\delta(\tau-t)$，根据脉冲函数的性质不难看出，(18)式的 $J(u(t))$ 将化为本模型的目标函数 $F(t)$.

7.5 渔业资源的开发

渔业和林业一样都属于再生资源，收获后可以再生，循环不止.资源(鱼、树木)的自然增长都可以认为服从 Logistic 规律，开发这两种再生资源的最优经济效益模型基本上是相同的.但是二者也有差别.譬如渔业希望保持渔场鱼量的稳定(6.2 节)；在捕捞强度一定时捕捞量与渔场鱼量有关(6.2 节中假设二者成正比)；单位捕捞量的费用也与渔场鱼量有关，因为渔场鱼量越少，捕捞越困难，费用越高.而林业就基本上没有这些特征，可以一次将林木伐光，费用通常也只取决于砍伐量，与林场中的林木量无关.

本节将在考虑折扣因子的情况下(见 7.4 节)，针对捕鱼业的特点讨论渔业资源开发的最大效益模型，并再次分析捕捞过度(见6.2 节)可能引起的资源枯竭问题.[14]

模型假设

1.渔场鱼量 $x(t)$ 的自然增长服从 Logistic 规律，单位时间捕捞量取决于渔场鱼量 $x(t)$ 的大小，记作 $h(x(t))$，于是在捕捞

条件下 $x(t)$满足

$$\dot{x}(t)=f(x)-h(x) \tag{1}$$

$$f(x)=rx\left(1-\frac{x}{N}\right) \tag{2}$$

r、N 仍是固有增长率和最大容量.

2. 折扣因子为 δ. 鱼的单价为 p. 在渔场鱼量为 x 的水平下，单位捕捞量的费用是 $c(x)$[*)]，$c(x)$是减函数.

模型建立 模型的目标函数应该是开发渔业资源的长期效益. 因为单位时间捕捞量是 $h(x)$，在折扣因子 δ 下单位时间的利润为 $e^{-\delta t}(p-c(x))h(x)$，所以长期效益可以表示为 $x(t)$的泛函

$$J(x(t))=\int_0^\infty e\quad [p-c(x)]\,h(x)\mathrm{d}t \tag{3}$$

将方程(1)代入(3)式得

$$J(x(t))=\int_0^\infty e^{-\delta t}[p-c(x)][f(x)-\dot{x}(t)]\mathrm{d}t \tag{4}$$

问题归结为求 $x(t)$使 $J(x(t))$达到最大，并由此可确定单位时间最优捕捞量 $h(x(t))$.

最优解 $x(t)$应满足欧拉方程，即

$$e^{-\delta t}[(p-c(x))f'(x)-(f(x)-\dot{x})c'(x)]$$

$$+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[e^{-\delta t}(p-c(x))]=0$$

---

*) 因为已考虑到折扣因子，所以 p 和 $c(x)$都是折算到 $t=0$ 时的值.

化简后可得[*]

$$f'(x)-\frac{f(x)c'(x)}{p-c(x)}=\delta \tag{5}$$

当给定费用函数 $c(x)$ 并将(2)式的 $f(x)$ 代入(5)以后，(5)式是关于 x 的代数方程，故由此求得的最优解 $x(t)$ 是一个常数(与 t 无关)，从而单位时间捕捞量 $h(x(t))$ 也为常值，即我们得到的是持续最优产量.

为了对(5)式确定的最优解给出经济学上的边际解释，记

$$g(x)=[p-c(x)]f(x) \tag{6}$$

则(5)式可以表为

$$\frac{1}{\delta}g'(x)=p-c(x) \tag{7}$$

又因为

$$\int_0^{\infty}e^{-\delta t}g'(x)dt=\frac{1}{\delta}g'(x)$$

所以(5)式等价于

$$\int_0^{\infty}e^{-\delta t}g'(x)\mathrm{d}t=p-c(x) \tag{8}$$

可以看出，当最优解 $x(t)$ 为常数时 $\dot{x}=0$，$f(x)=h(x)$，(6)式定义的 $g(x)$ 是单位时间利润，而 $g'(x)$ 则是渔场鱼量 x 增加一个单位(相当于捕捞量减少一个单位)引起的损失．故(8)式左端是按折扣因子折算到 $t=0$ 后的边际损失．(8)式右端显然是单位捕捞量所得利润($t=0$ 时)，即边际得益．(8)式表明，最优解在

---

*) 欧拉方程(一般是二阶微分方程)在这里蜕化为代数方程，对此不能提出端点条件，否则通常将无解．

边际损失被边际得益平衡时取得.

捕捞过度模型 Ⅰ　过度开发造成资源枯竭是再生资源面临的严重问题. 6.2 节曾讨论过渔业的捕捞过度模型，那是由于众多的盲目捕捞者追求利润（即使是微薄的）造成的. 本节研究的是长期效益，引入了折扣因子，这就从另一个角度提出了捕捞过度带来的资源枯竭问题.

下面给出费用函数 $c(x)$ 的具体形式，来讨论达到最优持续产量的渔场鱼量水平 x（满足(5)式）及可能出现的资源枯竭. 在模型Ⅰ 中,假设

单位捕捞量的费用 c 与渔场鱼量水平 x 成反比，记作

$$c(x)=\frac{c_1}{x} \tag{9}$$

即渔场鱼量越少，捕捞越困难，费用越高. 在捕捞量 $h(x)$ 与 x 成正比的情况下 c_1 恰是 6.2 节给出的单位捕捞强度的费用.*)

将(9)和(2)代入(5)式，化简后得到关于 x 的二次方程

$$x^2-\frac{N}{2}\left(\frac{c_1}{pN}+1-\frac{\delta}{r}\right)x-\frac{N\delta c_1}{2rp}=0 \tag{10}$$

方程的正根是

$$x^*=\frac{N}{4}\left[\left(\frac{c_1}{pN}+1-\frac{\delta}{r}\right)+\sqrt{\left(\frac{c_1}{pN}+1-\frac{\delta}{r}\right)^2+\frac{8c_1\delta}{pNr}}\right] \tag{11}$$

记

$$y^*=\frac{x^*}{N},\ \mu=\frac{c_1}{pN},\ \varepsilon=\frac{\delta}{r} \tag{12}$$

---

*) 因为单位时间的捕捞费用是 $C(x)h(x)=\frac{c_1}{x}Ex=c_1E$，$E$ 是捕捞强度，与 6.2 节(9)式单位时间支出 $S=cE$ 比较，可知 $c_1=c$，c_1 是单位捕捞强度的费用.

y^*是渔场鱼量最优水平(相对于总量 N 的比例),μ 是费用－价格比(相对于 N),可设 $\mu<1$,ε 是折扣因子与鱼的固有增长率之比,称生物经济增长率,它们都是无量纲量.(11)式可记作

$$y^*=\frac{1}{4}\left[(1+\mu-\varepsilon)+\sqrt{(1+\mu-\varepsilon)^2+8\mu\varepsilon}\right] \tag{13}$$

考察几个特殊情况.

1.当 $\delta\to 0$,即 $\varepsilon\to 0$ 时,$y^*\to\frac{1}{2}(1+\mu)$.以(12)式代入知 $x^*\to\frac{N}{2}+\frac{c_1}{2p}$,这正是6.2节(13)式的结果.

2.δ 变大时 y^* 递减,当 $\delta\to\infty$ 时 $y^*\to\mu$(习题5),与6.2节的(17)式一致.

3.若 $c_1\to 0$,即 $\mu\to 0$,则 $y^*\to\frac{1}{2}(1-\varepsilon)$.如果又有 $\varepsilon\to 1$,即 $\delta\to r$,则 $y^*\to 0$.表明当捕捞费用极低而贷款实际利率(即折扣因子)又很高时(与 r 相比),将诱使经营者"竭泽而渔",转而投资其他产业或存入银行生息.

捕捞过度模型Ⅱ 实际上,费用 c_1 不会趋向零.同时,关于 $c(x)$的假设(9)式也不尽合理,因为按照这个假设,当 $x\to 0$ 时将导致 $c(x)\to\infty$.现将它修正为

$$c(x)=\frac{c_2}{x+1} \tag{14}$$

其中 $c_2=c(0)$,表示资源将要枯竭时单位捕捞量的费用.在这个假设下不必像模型Ⅰ那样,将 $f(x)$代入方程(5)以求出解的表达式(11),而可以直接证明如下的结论.

1.若 $p<c_2$,即鱼的售价小于最高成本,则在最大效益下不会导致资源枯竭.

[证明] 只需证明方程(5)有 $x>0$ 的解.记

$$G(x)=\delta-f'(x) \tag{15}$$

$$H(x)=-\frac{f(x)c'(x)}{p-c(x)} \tag{16}$$

将(2)式表示的$f(x)$代入(15)得

$$G(x)=(\delta-r)+\frac{2r}{N}x \tag{17}$$

$G(x)$是一条斜率大于零且$G(N)=\delta+r>0$的直线(图7－6).

由条件$p<c_2$及$c(x)$的表达式(14)知$c(\infty)=0<p<c_2=c(0)$,故存在$x_0>0$使$p=c(x_0)$,且当$x>x_0$时$p-c(x)>0$;又因为$c'(x)<0$,$f(N)=0$,由(16)式可知

$$H(x)>0 \quad (x>x_0);$$

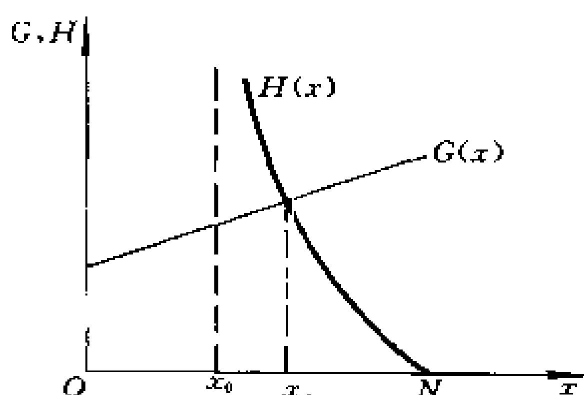


图7－6 G、H的示意图及x^*的图解法

$$\lim_{x\to x_0^+}H(x)=\infty;\ H(N)=0 \tag{18}$$

由此可画出$H(x)$的示意图(图7－6).

直线$G(x)$与曲线$H(x)$必相交,交点的横坐标x^*为方程(5)的根*),而$x^*>x_0>0$,所以在最大效益下渔场的稳定鱼量恒大于零,即资源不会枯竭.

2. 若$p>c_2$且$\delta>2r$,则最大效益将导致资源枯竭.

证明留给读者(习题6).

这个结果表明,当鱼的售价较高(相对于成本),贷款实际利率较高(相对于鱼的固有增长率)时,将诱使经营者肆意捕捞,导

*) $H(x)$不一定单调减,G与H的交点可能多于一个,但其中必有一个最优解.

致资源枯竭.

评注 本节提出的最大经济效益模型,以(4)式表示的$J(x(t))$为目标泛函. 由于这个泛函极值问题的欧拉方程蜕化成代数方程,最优解 $x(t)$为常数,由(5)式确定,于是捕捞量也是常数. 但是模型并未讨论达到最大效益的捕捞策略.

捕捞过度引起的资源枯竭问题与价格、成本、折扣因子等有关. 本节在不同形式成本函数 $c(x)$的假设下得到了相当简明的定量结果,与实际情况的定性分析也是一致的.

7.6 渔船出海的数量与时机

这一节仍然讨论开发渔业资源的最大经济效益模型,与以前的模型不同的是,这里用出海渔船的数量作为控制函数. 实际上,捕鱼业的具体作法是等渔场中鱼量增长到相当大以后,才派出一定数量的渔船进行捕捞. 于是我们的控制函数可以取与这种作法相应的特殊形式,从而将原来属于动态优化模型的泛函极值问题简化为普通的函数极值问题.[32]

模型假设

1. 渔场鱼量 $x(t)$的自然增长服从 Logistic 规律,单位时间捕捞量与渔船数量 $u(t)$和渔场鱼量 $x(t)$成正比,在捕捞条件下满足

$$\dot{x}(t)=f(x)-h(u,x) \tag{1}$$

$$f(x)=rx\left(1-\frac{x}{N}\right) \tag{2}$$

$$h(u,x)=q\,u(t)x(t) \tag{3}$$

r、N 同前. q 是每只渔船单位时间(如每天)的捕捞率(相对于 x). $u(t)$视为连续变量,非整数部分理解为在部分时间内进行捕捞.

2. 初始时刻渔场鱼量

$$x(0)=\frac{N}{K}, K>>1 \tag{4}$$

$x(0)$很小．在时间 $0\leqslant t\leqslant \tau$ 内不派渔船出海．$t>\tau$ 以后出海渔船的数量保持常数 U，即 $u(t)$的形式为

$$u(t)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant t\leqslant \tau \\ U, & t>\tau \end{cases} \tag{5}$$

而 τ、U 为待定参数．捕捞期间($t>\tau$)渔场鱼量 x 保持稳定．

3．折扣因子为 δ，鱼的出售单价为 p，每只渔船单位时间（天）的费用为 c．

建模与求解 在假设 1、3 下寻求以 $u(t)$为控制函数的长期最大效益归纳为如下的泛函极值问题．

$$J(u(t))=\int_0^\infty e^{-\delta t}[p\,h(u(t),x(t))-c\,u(t)]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^\infty e^{-\delta t}[pq\,x(t)-c]\,u(t)\mathrm{d}t \tag{6}$$

$$\dot{x}(t)=rx\left(1-\frac{x}{N}\right)-q\,u(t)x \tag{7}$$

因为假设 2 给出了控制函数 $u(t)$的形式(5)，所以(6)、(7)可转化为函数极值问题．

当 $0\leqslant t\leqslant \tau$ 时 $u=0$，$x(t)$容易由方程(7)在初始条件(4)下解出；当 $t>\tau$ 时 $u=U$，$x(t)$要保持在某一常量不变，这个常量可由(7)式令 $\dot{x}=0$ 得到．于是有

$$x(t)=\begin{cases} \dfrac{N}{1+(K-1)e^{-rt}}, & 0\leqslant t\leqslant \tau \\ N\left(1-\dfrac{qU}{r}\right), & t>\tau \end{cases} \tag{8}$$

由 $x(t)$在 $t=\tau$ 时的连续性可以写出

$$\frac{1}{1+(K-1)e^{-r\tau}}=1-\frac{qU}{r}$$

由此解得

$$\tau=\frac{1}{r}\ln\left[(K-1)\left(\frac{r}{qU}-1\right)\right] \tag{9}$$

即 $u(t)$中的两个参数 τ、U 中只有一个是独立的，以下取 U 为独立变量，$\tau(U)$由(9)式确定.

将(5)、(8)代入(6)式，目标泛函 $J(u(t))$变为 U 的函数，记作 $F(U)$，则

$$F(U)=\int_{\tau}^{\infty}Ue^{-\delta t}\left[pqN\left(1-\frac{qU}{r}\right)-c\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{pqNU}{\delta}e^{-\delta\tau(U)}\left(1-\frac{qU}{r}-b\right),\quad b=\frac{c}{pqN} \tag{10}$$

注意到 c、p、q、N 的含义，可知无量纲量 b 是费用 – 价格比的下界(因为渔场鱼量取最大值 N). 显然应该有 $b<1$，否则成本高于售价，渔船不会出海. 并且由(10)式可知，效益 $F(U)$为正值的条件是 $1-\frac{qU}{r}-b>0$，或记作

$$0<U<\frac{r(1-b)}{q} \tag{11}$$

用微分法求出在条件(11)下 $F(U)$的最大值点 U^* 为

$$U^*=\frac{r}{4q}\left[3-b+\frac{\delta}{r}-\sqrt{\left(1+b-\frac{\delta}{r}\right)^2+\frac{8b\delta}{r}}\right] \tag{12}$$

将(12)的结果代入(9)式即得

$$\tau^* = \tau(U^*) \tag{13}$$

U^*、τ^* 为渔船出海的最佳数量与时刻.

模型解释　最大经济效益模型的最优解 U^* 应该符合经济学上的边际解释(见7.4和7.5节). 为了得到这种解释的表达式, 考察单位时间的利润

$$R(u(t)) = [pqx(t) - c]u(t) \tag{14}$$

当 $t > \tau$ 时以(5)、(8)代入(14)式得

$$R(U) = U\left[pqN\left(1 - \frac{qU}{r}\right) - c\right] \tag{15}$$

与(10)式比较可知 $F(U)$ 又可表为

$$F(U) = \int_{\tau(U)}^{\infty} e^{-\delta t} R(U) \mathrm{d}t \tag{16}$$

容易算出

$$F'(U) = e^{-\delta\tau(U)}\left[\frac{R'(U)}{\delta} - R(U)\tau'(U)\right]$$

对于最优解 U^* 有 $F'(U^*) = 0$, 故 U^* 必满足

$$-\frac{R'(U^*)}{\delta} = -R(U^*)\tau'(U^*) \tag{17}$$

由此可对 U^* 作出如下的边际解释:

从(9)式知道派出渔船的时刻 τ 是渔船数量 U 的减函数, 多派出一只船(从 U 到 $U+1$)短期利润的增加是

$$R(U)[\tau(U) - \tau(U+1)] \doteq -R(U)\tau'(U) \tag{18}$$

而长期效益的减少是

$$\int_0^{\infty} e^{-\delta t}[R(U)-R(U+1)]\mathrm{d}t \doteq -\frac{R'(U)}{\delta} \qquad (19)$$

比较(18)、(19)与(17)式可知，派出渔船的最佳数量 U^* 应使短期的边际得益恰好被长期的边际损失所平衡．

评注 本节提出的以渔船数量 $u(t)$ 为控制函数的最大效益模型(6)、(7)式，与7.5节的模型(1)～(4)式本质上是一样的．这里的特点是对 $u(t)$ 规定了特殊形式(5)．这种规定的合理性如何呢？事实上，如果去消对 $u(t)$ 的约束，求解泛函极值(6)、(7)的话，则 $u(t)$ 的最优解必然取(5)的形式．我们不去详细推导求解过程，而只指出7.5节的欧拉方程的结果(5)式在这里仍然适用(表达符号有所变化)．读者可以验证，若从(12)式的 U^* 计算出渔场鱼量水平 $x^*=N\left(1-\frac{qU^*}{r}\right)$，则它与7.5节(11)式表示的 x^* 本质上是一致的(习题7)．另外，$u(t)$ 在 $0\leqslant t\leqslant\tau$ 内取零值是为了让渔场鱼量水平尽快地从初值 $x(0)$ 达到稳定值 x^*．于是，在形如(5)式的最优函数控制下，达到长期最大效益的最佳渔场鱼量水平 $x(t)$ 如图7－7所示．

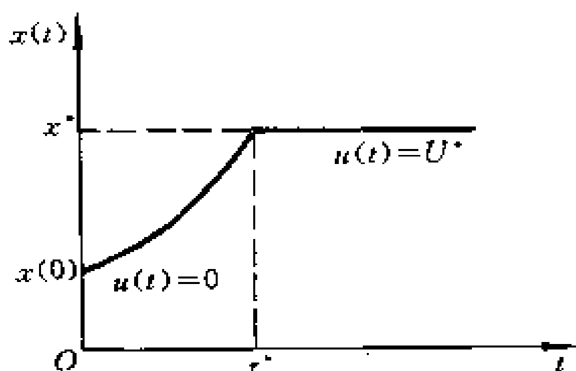


图7－7 由最优的 $u(t)$ 控制的 $x(t)$

从7.4节到7.6节我们都对最优结果作了经济学上的边际解释．在考虑带折扣因子的长期效益问题时，最优结果的边际解释本质上是相同的，即从正反两方面使短期利益与长期利益取得折衷．想一想人们在日常活动中对相当广泛的优化问题作决策时的思维过程，不难发现常常就是这类折衷办法的具体体现．

7.7 赛跑速度的安排

参加赛跑的运动员要根据自己的生理状况对赛程中各阶段的速度作出最恰当的安排，以期获得最好的成绩．寻求速度安排的最佳策略是一个涉及生理力学的复杂问题．T．B．Keller 提出了一个简单模型，根据 4 个生理参数从最优控制的角度确定赛程中的速度函数，并可以预测比赛成绩．

按照 Keller 的模型，短跑比赛应该用最大冲力跑完全程，对于中长跑则要将距离分为 3 段，先用最大冲力起跑，然后匀速跑过大部分赛程，最后把贮存在体内的能量用完，靠惯性冲过终点．[23]

问题分析 运动员在赛跑过程中克服体内外的阻力以达到或保持一定速度，需要发挥出向前的冲力，为冲力作功提供能量有两个来源，一是呼吸和循环系统通过氧的新陈代谢作用产生的与吸入氧量等价的能量，二是赛跑前贮存在身体内的供赛跑用的能量．对于前者可以合理地假设在赛跑过程中保持常数，而后者则有一个如何将贮存能量分配到赛程的各个阶段，并恰在到达终点前将其用完的问题．

模型需要确定三个关系．一是冲力与速度的关系，二是冲力作功与上述两个能量来源的关系，三是速度与比赛成绩的关系．虽然比赛成绩指的是一定赛程所用的时间，但是在用数学工具处理时可以等价为一定时间所跑的距离．于是最佳成绩将归结为以距离为目标泛函的，与速度、冲力、贮存能量等函数有关的极值问题．这个问题的一般解过于复杂，Keller 把它简化了．

由以上分析还可以看出模型需要 4 个生理参数：运动员能发挥的最大冲力；体内外的阻力系数；氧的新陈代谢作用单位时间所提供的能量；体内贮存能量的初值．在 Keller 的模型中这些参数是用世界记录创造者的成绩估计出来的．

模型假设 需要对赛跑中的阻力作出假设，以确定冲力与速度的关系，还要对氧的代谢作用提供的能量作出假设以建立能量供给与消耗间的平衡．

1．赛跑时体内外的阻力与速度成正比，比例系数 τ^{-1}．运动员能发挥的最大冲力为 F，初速为零．

2．呼吸和循环系统在氧的代谢作用下单位时间提供的能量是常数 σ，初始时刻体内贮存的供赛跑用的能量是 E_0．

实际上，上述参数因人而异，特别是与运动员的体重有关．为了消除这个因素的影响，我们对运动员的单位质量建模，即在下面各式中均设质量 $m=1$．

一般模型 设运动员以速度函数 $v(t)$跑完赛程 D 的时间为 T，则

$$D(v(t))=\int_0^T v(t)\mathrm{d}t \tag{1}$$

D 已知时求 $v(t)$使 T 达到最小，等价于 T 固定求 $v(t)$使 D 达到最大，后一问题较便于研究．

运动员的冲力记作 $f(t)$，由假设 1 根据牛顿第二定律可以得到

$$\dot{v}(t)+\frac{v}{\tau}=f(t) \tag{2}$$

$$v(0)=0 \tag{3}$$

$$0\leqslant f(t)\leqslant F \tag{4}$$

运动员体内贮存的能量记作 $E(t)$，则单位时间提供给赛跑用的为 $-\dot{E}(t)$(贮存能量的减少率)．因为赛跑中单位时间消耗的能量是 $f(t)v(t)$，由假设 2 这个能量被 σ 和 $-\dot{E}(t)$所平衡，所以

$$\sigma-\dot{E}(t)=fv \tag{5}$$

$$E(0)=E_0 \tag{6}$$

$$E(t)\geqslant 0 \tag{7}$$

这样构成了在条件(2)~(7)下以(1)式 $D(v(t))$为目标函数的泛函极值问题，其中 F、τ、σ、E_0 视为已知参数.

这个一般模型的求解是困难的，因为一旦最优解出现在条件(4)、(7)的边界上(从下面的分析可知实际情况正是这样)，变分法就不再适用. 此外，将(1)、(2)、(5)式合并后得到的泛函表达式

$$D(E(t))=\sqrt{2}\int_0^T e^{-\frac{t}{\tau}}\left[\int_0^t(\sigma-\dot{E}(t))e^{\frac{2s}{\tau}}\,\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t \tag{8}$$

过于复杂，即使用其他方法求解也十分不便.

下面将 Keller 提出的简化方法分成两个模型叙述.

短跑模型 当赛程较短时可以用最大冲力 F 跑完全程，这必然会取得最佳成绩. 至于多长的赛程才能用这种方法跑，应以贮存于体内的能量 $E(t)$不小于零为标准，由参数 F、τ、σ、E_0 决定.

将 $f(t)=F$ 代入方程(2)，在初始条件(3)下的解为

$$v(t)=F\tau(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \tag{9}$$

可知速度是递增的. 将(9)及 $f=F$ 代入(5)式得

$$\dot{E}(t)=\sigma-F^2\tau(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \tag{10}$$

方程(10)在初始条件(6)下的解为

$$E(t)=E_0-(F^2\tau-\sigma)t+F^2\tau^2(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \tag{11}$$

由(10)、(11)式可以画出 $E(t)$的示意图(图 7-8)，起跑后在很

短的时间 $0\leqslant t\leqslant t_e$ 内，由于速度 v 很小，σ 的一部分补充给 $E(t)$（见(5)式），所以 $E(t)$ 增加；稍后，随着 v 的迅速变大，$E(t)$ 下降，当 $t=t_c$ 时 $E(t)=0$. 容易得到

$$t_c=t\big|_{E(t)=0} \qquad (12)$$

$$t_e=t\big|_{\dot{E}(t)=0}=\tau\ln\frac{F^2\tau}{F^2\tau-\sigma} \qquad (13)$$

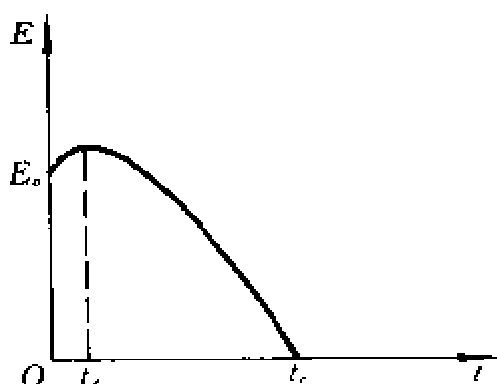


图 7－8　体内能量 $E(t)$ 的示意图

并且，在这种情况下所能跑的最远距离为

$$D_c=\int_0^{t_c}v(t)\mathrm{d}t=F\tau^2\left(e^{-\frac{t_c}{\tau}}+\frac{t_c}{\tau}-1\right) \qquad (14)$$

利用各个参数的估计值（见本节参数估计一段）可以算出 $t_c\doteq27.63$（秒），$t_e\doteq0.33$（秒），$D_c\doteq291$（米）. 这就是说，当赛程小于 291 米时用最大冲力跑完全程是可行的，并且能够取得最佳成绩*).

中长跑模型　当赛程大于 D_c 时，将全程分为 3 段：初始阶段 $0\leqslant t\leqslant t_1$ 以最大冲力 $f(t)=F$ 跑，以便在短时间内获得尽可能的高速度；最后阶段 $t_2\leqslant t\leqslant T$ 把体内贮存能量用完，即 $E(t)=0$；中间阶段 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 保持匀速. 可以看出，由于在第 1、3 段分别把控制函数 $f(t)$、$E(t)$ 确定在约束条件(4)、(7)的边界上，且取常值，从而这两阶段的速度 $v(t)$ 也被决定. 由此即不难进一步求出中间阶段的 $v(t)$.

---

*）因为参数是用世界记录创造者的成绩估计出来的，所以算出的 t_c、t_e、D_c 对于一般运动员不一定合适.

第 1 段 $0 \leqslant t \leqslant t_1$ （t_1 以后确定） $v(t)$由(9)式表示．

第 3 段 $t_2 \leqslant t \leqslant T$ （t_2 以后确定） 将 $E(t)=0$ 代入(5)、(2)式得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v^2+\frac{v^2}{\tau}=\sigma \tag{15}$$

方程(17)的解为

$$v(t)=\left[(v^2(t_2)-\sigma\tau)e^{-\frac{2(t-t_2)}{\tau}}+\sigma\tau\right]^{\frac{1}{2}} \tag{16}$$

$v(t)$是单调减和下凸的($\dot{v}(t)<0$，$\ddot{v}(t)>0$)．

第 2 段 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ $v(t)$由目标泛函(1)式 $D(v(t))$达到最大来确定．将(9)、(16)式入(1)式得到

$$D(v(t))=\int_0^{t_1}F\tau(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}v(t)\mathrm{d}t$$

$$+\int_{t_2}^{T}\left[(v^2(t_2)-\sigma\tau)e^{-\frac{2(t-t_2)}{\tau}}+\sigma\tau\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t \tag{17}$$

其中 $v(t_2)$可由 $E(t_2)=0$ 确定．而 $E(t)$满足方程(2)、(5)，即

$$\dot{E}=\sigma-v\dot{v}-\frac{v^2}{\tau} \tag{18}$$

(18)在初始条件(6)下的解为

$$E(t)=E_0+\sigma t-\frac{v^2(t)}{2}-\frac{1}{\tau}\int_0^t v^2(t)\mathrm{d}t \tag{19}$$

令 $t=t_2$ 并将(9)式代入得

$$E(t_2)=E_0+\sigma t_2-\frac{v^2(t_2)}{2}$$

$$
-\frac{1}{\tau}\int_{0}^{t_1}F^2\tau^2
$$

$$
(1-e^{-\frac{t}{\tau}})^2\mathrm{d}t-\frac{1}{\tau}\int_{t_1}^{t_2}v^2(t)\mathrm{d}t \tag{20}
$$

则问题归结为在条件

$$
E(t_2)=0 \tag{21}
$$

下求 $v(t)(t_1\leqslant t\leqslant t_2, t_2$ 自由)使(17)式表示的 $D(v(t))$ 最大.

因为(17)、(20)中均不含 $\dot{v}(t)$,引入拉格朗日乘子化为无条件极值问题后的欧拉方程将蜕化为代数方程，最优解 $v(t)$ 是常数，所以可以用待定常数 λ 构造函数

$$
I(v(t),t_2)=D(v(t))+\frac{\lambda}{2}E(t_2) \tag{22}
$$

不妨将(22)右端与 $v(t)$ 和 t_2 无关的项略去,写成

$$
I(v(t),t_2)=\int_{t_1}^{t_2}\left[v(t)-\frac{\lambda}{2\tau}v^2(t)\right]\mathrm{d}t
$$

$$
+\int_{t_2}^{T}\left[(v^2(t_2)-\sigma\tau)e^{-\frac{2(t-t_2)}{\tau}}+\sigma\tau\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t+\frac{\lambda\sigma}{2}t_2-\frac{\lambda}{4}v^2(t_2)
$$

$$
=\int_{t_1}^{t_2}F(v(t))\mathrm{d}t+G(t_2) \tag{23}
$$

$v(t)$、t_2 为最优解的必要条件是 *)

---

*) (23)式的变分为

$$
J=\int_{t_1}^{t_2+\alpha\mathrm{d}t_2}F(v(t)+\alpha\varphi(t))\mathrm{d}t+G(t_2+\alpha\mathrm{d}t_2)
$$

由 $\left.\frac{\partial J}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}=0$ 可以推出(24)式(类似于7.8节(19)式).

$$F_v = 0\ ,\quad (F + G_t)|_{t=t_2} = 0 \tag{24}$$

以(23)代入(24)式可得

$$v(t) = \frac{\tau}{\lambda} \tag{25}$$

$$2\int_{t_2}^{T}\left[(v^2(t_2) - \sigma\tau)e^{-\frac{2(t-t_2)}{\tau}} + \sigma\tau\right]^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{2(t-t_2)}{\tau}}\mathrm{d}t = \lambda \tag{26}$$

至此，3个阶段的 $v(t)$ 分别由(9)、(16)、(25)式给出，其中 $v(t_2) = v(t)\ (t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$. 剩下的问题是确定 t_1、t_2 和 λ.

t_1、t_2、λ **的确定** 利用 $v(t)$ 在 $t = t_1$ 的连续性，由(9)和(25)式得

$$\lambda F(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}) = 1 \tag{27}$$

将(25)代入(20)、(21)式得

$$E_0 + \sigma t_2 - \frac{\tau^2}{2\lambda^2} - F^2\tau\left(t_1 - \frac{3\tau}{2} + 2\tau e^{-\frac{t_1}{\tau}} - \frac{\tau}{2}e^{-\frac{2t_1}{\tau}}\right)$$

$$- \frac{\tau}{\lambda^2}(t_2 - t_1) = 0 \tag{28}$$

将(25)式之 $v(t)$ 代入(26)式的 $v(t_2)$，作出积分得到

$$2\left[(\tau^2 - \lambda^2\sigma\tau)e^{-\frac{2(T-t_2)}{\tau}} + \lambda^2\sigma\tau\right]^{\frac{1}{2}} - 2\tau = \lambda^2\sigma - \tau \tag{29}$$

t_1、t_2、λ 由(27)～(29)确定.

参数估计 为了估计4个生理参数 F、τ、σ、E_0，Keller先用若干个短跑(赛程 $D < D_c$)世界记录拟合由(1)、(9)式计算的理论结果，用最小二乘法得到 F、τ 的估计值. 再用一些中长跑(赛程 $D > D_c$)世界记录拟合(9)、(16)、(25)、(27)～(29)和(1)计算

的理论结果，用最小二乘法得到 σ 和 E_0 的估计值．他得到的结果是(对质量 $m=1$ 千克而言)：$F=12.2$ 米/秒 ^{2}，$\tau=0.892$ 秒，$\sigma=41.5$ 米 ^{2}/秒 ^{3}，$E_0=2403.5$ 米 ^{2}/秒 ^{2}．

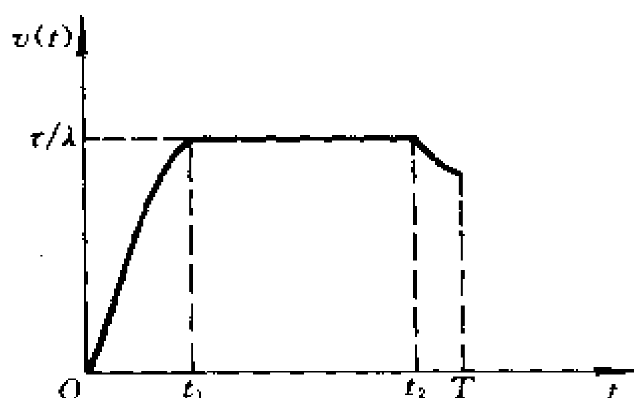


图 7－9　中长跑模型的最佳速度示意图

模型解释　中长跑模型的速度函数由 3 段组成，示意图如图 7－9．对于最后一段(通常有一两秒钟)速度的下降，Keller 的解释是：像汽车比赛到终点前燃料用完，靠惯性冲过终点一样，赛跑的最佳策略应该是把贮存在体内供赛跑用的能量全部耗尽，借助惯性冲刺，这必导致短暂的速度下降．单从赛跑所用的时间来看，譬如一名运动员测验自己的成绩，这样做是最优的．而在实际比赛中当运动员与对手势均力敌时，从击败对手取得好名次的目的出发，需要按照实际情况巧妙地安排自己的速度，这已不是本模型讨论的范围了．

最后，将 22 个赛程(其中 8 个属于短跑，14 个属于中长跑)的当时的世界记录 T_1、用 Keller 模型计算的理论成绩 T_2、相对误差、以及中长跑模型中最初阶段时间 t_1、最后阶段时间 $T-t_2$，列入表 7－1，以供比较．

评注　Keller 对赛跑的一般模型(1)～(7)提出了分段解法，虽然没有严格证明它的解就是(1)～(7)的最优解，但是从分析过程和实际检验可以看出这种简化方法是合理的．另一方面，模型本身也存在着一些不合适的地方，例如对短跑和中长跑的所有

表 7-1 赛跑成绩理论值与实际值的比较

赛程 D	世界记录 T_1(秒)	理论成绩 T_2(秒)	相对误差 (%)	t_1 (秒)	T_2-t_2 (秒)
50 码	5.1	5.09	−0.2		
50 米	5.5	5.48	−0.4		
60 码	5.9	5.93	0.5		
60 米	6.5	6.40	−1.5		
100 码	9.1	9.29	2.1		
100 米	9.9	10.07	1.7		
200 米	19.5	19.25	−1.3		
220 码	19.5	19.36	−0.7		
400 米	44.5	43.27	−2.8	1.78	0.86
440 码	44.9	43.62	−2.9	1.77	0.86
800 米	1 :44.3	1 :45.95	1.6	1.07	1.08
880 码	1 :44.9	1 :46.69	1.7	1.06	1.08
1000 米	2 :16.2	2 :18.16	1.4	0.98	1.16
1500 米	3 :33.1	3 :49.44	3.0	0.88	1.31
1 英里	3 :51.1	3 :57.28	2.7	0.87	1.34
2,000 米	4 :56.2	5 :01.14	1.7	0.84	1.43
3,000 米	7 :39.2	7 :44.96	1.2	0.80	1.60
2 英里	8 :19.8	8 :20.82	0.2	0.80	1.63
3 英里	12 :50.4	12 :44.89	−0.7	0.77	1.80
5,000 米	13 :16.6	13 :13.11	−0.4	0.77	1.82
6 英里	26 :27.0	25 :57.62	−3.1	0.75	2.10
10,000 米	27 :39.4	26 :54.10	−2.7	0.75	2.12

赛程用了同一组生理参数，而短跑和中长跑运动员的这些参数可能有较大差别．还有，运动员达到一定的高速度后不可能持续地发挥自己的最大冲力，短跑模型和中长跑模型中最初阶段的速度(9)式需要修正(习题 8)．尽管如此，这个模型在把动力学与生理学相结合，用建模方法讨论体育运动问题上，为人们提供了示范．

7.8 变分法简介

变分法是研究泛函极值问题的数学方法．早在十七世纪末，几何学、力学等领域相继提出了一些泛函的极值问题，导致了变分法的形成和发展．近几十年来作为现代控制理论组成部分之一的最优控制理论，在工程技术(特别是航空、航天技术)和经济管理等领域得到了重要而广泛的应用．本质上，最优控制理论仍属于泛函极值问题，虽然其解决方法已经超出了现在称为古典变分法的范围，但是变分法的基本思想仍是解决最优控制问题的基础，而且在某些情况下变分法还可以直接应用．

本节只对前面几节及第12章个别模型中有关的变分法知识作简单介绍．

1．变分法基本概念

泛函 设 S 为一函数集合，若对于每一个函数 $x(t)\in S$ 有一个实数 J 与之对应，则称 J 是定义在 S 上的泛函，记作 $J(x(t))$．S 称为 J 的容许函数集．

例1 对于 xy 平面上过定点 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$ 的每一条光滑曲线 $y(x)$，绕 x 轴旋转得一旋转体，如图7－10．旋转体的侧面积是曲线 $y(x)$ 的泛函 $J(y(x))$．由微积分知识不难写出

$$J(y(x))=\int_{x_1}^{x_2}2\pi y(x)\sqrt{(1+y'^2(x))}\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

容许函数集可表示为

$$S=\{y(x)\mid y(x)\in C^1[x_1,x_2],\ y(x_1)=y_1,y(x_2)=y_2\} \tag{2}$$

最简泛函的形式 最简单的一类泛函表为

$$J(x(t))=\int_{t_1}^{t_2}F(t,x,\dot{x})\mathrm{d}t \tag{3}$$

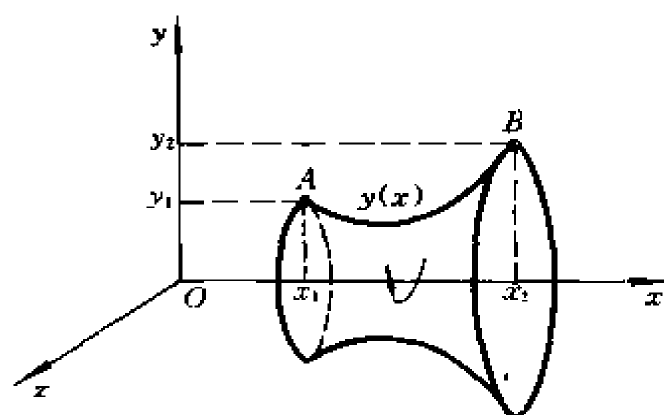


图 7－10 曲线 AB 生成的旋转体

被积函数 F 包含自变量 t，未知函数 x 及导数 $\dot{x}$.(1)式是最简泛函．

泛函的极值 泛函 $J(x(t))$ 在 $x_0(t)\in S$ 取得极小值是指，对于任意一个与 $x_0(t)$ 接近的 $x(t)\in S$，都有 $J(x(t))\geq J(x_0(t))$. 所谓接近，可以用距离 $\mathrm{d}(x(t),x_0(t))<\varepsilon$ 度量，而距离定义为

$$\mathrm{d}(x(t),x_0(t))=\max_{t_1\leq t\leq t_2}\{|x(t)-x_0(t)|,|\dot{x}(t)-\dot{x}_0(t)|\}$$

泛函的极大值可以类似地定义．$x_0(t)$称为泛函的极值函数或极值曲线．例1中使旋转体侧面积取极小值的曲线就是泛函(1)的极值曲线．

泛函的变分 如同函数的微分是增量的线性主部一样，泛函的变分是泛函增量的线性主部．作为泛函的自变量，函数 $x(t)$ 在 $x_0(t)$的增量记作

$$\delta x(t)=x(t)-x_0(t) \tag{4}$$

也称函数的变分．由它引起的泛函的增量记作

$$\Delta J=J(x_0(t)+\delta x(t))-J(x_0(t))$$

如果 ΔJ 可以表为

$$\Delta J = L(x_0(t), \delta x(t)) + r(x_0(t), \delta x(t))$$

其中 L 是 δx 的线性项，而 r 是 δx 的高阶项，则 L 称为泛函在 $x_0(t)$ 的变分，记作 $\delta J(x_0(t))$. 用变动的 $x(t)$ 代替 $x_0(t)$，就有 $\delta J(x(t))$. 、

泛函变分的一个重要形式是它可以表为对参数 α 的导数：

$$\delta J(x(t)) = \frac{\partial}{\partial \alpha} J(x(t) + \alpha\, \delta x(t))\Big|_{\alpha=0} \tag{5}$$

这是因为当变分存在时，增量

$$\Delta J = J(x(t) + \alpha\delta x) - J(x(t)) = L(x\ (t), \alpha\delta x) + r(x(t), \alpha\delta x)$$

根据 L 和 r 的性质有

$$L(x(t), \alpha\delta x) = \alpha L(x(t), \delta x)$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{r(x(t), \alpha\delta x)}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{r(x(t), \alpha\delta x)}{\alpha\delta x}\ \delta x = 0$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} J(x + \alpha\delta x)\Big|_{\alpha=0} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{J(x + \alpha\delta x) - J(x)}{\alpha}$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{L(x, \alpha\delta x) + r(x, \alpha\delta x)}{\alpha} = L(x, \delta x) = \delta J(x)$$

极值与变分　利用变分的表达式(5)可以得到泛函极值与变分的关系：

若 $J(x(t))$ 在 $x_0(t)$ 达到极值（极大或极小），则

$$\delta J(x_0(t)) = 0 \tag{6}$$

这是因为对任意给定的 δx，$J(x_0 + \alpha\delta x)$ 是变量 α 的函数，该函

数在 $\alpha=0$ 处达到极值．根据函数极值的必要条件知

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}J(x_0+\alpha\delta x)\bigg|_{\alpha=0}=0$$

于是由(5)式直接得到(6)式．

2．泛函极值的必要条件——欧拉方程

讨论最简泛函在固定端点条件下取得极值的必要条件．泛函和端点条件表为

$$J(x(t))=\int_{t_1}^{t_2}F(t,x(t),\dot{x}(t))\mathrm{d}t \tag{7}$$

$$x(t_1)=x_1,\ x(t_2)=x_2 \tag{8}$$

其中 F 具有二阶连续偏导数．容许函数集 S 为满足(8)式的二阶可微函数集合．

引理 设 $g(t)$是 $[t_1,t_2]$ 内的连续函数，若对于任意的充分光滑函数 $\varphi(t)$(满足 $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)=0$)有

$$\int_{t_1}^{t_2}g(t)\varphi(t)\mathrm{d}t\equiv 0$$

则在 $[t_1,t_2]$ 内 $g(t)\equiv 0$．

证明用反证法(从略)．

欧拉方程的推导 设泛函(7)在 $x(t)$取得极值，$x(t)$满足(8)．记 $\varphi(t)=\delta x(t)$，满足 $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)=0$．按照泛函极值与变分的关系(5)、(6)式有

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}J(x(t)+\alpha\varphi(t))\bigg|_{\alpha=0}=0 \tag{9}$$

对于(7)式表示的 $J(x(t)+\alpha\varphi(t))$计算

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} J(x+\alpha\varphi)\bigg|_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} F(t, x+\alpha\varphi, \dot{x}+\alpha\dot{\varphi})\bigg|_{\alpha=0} \mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} [F_x(t, x, \dot{x})\varphi + F_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})\dot{\varphi}]\mathrm{d}t \tag{10}$$

对右端第二项作分部积分并利用 $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0$ 得

$$\int_{t_1}^{t_2} F_{\dot{x}}\dot{\varphi}\mathrm{d}t = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{\dot{x}}\varphi\, \mathrm{d}t$$

代入(10)式并根据(9)式有

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(F_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{\dot{x}}\right)\varphi\mathrm{d}t = 0$$

因为 φ 是任意的，由引理立刻得到

$$F_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{\dot{x}} = 0 \tag{11}$$

(11)称为欧拉方程，是 $J(x(t))$ 在 $x(t)$ 取得极值的必要条件. (11)又可记作

$$F_x - F_{t\dot{x}} - F_{x\dot{x}}\dot{x} - F_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x} = 0 \tag{12}$$

通常这是 $x(t)$ 的二阶微分方程，其通解的两个任意常数由(8)式中的两个端点条件确定.

例 2 最速降线问题 求连接定点 A、B 的光滑曲线，使质点在重力作用下沿该曲线以最短时间从 A 点滑到 B 点(摩擦力不计).

将 A 点取为坐标原点，在图 7－11 所示坐标系中 B 点为 $B(x_1, y_1)$. 根据能量守恒定律，质点在曲线 $y(x)$ 上任一点处的速

度 $\frac{ds}{dt}$ 满足(s为弧长)

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=mgy$$

将 $ds=\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$ 代入上式得

$$dt=\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx$$

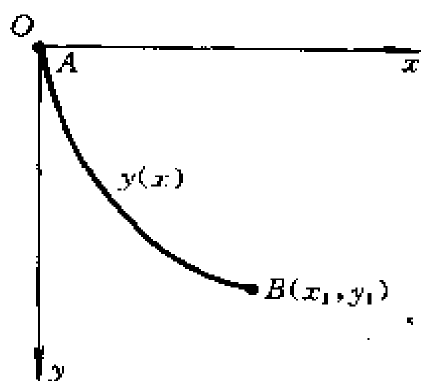


图7-11 最速降线

于是质点滑行时间应表为 $y(x)$ 的泛函

$$J(y(x))=\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx \tag{13}$$

端点条件为

$$y(0)=0,\ y(x_1)=y_1 \tag{14}$$

最速降线满足欧拉方程．因为

$$F(y,y')=\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$$

不含自变量 x，所以方程(12)可写作

$$F_y-F_{yy'}y'-F_{y'y'}y''=0$$

等价于

$$\frac{d}{dx}(F-y'F_{y'})=0$$

作一次积分得

$$F-y'F_{y'}=c$$

c为任意常数．将F代入得

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}-\frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}}=c$$

即

$$y(1+y'^2)=\frac{1}{c^2}$$

化为参数方程可表为

$$\begin{cases} x=c_1(t-\sin t)+c_2 \\ y=c_1(1-\cos t) \end{cases} \tag{15}$$

这是圆滚线方程，由$y(0)=0$可知$c_2=0$，c_1由另一端点条件$y(x_1)=y_1$确定．

虽然欧拉方程的解(15)只是泛函(13)达到极值的必要条件，但是正如求解函数极值一样，对于实际问题通常不用检验它是否满足泛函达到极小值的充分条件．因为极小值曲线(即最速降线)一定存在，它满足欧拉方程，所以解(15)就是极小值曲线(极大值曲线不存在)． [解毕]

泛函极值的必要条件可以推广到含有两个及两个以上未知函数的情况，如

$$J(x(t),u(t))=\int_{t_1}^{t_2}F(t,x,\dot{x},u,\dot{u})\mathrm{d}t \tag{16}$$

的欧拉方程是

$$\begin{cases} F_x-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\dot{x}}=0 \\ F_u-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\dot{u}}=0 \end{cases} \tag{17}$$

3. 横截条件

如果容许函数 $x(t)$ 的一个端点如 $t=t_2$ 不固定，而是在一条给定的曲线 $x=\psi(t)$ 上变动，如图 7－12，于是端点条件表示为

$$x(t_1)=x_1,\ x(t_2)=\psi(t_2)\ (t_2\text{可变}) \tag{18}$$

讨论泛函(7)在条件(18)下极值曲线的求法．

首先，如果 $x(t)$ 使(7)、(18)取得极值，那么当 t_2 固定时 $x(t)$ 也使(7)(8)取得极值，因为前者的容许函数集包含了后者．这意味着使(7)、(18)取得极值的 $x(t)$ 也满足欧拉方程(11)

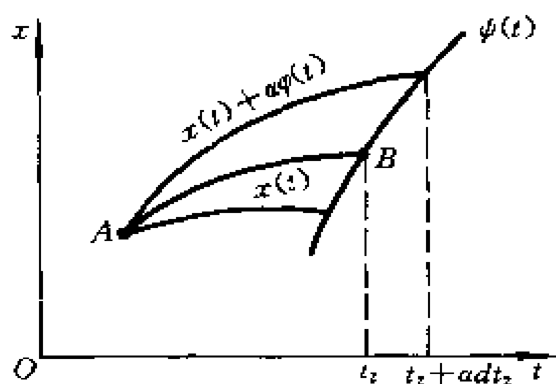


图 7－12 右端点在 $x=\psi(t)$ 上

其次，欧拉方程的另一个定解条件要由(18)中的 $x(t_2)=\psi(t_2)$ 确定．其推导与欧拉方程的推导过程类似，不过因为 t_2 可变，所以容许曲线 $x(t)$ 的末端时刻可表为 $t_2+\alpha dt_2$．于是从(9)式开始的推导过程为

$$0=\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{t_1}^{t_2+\alpha dt_2}F(t,x+\alpha\varphi,\dot{x}+\alpha\dot{\varphi})dt\right)\bigg|_{\alpha=0}$$

$$=\int_{t_1}^{t_2+\alpha dt_2}(F_x\varphi+F_{\dot{x}}\dot{\varphi})dt\bigg|_{\alpha=0}+F(t_2+\alpha dt_2,x+\alpha\varphi,\dot{x}+\alpha\dot{\varphi})dt_2\bigg|_{\substack{\alpha=0\\t=t_2}}$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left(F_x-\frac{d}{dt}F_{\dot{x}}\right)\varphi dt+F_{\dot{x}}\varphi\bigg|_{t=t_2}+F\bigg|_{t=t_2}dt_2 \tag{19}$$

因为 $x(t)$ 满足欧拉方程，所以上式右端第 1 项为零．为得到 $\varphi(t_2)$ 与 dt_2 的关系考察末端时刻 $t_2+\alpha dt_2$，应有

$$x(t_2+\alpha\mathrm{d}t_2)+\alpha\varphi(t_2+\alpha\mathrm{d}t_2)=\psi(t_2+\alpha\mathrm{d}t_2)$$

对 α 求导并令 $\alpha=0$ 得

$$\dot{x}(t_2)\mathrm{d}t_2+\varphi(t_2)=\dot{\psi}(t_2)\mathrm{d}t_2$$

即

$$\varphi(t_2)=[\dot{\psi}(t_2)-\dot{x}(t_2)]\mathrm{d}t_2 \tag{20}$$

将(20)代入(19)式并利用 $\mathrm{d}t_2$ 的任意性，我们得到

$$[F+(\dot{\psi}-\dot{x})F_{\dot{x}}]\Big|_{t=t_2}=0 \tag{21}$$

(21)就是确定欧拉方程通解中另一常数的定解条件，称为横截条件.

横截条件有两种常用的特殊情况：

当 $x=\psi(t)$ 垂直于横轴时，t_2 固定但 $x(t_2)$ 自由，称 t_2 为自由端点. 因为在(19)中 $\mathrm{d}t_2=0$ 并注意到 φ 的任意性得

$$F_{\dot{x}}\Big|_{t=t_2}=0 \tag{22}$$

这是自由端点的定解条件.

当 $x=\psi(t)$ 平行于横轴时，$\dot{\psi}=0$，(21)式变为

$$(F-\dot{x}F_{\dot{x}})\Big|_{t=t_2}=0 \tag{23}$$

4. 条件极值　哈密尔顿(Hamilton)函数

前面讨论的是无条件泛函极值问题. 最优控制涉及的通常是条件极值，典型形式为

$$J(u(t))=\int_{t_1}^{t_2}F(t,x(t),u(t))\mathrm{d}t \tag{24}$$

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),u(t)) \tag{25}$$

其中 $u(t)$ 是控制函数，$x(t)$ 是状态函数或称轨线．问题的提法是求 $u(t)\in U$ 使泛函(24)在条件(25)下达到极值，并且 $x(t)\in S$．这里 U 和 S 分别是 $u(t)$ 和 $x(t)$ 的容许集．

用拉格朗日乘子法化条件极值为无条件极值问题．引入乘子函数 $\lambda(t)$ 构造泛函

$$I(x(t),u(t))=\int_{t_1}^{t_2}[F(t,x,u)+\lambda(t)(f(t,x,u)-\dot{x})]\mathrm{d}t \tag{26}$$

记

$$H(t,x,u)=F(t,x,u)+\lambda(t)f(t,x,u) \tag{27}$$

H 称哈密尔顿函数，(26)式可写作

$$I(x(t),u(t))=\int_{t_1}^{t_2}(H-\lambda\dot{x})\mathrm{d}t \tag{28}$$

条件极值(24)、(25)与含有两个函数 $x(t)$、$u(t)$ 的无条件极值问题(28)等价．根据(17)式，(28)的欧拉方程为

$$\begin{cases}(H-\lambda\dot{x})_x-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(H-\lambda\dot{x})_{\dot{x}}=0\\[2ex](H-\lambda\dot{x})_u-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(H-\lambda\dot{x})_{\dot{u}}=0\end{cases} \tag{29}$$

将(27)给出的 H 的表达式代入(29)可得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial x}+\dot{\lambda}(t)=0\\[2ex]\dfrac{\partial H}{\partial u}=0\end{cases}$$

于是条件极值问题归结为求解未知函数 $x(t)$、$u(t)$、$\lambda(t)$的微分方程组

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \\ \dfrac{\partial H}{\partial u} = 0 \\ \dot{x} = f(t, x, u) \end{cases} \tag{30}$$

最优控制函数 $u(t)$和最优状态函数(最优轨线)$x(t)$由方程组(30)在 $x(t)$的端点条件下解出.

习 题

1. 在 7.1 节制订生产计划模型中,当 $Q < \dfrac{k_2T^2}{4k_1}$ 时求最优解. 图 7-2 中 t_1 的确定可视为曲线 S_3 始端在直线 $x=0$ 上变动的泛函极值问题.

2. 对于 7.2 节生产与贮存的控制问题,用条件极值和哈密尔顿函数方法直接求(1)、(2)、(3)、(6)的解.

3. 在 7.4 节林木砍伐模型中验证最优解 t^* 满足(13)式.

*4. 下面是某林业公司林木实际价值 $V(t)$的一组数据($V(t)$的含义见 7.4 节(7)式):

t(年)	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
$V(t)$(元)	0	43	143	303	497	650	805	913	1000	1075

① 作出 $t \sim V(t)$图形. 由此分析 7.4 节所作的假设是否合理.

② 尽可能精确地得到 $\dot{V}(t)$. 设折扣因子 $\delta = 0.05$,确定砍伐林木的最佳时刻 t^*.[32]

5. 在 7.5 节渔业资源捕捞过度模型 Ⅰ 中,验证 $\delta=0$ 时的最优解 x^* 与 6.2 节的结果(13)式一致;$\delta \to \infty$ 时的 x^* 与 6.2 节的(17)式一致. 解释一致的

原因.

6. 在 7.5 节捕捞过度模型Ⅱ中

① 当 $p>c_2, \delta>2r$ 时证明不等式关系: $H(x)<f'(\xi)(0<\xi<x)$, $G(x)>H(x)$. 作出 $H(x)$和 $G(x)$的示意图, 证明最大效益将导致资源枯竭.

② 证明只要 $\delta<r$, 则不论 p 如何都不会导致资源枯竭.

7. 在 7.6 节渔船模型中, 将最优解 U^* 下渔场鱼量水平 $x^*(t>\tau)$ 与 7.5 节的(11)式比较, 说明其一致性.

* 8. 经研究发现在短跑比赛中, 运动员由于生理条件的限制在达到一定的高速度后不可能持续发挥自己的最大冲力. 假设运动员克服生理限制后能发挥的冲力 $f(t)$满足 $\dfrac{\dot{f}(t)}{f(t)}=-\dfrac{1}{k}$, k是冲力限制系数, $f(0)=F$ 为最大冲力.

将上述关系代入 7.8 节赛跑模型的(2)式, 求出短跑比赛时速度 $u(t)$和距离 $s(t)$的表达式, 及达到最高速度的时间, 作出 $v(t)$的示意图.

汉城奥运会男子百米决赛前 6 名在比赛中, 到达距离 s 处所用的时间 t 和当时的速度 v 如下表所示(平均值).

s(米)	0	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
t(秒)	0	0.955	2.435	3.435	4.355	5.230	6.085	6.945	7.815	8.690	9.575
v(米/秒)	0	5.24	9.54	10.52	11.19	11.62	11.76	11.49	11.47	11.36	11.22

试从这组数据估计出参数 τ、k、F. 算出 $v(t)$的理论值与实际数据比较.

你对这个模型有什么解释和评价[55]?

第三篇　确定性离散模型

在第二篇讨论的模型中我们都是用连续变量来描述研究对象的变化规律，而在现实世界里有些对象涉及的变量本身就是离散的，自然可以用离散模型描述其数量关系，例如 1.3 节的商人安全过河问题．也有些对象虽然涉及的变量（如时间）是连续的，但是从建模的目的考虑，把连续变量离散化更为合适，本篇第 8 章讨论的模型大多是这种情况．至于为了模型求解时利用计算机的需要，把连续模型离散化，则不在本篇讨论之列．

一般地说，确定性离散模型包括的范围很广，例如用规划论和网络流等方法建立的模型．但是在这一篇里我们将它的范围限制为用差分方程方法、层次分析方法以及比较简单的图的方法和逻辑方法建立的模型．这样，本篇所用的主要数学工具是差分方程和线性代数方法，以及关于图论和集合论的一些简单知识．

第 8 章　差分方程建模

在第 5 和第 6 章中我们看到，动态连续模型用微分方程方法建立．与此相应，当时间变量离散化后，可以用差分方程建立动态离散模型．有些实际问题既可建立连续模型，又可建立离散模型，究竟采用哪种模型应视建模目的而定．为了说明这点，与 5.7 节人口的连续模型相对应，8.4 节将介绍人口的离散模型．

对差分方程解法不熟悉的读者可参看 8.6 节．

8.1　市场经济中的蛛网模型

在自由贸易的集市上你注意过这样的现象吗：一个时期由

于猪肉的上市量远大于需求，销售不畅导至价格下降，农民觉得养猪赔钱，于是转而经营其它农副业．过一段时间后猪肉上市量大减，供不应求导至价格上涨．原来的饲养户看到有利可图，又重操旧业．这样下一个时期会重现供大于求、价格下降的局面．在没有外界干预的情况下，这种现象将如此循环下去．

在完全自由竞争的市场经济中上述现象通常是不可避免的．因为商品的价格是由消费者的需求关系决定的，商品数量越多价格越低．而下一时期商品的数量由生产者的供应关系决定，商品价格越低生产的数量就越少．这样的需求和供应关系决定了市场经济中商品的价格和数量必然是振荡的．在现实世界里这样的振荡会出现不同的形式，有的振幅渐小趋向平稳，有的则振幅越来越大导至经济崩溃．当然政府会对后者采取干预手段．

这一节我们先用图形方法建立所谓"蛛网模型"，对上述现象进行分析，讨论市场经济趋于稳定的条件．再用差分方程建模，对结果进行解释，并作适当推广．[31]

蛛网模型 记第 k 时段商品的数量为 x_k，价格为 y_k，$k=1$，2，…．这里我们把时间离散化为时段，1 个时段相当于商品的 1 个生产周期，如蔬菜、水果可以是 1 年，肉类则是 1 个饲养周期．

同一时段商品的价格 y_k 取决于数量 x_k，设

$$y_k=f(x_k) \tag{1}$$

它反映消费者对这种商品的需求关系，称**需求函数**．因为商品的数量越多价格越低，所以在图 8－1 中用一条下降曲线 f 表示它，f 为需求曲线．

下一时段商品的数量 x_{k+1} 由上一时段价格 y_k 决定，设

$$x_{k+1}=h(y_k)\text{，或}y_k=g(x_{k+1}) \tag{2}$$

它反映生产者的供应关系，称**供应函数**．因为价格越高生产量才

越大，所以在图中供应曲线 g 是一条上升曲线.

图中两条曲线相交于 $P_0(x_0,y_0)$ 点. P_0 是平衡点，因为一旦对某个 k 有 $x_k=x_0$，则由(1)、(2)可知 $y_k=y_0$，$x_{k+1}=x_0, y_{k+1}=y_0$，…，即商品的数量和价格将永远保持在 $P_0(x_0,y_0)$ 点.但是实际生活中的种种干扰使得 x,y 不可能停止在 P_0 点,不妨设 x_1 偏离 x_0 (如图 8－1).我们分析随着 k 的增加 x_k,y_k 的变化.

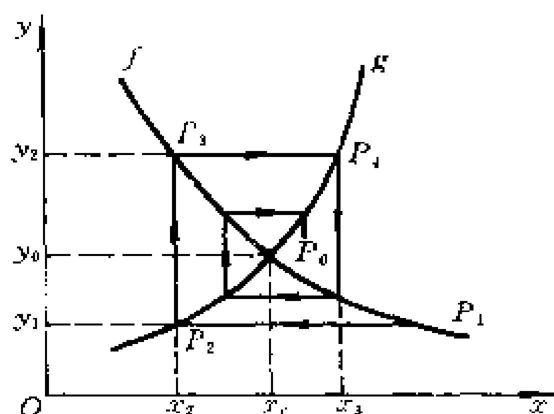


图 8－1 需求曲线 f 和供应曲线 g，P_0 是稳定平衡点

数量 x_1 给定后，价格 y_1 由曲线 f 上的 P_1 点决定，下一时段的数量 x_2 由曲线 g 上的 P_2 点决定，y_2 又由 f 上的 P_3 点决定，这样得到一系列的点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_1)$，$P_3(x_2,y_2)$，$P_4(x_3,y_2)$，…，在图8－1上这些点将按箭头所示方向趋向 $P_0(x_0,y_0)$，表明 P_0 是稳定平衡点，意味着市场经济（商品的数量和价格）将趋向稳定.

但是如果需求函数和供应函数由图 8－2 的曲线所示，则类似的分析发现，市场经济将按照 P_1,P_2,P_3,P_4，… 的规律变化而远离 P_0，即 P_0 是不稳定平衡点，市场经济趋向不稳定.

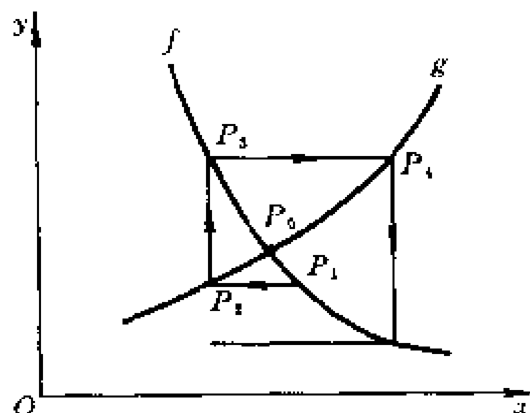


图 8－2 P_0 是不稳定平衡点

图 8－1 和图 8－2 中折线 $P_1P_2P_3P_4$… 形似蛛网，于是这种用需求曲线和供应曲线分析市场经济稳定性的图示法在经济学中称蛛网模型. 实际上，需求曲线 f 和供应曲线 g 的具体形式通常是根据各个时段商品的数量和价格的一系列统计资料 x_1,y_1,x_2,y_2，… 得到的. 一般地说，f 取决于消费者对这

种商品的需要程度和他们的消费水平，g 则与生产者的生产能力，经营水平等因素有关．

一旦需求曲线和供应曲线被确定下来，如何判断它们的交点—平衡点 P_0 的稳定性呢？从图 8－1 和图 8－2 不难看出，当市场经济偏离 P_0 点不大(即 $|x_1-x_0|$ 较小)时，P_0 点的稳定性取决于曲线 f 和 g 在 P_0 点的斜率．记 f 在 P_0 点斜率的绝对值(因为它是下降的)为 K_f，g 在 P_0 点的斜率为 K_g，则当

$$K_f < K_g \tag{3}$$

时 P_0 点是稳定的(图 8－1)，而当

$$K_f > K_g \tag{4}$$

时 P_0 点是不稳定的(图 8－2)．由此可见，需求曲线越平，供应曲线越陡，越有利于经济稳定．在对这种现象作出解释之前，我们先看看模型的差分方程形式．

差分方程形式　利用差分方程可以将蛛网模型的结果用公式表示出来．在 P_0 点附近取函数 f 和 h 的线性近似，设(1)、(2)式分别近似为

$$y_k - y_0 = -\alpha(x_k - x_0),\ \alpha > 0 \tag{5}$$

$$x_{k+1} - x_0 = \beta(y_k - y_0),\ \beta > 0 \tag{6}$$

消去 y_k，(5)、(6)可合并为

$$x_{k+1} = -\alpha\beta x_k + (1+\alpha\beta)x_0,\ k = 1, 2, \cdots \tag{7}$$

(7)是一阶线性差分方程，对 k 递推不难得到

$$x_{k+1} = (-\alpha\beta)^k x_1 + [1-(-\alpha\beta)^k]\,x_0 \tag{8}$$

由此可得，当 $k\to\infty$ 时 $x_k\to x_0$，即 P_0 点稳定的条件是

$$\alpha\beta<1 \text{ 或 } \alpha<\frac{1}{\beta} \tag{9}$$

而 $k\to\infty$ 时 $x_k\to\infty$，即 P_0 点不稳定的条件是

$$\alpha\beta>1 \text{ 或 } \alpha>\frac{1}{\beta} \tag{10}$$

注意到(5)、(6)式中 α、β 的定义，有 $K_f=\alpha$，$K_g=\dfrac{1}{\beta}$，所以条件(9)、(10)与蛛网模型中的(3)、(4)式是一致的．

模型解释　首先考察参数 α、β 的含义．需求函数 f 的斜率 α（取绝对值）表示商品供应量减少 1 个单位时价格的上涨幅度；供应函数 h 的斜率 β 表示价格上涨 1 个单位时（下一时期）商品供应的增加量．所以 α 的数值反映消费者对商品需求的敏感程度，如果这种商品是生活必需品，消费者处于持币待购状态，商品数量稍缺，人们立即蜂拥抢购，那么 α 会比较大；反之，若这种商品非必需品，消费者购物心理稳定，或者消费水平低下，则 α 较小．β 的数值反映生产经营者对商品价格的敏感程度，如果他们目光短浅，热衷于追逐一时的高利润，价格稍有上涨立即大量增加生产，那么 β 会比较大；反之，若他们素质较高，有长远的计划，则 β 较小．

根据 α、β 的意义很容易对市场经济稳定与否的条件(9)、(10)作出解释．当供应函数 g，即 β 固定时，α 越小，需求曲线越平，表明消费者对商品需求的敏感程度越小（使(9)式成立），越利于经济稳定．当需求函数 f，即 α 固定时，β 越小，供应曲线越陡，表明生产者对价格的敏感程度越小（使(9)式成立），越利于经济稳定．反之，当 α、β 较大，表明消费者对商品的

需求和生产者对商品的价格都很敏感，则会导致经济不稳定.

基于上述分析我们还可以看到，当市场经济趋向不稳定时政府有两种干预办法.一种办法是使 α 尽量小，极端情况是令 $\alpha=0$，即需求曲线水平，这时不论供应曲线如何(即不管 β 多大)，总是稳定的.这相当于政府控制物价，无论商品数量多少，命令价格不得改变.另一种办法是使 β 尽量小，极端情况是令 $\beta=0$，即供应曲线竖直，于是不论需求曲线如何(不管 α 多大)，也总是稳定的.这相当于控制市场上的商品数量，当供应量少于需求时，政府从外地收购或调拨，投入市场；当供过于求时，政府收购过剩部分，维持商品上市量不变.

模型的推广 如果生产者的管理水平更高一些，他们在决定商品生产数量 x_{k+1} 时，不是仅根据前一时期的价格 y_k，而是根据前两个时期的价格 y_k 和 y_{k-1}.为简单起见不妨设根据二者的平均值 $\frac{1}{2}(y_k+y_{k-1})$，于是供应函数(2)式表为

$$x_{k+1}=g\left(\frac{y_k+y_{k-1}}{2}\right) \tag{11}$$

在 P_0 点附近取线性近似时(6)式表为

$$x_{k+1}-x_0=\frac{\beta}{2}(y_k+y_{k-1}-2y_0) \tag{12}$$

β 含义不变.又设需求函数仍由(1)、(5)式表示.则由(5)、(12)式得到

$$2x_{k+2}+\alpha\beta x_{k+1}+\alpha\beta x_k=(1+\alpha\beta)x_0,k=1,2,\cdots \tag{13}$$

(13)是二阶线性差分方程.为寻求 $k\to\infty$ 时 $x_k\to x_0$，即 P_0 点稳定的条件，不必解方程(13)，只须利用判断稳定的条件— 方程特

征根均在单位圆内(见 8.6 节(9)式).

因为方程(13)的特征方程是

$$2\lambda^2+\alpha\beta\lambda+\alpha\beta=0$$

容易算出其特征根为

$$\lambda_{1,2}=\frac{-\alpha\beta\pm\sqrt{(\alpha\beta)^2-8\alpha\beta}}{4} \tag{14}$$

当 $\alpha\beta>8$ 时显然有

$$\lambda_2=\frac{-\alpha\beta-\sqrt{(\alpha\beta)^2-8\alpha\beta}}{4}<-\frac{\alpha\beta}{4}$$

从而 $|\lambda_2|>2$，λ_2 在单位圆外. 下面设 $\alpha\beta<8$，可以算出

$$|\lambda_{1,2}|=\sqrt{\frac{\alpha\beta}{2}} \tag{15}$$

由 $|\lambda_{1,2}|<1$ 得到 P_0 点稳定的条件为

$$\alpha\beta<2 \tag{16}$$

与原有模型中 P_0 点稳定的条件(9)式相比，保持经济稳定的参数 α、β 的范围放大了(α、β 的含义未变). 可以想到，这是生产经营者的生产管理水平提高，对市场经济稳定起着有利影响的必然结果.

8.2 差分形式的阻滞增长模型

前面几章中我们曾不止一次地用微分方程

$$\dot{x}(t)=rx\left(1-\frac{x}{N}\right) \tag{1}$$

描述受到环境约束的所谓“阻滞增长”的规律，即 Logisfic 规律，这种约束随着对象本身数量 x 的增加而增加．人口或其它生物在有限资源环境下的增长，传染病在封闭地区的传播，耐用消费品在有限市场上的销售等等现象，都可以合理地、简化地用这个模型描述．

现实对象有时用离散化的时间研究起来比较方便，例如有些生物每年在固定的时间繁殖，我们用繁殖周期作为时段来研究其增长规律就比用连续时间方便，于是需要阻滞增长的离散模型．将方程（1）中的微分用差分形式表示，就有

$$y_{k+1}-y_k=ry_k\left(1-\frac{y_k}{N}\right),k=0,1,2,\cdots \tag{2}$$

这里用 y_k 而不用 x_k 是为了下面记号的方便．r 和 N 的含义同前，仍分别是固有增长率和最大容量．

（2）式可进一步写作

$$y_{k+1}=(r+1)y_k\left[1-\frac{r}{(r+1)N}y_k\right] \tag{3}$$

令

$$b=r+1 \tag{4}$$

$$x_k=\frac{r}{(r+1)N}y_k \tag{5}$$

则（3）式可化简为

$$x_{k+1}=b\,x_k(1-x_k),\ k=0,1,2,\cdots \tag{6}$$

（6）式是一阶非线性差分方程．在实际应用中没有必要找出方程（6）的一般解，因为给定初值 x_0 后利用计算机可以方便地由（6）递推地算出 x_k，$k=1,2,\cdots$．

事实上，在应用差分形式的阻滞增长模型(2)或(6)时，人们最关心的通常是 $k\to\infty$ 时 y_k 或 x_k 的收敛情况，即方程平衡点的稳定性问题．本节主要讨论这个问题[1,31]．

我们知道，对于微分方程(1)，$x^*=N$ 是稳定平衡点，$x^*=0$ 是不稳定平衡点，即不论 $r(>0)$ 和 $N(>0)$ 为何值，都有当 $t\to\infty$ 时 $x(t)\to N$．那么对于方程(1)的差分形式(2)，是否也有同样的性质，即 $k\to\infty$ 时 $y_k\to N$ 呢？下面将会看到，回答这个问题并不简单，而且将引出一个十分有趣的现象．

平衡点及稳定性　代替(2)式我们讨论方程(6)的平衡点及其稳定性(非线性差分方程平衡点稳定性判据见 8.6 节(13)式)．因为 $r>0$，由(4)知 $b>1$．为了求(6)的平衡点，解代数方程

$$x=f(x)=bx(1-x) \tag{7}$$

容易得到(6)的非零平衡点为*)

$$x^*=1-\frac{1}{b}, \tag{8}$$

利用(4)、(5)式可以验证，x^* 相当于原方程(2)的非零平衡点 $y^*=N$．为分析 x^* 的稳定性，计算

$$f'(x^*)=b(1-2x^*)=2-b \tag{9}$$

根据 x^* 稳定的条件 $|f'(x^*)|<1$，立即得到

$$1<b<3 \tag{10}$$

由此可知，仅当(10)成立时 x^* 才是稳定平衡点．由(4)式可知它相当于仅当 $r<2$ 时 $y^*=N$ 才是方程(2)的稳定平衡点．这与不论 r 多大 $x^*=N$ 都是微分方程(1)的稳定平衡点是不同的．

---

*) $x=0$ 也是方程(6)的一个平衡点，但是容易验证它是不稳定的，以后不再讨论它．

在条件(10)下 x_k 收敛于 x^* 的状况可以通过方程(6)的图解法清楚地表示出来．以 x 为横坐标作 $y=f(x)=bx(1-x)$ 和 $y=x$ 的图形(图 8－3)，曲线 $y=f(x)$ 和直线 $y=x$ 交点的横坐标为平衡点 x^*．对于初值 x_0 由方程(6)求 $x_1,x_2,\cdots$ 的过程表示为图上带箭头的折线．当 $1<b<2$ 时 $x^*<\frac{1}{2}$，$x_k\to x^*$ 的过程基本上是单调的(见图 8－3(1))；而当 $2<b<3$ 时 $x^*>\frac{1}{2}$，$x_k\to x^*$ 的过程则会出现如图 8－1 蛛网模型那样的衰减振荡(图 8－3(2))．

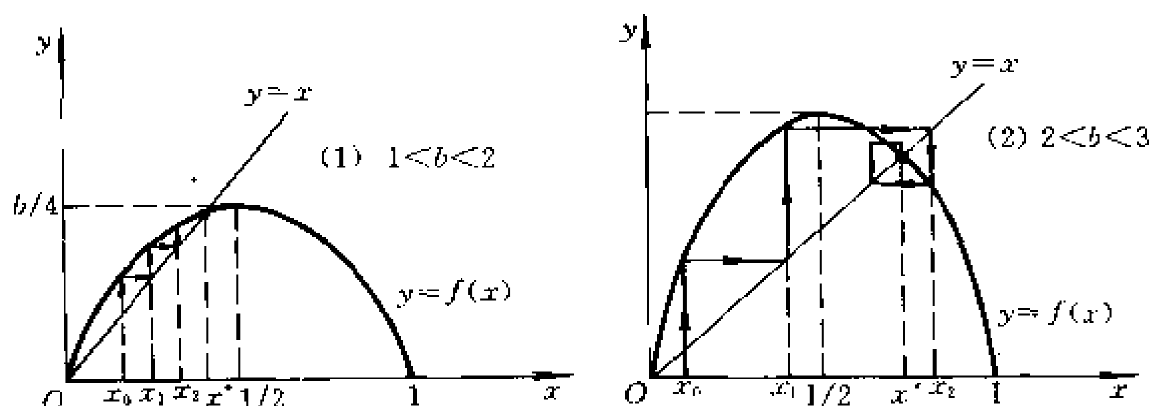


图 8－3　方程(6)的图解法($x_k\to x^*$)

当 $b>3$ 时，虽然方程(6)仍可形式地求解，但 x^* 不稳定，其图解法如图 8－4 所示，出现如图 8－2 蛛网模型那样发散的振荡($x_k\not\to x^*$)．

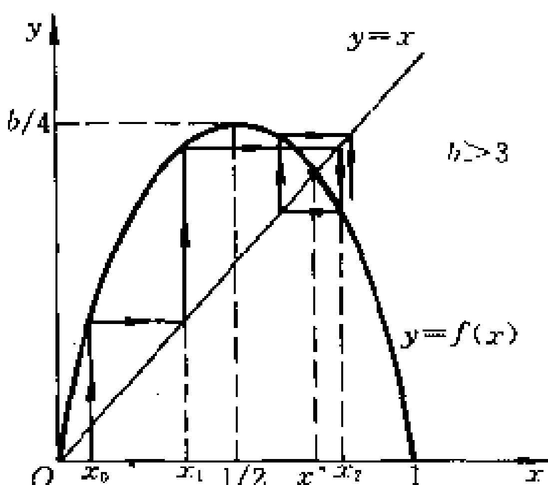


图 8－4　方程(6)的图解法($x_k\not\to x^*$)．

事情到此并未完结，作一些计算就会发现，当 b 比 3 大得不太多时，虽然序列 $\{x_k\}$ 不再收敛于 x^*，但是出现了两个

了序列的收敛点 x_1^* 和 x_2^*，当 $k\to\infty$ 时 $x_{2k}\to x_1^*$，$x_{2k+1}\to x_2^*$. 如果说原来的 $x_k\to x^*$ 是单周期收敛（如生物繁殖的周期），那么这里就可以称为 2 倍周期收敛了.

倍周期收敛 如果一般地把方程(6)表示为

$$x_{k+1}=f(x_k) \tag{11}$$

那么在讨论 2 倍周期收敛时应考察

$$x_{k+2}=f(x_{k+1})=f(f(x_k))=f^{(2)}(x_k)^{*)} \tag{12}$$

为了求方程(12)的平衡点，对于我们的模型(6)要解代数方程

$$x=f(f(x))=b\cdot bx(1-x)[1-bx(1-x)] \tag{13}$$

因为方程(12)的平衡点 x^* 满足 $x^*=f^{(2)}(x^*)$，所以零点和原来的 $x^*=1-\dfrac{1}{b}$ 是它的平衡点. 此外，满足

$$x_1^*=f(x_2^*), \qquad x_2^*=f(x_1^*) \tag{14}$$

的点 x_1^*、x_2^* 也是(12)的平衡点. $x_{1,2}^*$ 可由(13)解得

$$x_{1,2}^*=\frac{b+1\mp\sqrt{b^2-2b-3}}{2b} \tag{15}$$

不难验证当 $b>3$ 时

$$0<x_1^*<x^*<x_2^*<1 \tag{16}$$

下面在 $b>3$ 下讨论这些平衡点的稳定性. x^* 显然是不稳定的(请读者验证). 对于 x_1^* 和 x_2^*，因为

$$(f^{(2)}(x))'|_{x=x_1^*}=f'(x_2^*)f'(x_1^*),\ (f^{(2)}(x))'|_{x=x_2^*}=f'(x_1^*)f'(x_2^*)$$

---

*) 这里上角数字(2)表示迭代次数，下同.

故 x_1^*，x_2^* 的稳定性相同，由

$$(f^{(2)}(x))'|_{x=x_1^*,x_2^*}=b^2(1-2x_1^*)(1-2x_2^*) \tag{17}$$

和稳定判据 $|(f^{(2)}(x_{1,2}^*))'|<1$，并将(15)代入(17)可得 $x_{1,2}^*$ 的稳定条件为

$$b<1+\sqrt{6}\doteq 3.449 \tag{18}$$

由上述计算可知，当 $3<b<3.449$ 时虽然 x^* 不稳定，但是 $x_{1,2}^*$ 是方程(12)的稳定平衡点，即 x_k，x_{k+2}，$\cdots\to x_1^*$(或 x_2^*)，于是对于原方程(6)，$x_{1,2}^*$ 是序列 $\{x_k\}$ 的两个子序列的极限，即 $x_1,x_3,x_5\cdots\to x_1^*$(或 x_2^*)，$x_2,x_4,x_6,\cdots\to x_2^*$(或 x_1^*)。这个过程可以从方程(12)的图解法中看到(图 8－5)。

作为生物数量阻滞增长的离散模型，以上结果表明，当固有增长率 $2<r<2.449$ 时，从一个繁殖周期(即一代)的角度看，其数量增长是不稳定的，即没有极限。但从两个繁殖周期(即两代)的角度看，增长却是稳定的。这就是所谓的 2 倍周期收敛。

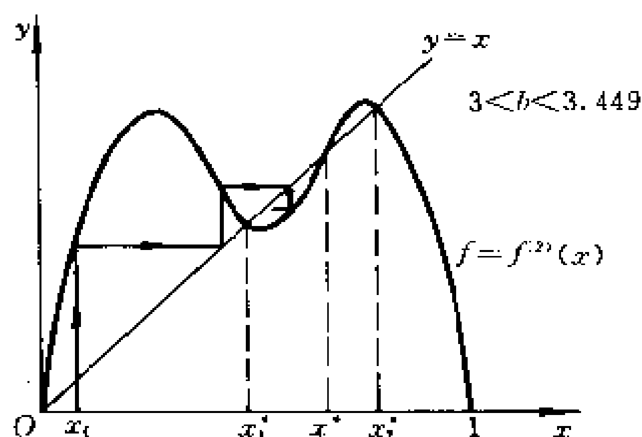


图 8－5 方程(12)的图解法 $x_{2k}\to x_{1,2}^*$
(图中只画出收敛于 x_1^* 的情况)

读者不难想到，当 $b>3.449$ 时 $x_{1,2}^*$ 不再是方程(12)的稳定

平衡点，从而对于方程(6)来说2倍周期也不收敛了，但是可以发现存在4倍周期收敛．进一步考察方程

$$x_{k+4}=f^{(4)}(x_k) \tag{19}$$

用类似的方法可得，当

$$3.449<b<3.544 \tag{20}$$

时(19)有4个稳定平衡点．于是对于原来的模型(6)，从4个繁殖周期(4代)的角度看，增长是稳定的．

按照这样的规律我们可以对模型(6)的增长序列$\{x_k\}$讨论2^n倍周期收敛问题，$n=0,1,2,\cdots$．收敛性完全由参数b的取值确定．若记b_n为使2^n倍周期收敛的b的上限，则上面的结果给出：$b_0=3$，$b_1=3.449$，$b_2=3.544$．更深入的研究表明，当$n\to\infty$时$b_n\to3.57$．而当$b>3.57$时就不再存在任何2^n倍周期收敛，x_k的趋势呈现一片混乱，这就是所谓浑沌现象(Chaos)．

评注 本节虽然没有讨论具体的实际问题，但是作为描述阻滞增长规律的Logistic模型，无论是微分方程形式还是差分形式都是有着广泛应用的，请读者举出一些应用的例子．

另外，从数学角度看，方程(6)是非常简单的非线性差分方程，可以方便地递推求解．但是正如我们所看到的，它的收敛性的研究却引出相当复杂和有趣的现象，可以作为分叉(Bifurcation)理论和浑沌现象的导入．当然这些问题已经超出本书的范围了．

8.3 按年龄分组的种群增长

前面的章节中我们曾多次地用阻滞增长模型描述种群数量的变化，这个模型不考虑种群的年龄结构，种群的数量主要由总量的固有增长率决定．但是不同年龄动物的繁殖率和死亡率有着明

显的不同，为了更精细地预测种群的增长，本节讨论按年龄分组的种群增长预测模型．这个向量形式的差分方程是 Leslie 在本世纪四十年代用来描述女性人口变化规律的，我们将在本节最后说明它在人口模型中的应用．

下面先建立差分方程模型，接着讨论稳定状况(即时间充分长)下种群的增长规律，然后分析各年龄组的繁殖率和死亡率对种群总量增减的影响．

模型建立　将种群按年龄大小等间隔地分成 n 个年龄组．若最大年龄为 m 岁，则这 n 个年龄组的年龄区间是 $[(i-1)\frac{m}{n}, i\frac{m}{n})$*)，$i=1,2,\cdots,n$　与年龄的离散化相对应，时间也离散为时段 t_k，$k=0,1,2,\cdots$，并且时段的间隔与年龄区间大小相等，即 $t_k-t_{k-1}=\frac{m}{n}$．譬如若每5 岁为1个年龄组，那么就以 5 年为 1 个时段．

种群是通过雌性个体的繁殖而增长的，所以用雌性个体数量的变化为研究对象比较方便，下面提到的种群数量均仅指其中的雌性．

记时段 t_k 第 i 年龄组的种群数量为 $x_i(k)$；第 i 年龄组的繁殖率为 b_i，即第 i 年龄组每个(雌性)个体在 1 个时段内平均繁殖的数量；第 i 年龄组的死亡率为 d_i，即第 i 年龄组 1 个时段内死亡数与总数之比．$s_i=1-d_i$ 称为存活率．这里我们假设 b_i 和 d_i(从而 s_i)不随时段 t_k 变化，在稳定的环境下这个假设是合理的．b_i 和 s_i 可由统计资料获得．$x_i(k)$ 的变化规律由以下的基本事实得到：时段 t_{k+1} 第 1 年龄组种群数量是时段 t_k 各年龄组繁殖数量之和，即

---

*) 为方便起见，设 $\frac{m}{n}$ 是整数．

$$x_1(k+1)=\sum_{i=1}^{n} b_i x_i(k) \tag{1}$$

及时段 t_{k+1} 第 $i+1$ 年龄组的种群数量是时段 t_k 第 i 年龄组存活下来的数量，即

$$x_{i+1}(k+1)=s_i x_i(k),\ i=1,2,\cdots,n-1 \tag{2}$$

记时段 t_k 种群按年龄组的分布向量为

$$x(k)=[x_1(k),x_2(k),\cdots,x_n(k)]^T \tag{3}$$

$$L=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ & s_2 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & \ddots & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

则(1)、(2)可表为

$$x(k+1)=Lx(k),\ k=0,1,2,\cdots \tag{5}$$

当矩阵 L 和按年龄组的初始分布向量 $x(0)$已知时，可以预测任意时段 t_k 种群按年龄组的分布为

$$x(k)=L^k x(0),\ k=1,2,\cdots \tag{6}$$

有了 $x(k)$当然不难算出时段 t_k 种群的总数．

稳定状况分析　下面研究时间充分长后(即 $k\to\infty$)种群的年龄结构及数量的变化．

根据 b_i和 s_i的定义，矩阵 L 中的元素满足

$$0 < s_i \leqslant 1, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1^{*)} \tag{7}$$

$$b_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \text{ 且至少一个 } b_i > 0 \tag{8}$$

满足(7)、(8)的矩阵 L 称 Leslie 矩阵(简称 L 矩阵)．容易看出，$x(k)$的稳定性态完全由 L 矩阵决定．关于 L 矩阵我们不加证明地叙述两个定理．

定理 1 L 矩阵有唯一的正特征根 λ_1，且它是单重的，λ_1 对应正特征向量

$$x^* = \left[1, \frac{s_1}{\lambda_1}, \frac{s_1 s_2}{\lambda_1^2}, \cdots, \frac{s_1 s_2 \cdots s_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}}\right]^T \tag{9}$$

L 矩阵的其他 $n-1$ 个特征根 $\lambda_k (k = 2, 3, \cdots, n)$都满足

$$|\lambda_k| \leqslant \lambda_1, \quad k = 2, 3, \cdots, n \tag{10}$$

该定理表明 L 矩阵的特征方程

$$\lambda^n - (b_1 \lambda^{n-1} + b_2 s_1 \lambda^{n-2} + \cdots + b_{n-1} s_1 s_2 \cdots s_{n-2} \lambda + b_n s_1 s_2 \cdots s_{n-1}) = 0 \tag{11}$$

只有一个正实单根 λ_1，且容易验证 $Lx^* = \lambda_1 x^*$．

定理 2 若 L 矩阵第一行有两项顺次的元素 b_i，b_{i+1} 都大于零，则(10)式中仅不等号成立，即

$$|\lambda_k| < \lambda_1, \quad k = 2, 3, \cdots, n \tag{12}$$

且由(6)式表示的 $x(k)$满足

$$\lim_{k \to \infty} \frac{x(k)}{\lambda_1^k} = c x^* \tag{13}$$

其中 c 是由 b_i、s_i 及 $x(0)$决定的常数．

---

*) 如果某个 $s_i = 0$，那么第 i 年龄组应取消．

附带指出，对于种群增长来说该定理的条件通常是满足的．

从上述定理可以对时间充分长（k 充分大）后种群按年龄组的分布 $x(k)$ 的性态作出如下分析．（为简便起见 λ_1 记作 λ）

1）由(13)式直接有

$$x(k) \approx c\lambda^k x^* \tag{14}$$

这表明 k 充分大时种群按年龄组的分布 $x(k)$ 趋向稳定，其各年龄组的数量占总量的比例，与特征向量 x^* 中对应分量占总量的比例是一样的，即 x^* 就表示了种群按年龄组的分布状况，故 x^* 可称为稳定分布，它与初始分布 $x(0)$ 无关．

2）由(14)式又可得到

$$x(k+1) \approx \lambda x(k)$$

或者更清楚地写作

$$x_i(k+1) \approx \lambda x_i(k), \quad i=1,2,\cdots,n \tag{15}$$

这表明 k 充分大时种群的增长也趋向稳定，其各年龄组的数量都是上一时段同一年龄组数量的 λ 倍，即种群的增长完全由 L 矩阵的唯一正特征根决定．显然，当 $\lambda>1$ 时种群递增；$\lambda<1$ 时种群递减．λ 可称固有增长率．

3）$\lambda=1$ 时种群总量不变．由(11)式可知这个条件等价于

$$b_1+b_2 s_1+\cdots+b_n s_1 s_2\cdots s_{n-1}=1 \tag{16}$$

若将(16)式左端记作

$$R=b_1+b_2 s_1+\cdots+b_n s_1 s_2\cdots s_{n-1} \tag{17}$$

由这个表达式可以知道，R 表示一个（雌性）个体在整个存活期内繁殖的平均数量，称为总和繁殖率．显然，$R=1$ 时种群总量不变．由(9)式可知此时稳定分布为

$$x^*=[1,s_1,s_1s_2,\cdots,s_1s_2,\cdots,s_{n-1}]^T \tag{18}$$

根据(14)式这个结果表明

$$x_{i+1}(k)\approx s_i x_i(k),\ i=1,2,\cdots,n-1 \tag{19}$$

即当 k 充分大且 $R=1$ 时，存活率 s_i 等于相邻两年龄组的种群数量 $x_{i+1}(k)$ 与 $x_i(k)$ 之比(试将(19)与(2)式进行比较)．

b_i 和 s_i 对种群增减的灵敏性分析　对于人工饲养的种群，各年龄组的繁殖率 b_i 自然能够控制，各年龄组的存活率 s_i 也可以通过宰杀的比例来调整．对于一组已经给定的 $b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 和 $s_i(i=1,2,\cdots,n-1)$，人们希望知道其中哪些 b_i 和 s_i 对种群增减所起的作用是显著的，从而可以有目的地控制这些 b_i 和 s_i．如果把通过调整 b_i 和 s_i 能够使种群由增变减或由减变增视为作用显著，或称对种群增减的反应灵敏，那么可以对这种灵敏性作如下分析．

首先，在稳定状况下可以证明，若总和繁殖率 $R>1$ 则种群递增，若 $R<1$ 则种群递减(留作习题 7)．

下面对 b_i 及 s_i 的灵敏性分别讨论．

先考察 b_i 的灵敏性．设 s_i 固定，将 R 记作

$$R(b_1,b_2,\cdots,b_n)=b_1+b_2s_1+\cdots+b_ns_1s_2\cdots s_{n-1} \tag{20}$$

对于现有的一组 $b_i^0(i=1,2,\cdots,n)$，若

$$R(b_1^0,b_2^0,\cdots b_n^2)>1 \tag{21}$$

而存在某个 b_i，当 $b_i=0$ 时有

$$R(b_1^0,\cdots,b_{i-1}^0,0,b_{i+1}^0,\cdots,b_n^0)<1 \tag{22}$$

或者若

$$R(b_1^0, b_2^0, \cdots, b_n^0) < 1 \tag{23}$$

而存在某个 b_i，当 $b_i = b_i'$（b_i'是 b_i 的最大容许值）时有

$$R(b_1^0, \cdots, b_{i-1}^0, b_i', b_{i+1}^0, \cdots, b_n^0) > 1 \tag{24}$$

我们说这个 $b_i(=b_i^0)$对于种群的增减是灵敏的．实际上，(21)、(22)式表明，当控制第 i 年龄组不进行繁殖时，可使种群由增变减；(23)、(24)式表明，当控制第 i 年龄组有最大容许繁殖率时，种群由减变增．

类似地，对于s_i，设 b_i 固定，将 R 记作

$$R(s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}) = b_1 + b_2 s_1 + \cdots + b_n s_1 s_2 \cdots s_{n-1} \tag{25}$$

对于现有的一组 $s_i^0(i = 1, 2, \cdots, n-1)$，若

$$R(s_1^0, s_2^0, \cdots, s_{n-1}^0) > 1 \tag{26}$$

而存在某个 s_i，当 $s_i = 0$ 时有

$$R(s_1^0, \cdots, s_{i-1}^0, 0, s_{i+1}^0, \cdots, s_{n-1}^0) < 1 \tag{27}$$

或者若

$$R(s_1^0, s_2^0, \cdots, s_{n-1}^0) < 1 \tag{28}$$

而存在某个 s_i，当 $s_i = 1$ 时有

$$R(s_1^0, \cdots, s_{i-1}^0, 1, s_{i+1}^0, \cdots, s_{n-1}^0) > 1 \tag{29}$$

称这个 $s_i(=s_i^0)$对于种群增减是灵敏的．读者不难对此作出解释．

最后我们指出，Leslie 模型(1)～(6)及其稳定状况的性态(14)～(19)完全适用于人口模型，当然指的是女性人口．而当性别比已知时就不难得到全体人口的状况．在人口模型中 R 称

总和生育率，即每个妇女一生平均生育的女儿数．不难理解，当 $R=1$ 即每个妇女一生平均只生育一个女儿时，社会总人口不变．

8.4 人口的预测和控制(二)

在 5.7 节中我们用一阶偏微分方程形式的连续模型讨论了人口的预测和控制问题．得到了一些理论上的分析结果．但是在实际应用中连续模型却很不方便，需要建立相应的离散模型，因为第一，作为已知条件(输入)的统计数据都是离散的，如某某年各个年龄的女性生育率、死亡率、性别比等；第二，作为结果(输出)人们希望得到的数据也是离散的，如 2000年、2020 年、2050 年 … 的人口总数、各个人口指数、人口的年龄分布等；第三，连续模型解的表达式(5.7 节(7)式)中包含了未知函数(5.7 节(12)式)，用解析方法迭代求解是非常困难的，与其用数值方法解连续模型，不如直接建立离散模型．并且下面将会看到，这个离散模型属于现代控制理论中的所谓"双线性模型"，有现成的算法．

本节引用的一些参量如死亡率、女性生育率、生育模式及人口指数等的基本含义与 5.7 节连续模型相同，只不过是相应的离散形式，读者可以对照起来分析[41]．

人口发展方程　时间以年为单位，年龄按周岁计算，设最大年龄为 m 岁．记 $x_i(t)$为第 t 年 i 岁(满 i 周岁而不到 $i+1$ 周岁)的人数，$t=0,1,2,\cdots,i=0,1,2,\cdots,m$．只考虑由于生育、老化和死亡引起的人口演变，而不计迁移等社会因素的影响．记 $d_i(t)$为第 t 年 i 岁人口的死亡率，即

$$d_i(t)=\frac{x_i(t)-x_{i+1}(t+1)}{x_i(t)}$$

于是

$$x_{i+1}(t+1)=(1-d_i(t))x_i(t),$$

$$i=0,1,2,\cdots,\quad m-1,t=0,1,2,\cdots \tag{1}$$

记$b_i(t)$为第t年i岁女性生育率，即每位女性平均生育婴儿数，$[i_1,i_2]$为育龄区间，$k_i(t)$为第t年i岁人口的女性比，则第t年的出生人数为

$$f(t)=\sum_{i=i_1}^{i_2}b_i(t)k_i(t)x_i(t) \tag{2}$$

记$d_{00}(t)$为第t年婴儿死亡率，即第t年出生但未活到人口统计时刻的婴儿比例[*]

$$d_{00}(t)=\frac{f(t)-x_0(t)}{f(t)}$$

于是

$$x_0(t)=(1-d_{00}(t))f(t) \tag{3}$$

对于$i=0$将(2)、(3)代入(1)得

$$x_1(t+1)=(1-d_{00}(t))(1-d_0(t))\sum_{i=i_1}^{i_2}b_i(t)k_i(t)x_i(t) \tag{4}$$

将$b_i(t)$分解为

$$b_i(t)=\beta(t)h_i(t) \tag{5}$$

其中$h_i(t)$是生育模式，用以调整育龄妇女在不同年龄时生育率的高低，满足

---

*) 婴儿死亡率通常较高，在人口统计和建模中一般都不能忽略．每个国家都规定一年中的某时刻为人口统计时刻，如我国是每年的7月1日零时．

$$\sum_{i=i_1}^{i_2} h_i(t)=1 \tag{6}$$

利用(6)式对(5)式求和得到

$$\beta(t)=\sum_{i=i_1}^{i_2} b_i(t) \tag{7}$$

可知$\beta(t)$表示第t年每个育龄妇女平均生育的婴儿数，若设在t年后的一个育龄时期内各个年龄的女性生育率$b_i(t)$都不变，那么$\beta(t)$又可表为

$$\beta(t)=b_{i_1}(t)+b_{i_1+1}(t+1)+\cdots+b_{i_2}(t+i_2-i_1) \tag{8}$$

即$\beta(t)$是第t年i_1岁的每位妇女一生平均生育的婴儿数，称总和生育率，或生育胎次，是控制人口数量的主要参数．

将(5)式代入(4)式，并记

$$b_i'(t)=(1-d_{00}(t))(1-d_0(t))h_i(t)k_i(t) \tag{9}$$

则(4)式写作

$$x_1(t+1)=\beta(t)\sum_{i=i_1}^{i_2} b_i'(t)x_i(t) \tag{10}$$

引入向量、矩阵记号

$$x(t)=[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_m(t)]^T \tag{11}$$

$$A(t)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-d_1(t) & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1-d_2(t) & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1-d_{m-1}(t) & 0 \end{bmatrix}_{m\times m} \tag{12}$$

$$B(t)=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{i_1}'(t) & \cdots & b_{i_2}'(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & & & & & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & & & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m\times m} \tag{13}$$

那么(10)式和(1)式($i=1,2,\cdots,m-1$)可以记作

$$x(t+1)=A(t)x(t)+\beta(t)B(t)x(t) \tag{14}$$

这个向量形式的一阶差分方程就是人口发展方程．当初始人口分布 $x(0)$已知，又由统计资料确定了 $A(t)$、$B(t)$，并且给定了总和生育率 $\beta(t)$以后，用这个方程不难预测人口的发展过程．

在控制理论中 $x(t)$称状态变量，可将 $\beta(t)$作为控制变量，因为对于 $\beta(t)$和 $x(t)$分别是线性的，所以是双线性方程，其性质和解法的讨论已超出本书范围．

在稳定的社会环境下可以认为死亡率、生育模式和女性比不随时间变化．于是 $A(t)$、$B(t)$为常数矩阵，(14)化为

$$x(t+1)=Ax(t)+\beta(t)Bx(t) \tag{15}$$

人口指数　像连续模型一样，用离散模型描述人口的发展也常引入一些人口指数．

1．人口总数 $N(t)$

$$N(t)=\sum_{i=0}^{m} x_i(t) \tag{16}$$

2．平均年龄 $R(t)$

$$R(t)=\frac{1}{N(t)}\sum_{i=0}^{m} i\,x_i(t) \tag{17}$$

3．平均寿命 $S(t)$

$$S(t)=\sum_{j=0}^{m}\exp\left[-\sum_{i=0}^{j} d_i(t)\right] \tag{18}$$

其含义是，第 t 年出生的人不论活到哪一年，死亡率都用第 t 年的死亡率 $d_i(t)$ 计算时，这些人的平均存活时间．我国人口的平均寿命在本世纪三十年代是 35 岁左右，解放初期为 50 岁左右（1950 年，北京地区），到 1978 年达到 68.3 岁．

4．老龄化指数 $\omega(t)$

$$\omega(t)=\frac{R(t)}{S(t)} \tag{19}$$

是反映人口老龄化程度的指标．$\omega(t)<0.5$ 时属于青壮年型社会．我国 $\omega=0.3835$（1978 年）．

5．依赖性指数 $\rho(t)$

$$\rho(t)=\frac{N(t)-L(t)}{L(t)} \tag{20}$$

其中

$$L(t)=\sum_{i=l_1}^{l_2}[1-k_i(t)]x_i(t)+\sum_{i=l_1'}^{l_2'}k_i(t)x_i(t) \tag{21}$$

这里 $[l_1,l_2]$ 和 $[l_1',l_2']$ 分别是男性和女性劳动力的年龄区间，$L(t)$ 是有劳动能力的人口数，于是 $\rho(t)$ 表示每个劳动力需供养的人口数．我国 $\rho=0.958$（1978 年），世界平均水平为 $\rho=0.695$（1981 年）．

我国人口总数的预测　用模型(14)根据 1978 年的统计资料对我国人口总数作的预测如下．死亡率用下列公式外推：

$$\mu_i(t)=\begin{cases}\mu_i(1978)[1-(t-1978)10^{-3}] & i\leqslant 5,\ i\geqslant 50\\ \mu_i(1978), & 5<i<50\end{cases} \tag{22}$$

生育模式取 Γ 分布的离散值：

$$h(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{768}(r-18)^4 e^{-\frac{r-18}{2}}, & r\geq 18\\ 0, & r<18\end{cases} \tag{23}$$

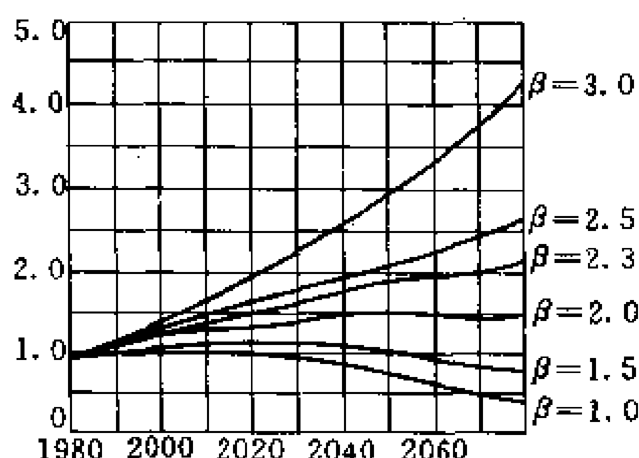


图 8－6　我国人口预测

性别比 $k_i(t)$ 取统计数据的平均值 0.487，在不同的总和生育率 β 下得到了 1980－2080 年一系列结果，图 8－6 是这些结果的略图．计算结果表明：

1）若 $\beta=3$（七十年代中期水平），则 2000 年将达 14.2 亿 2080 年达 43.1 亿，近于当前全世界人口总和．

2）若 $\beta=2.3$（约为 1980 年水平），则 2000 年将达 12.9 亿，2080 年为 21.2 亿．

3）若 $\beta=2$（大约是保持人口长期稳定的水平），则 2000 年为 12.2 亿，72 年后达到最大值，此后略有下降．

4）若 $\beta=1.5$，则在 2007 年达到最大值，到 2080 年降至 7.8 亿（1968 年水平）．

5）若 $\beta=1$，即全国严格执行一对夫妇只生一个孩子的政策，则在 2004 年达到最大值 10.6 亿，50 年后降至 9,5 亿（1978 年水平）．

8.5 交通网络控制

机动车辆迅速增加，城市交通日益繁忙，在一些没有立交桥的交叉路口，车辆排长队等候绿灯的情况经常发生．如何根据车流状况调节各路口的红绿灯时间，使等待的车队长度尽可能短，是交通网络控制的主要任务．本节讨论的交通网络是超饱和的，就是说在各路口等候的车队足够长，以至在绿灯持续时间内有连续不断的车辆通过[40]．

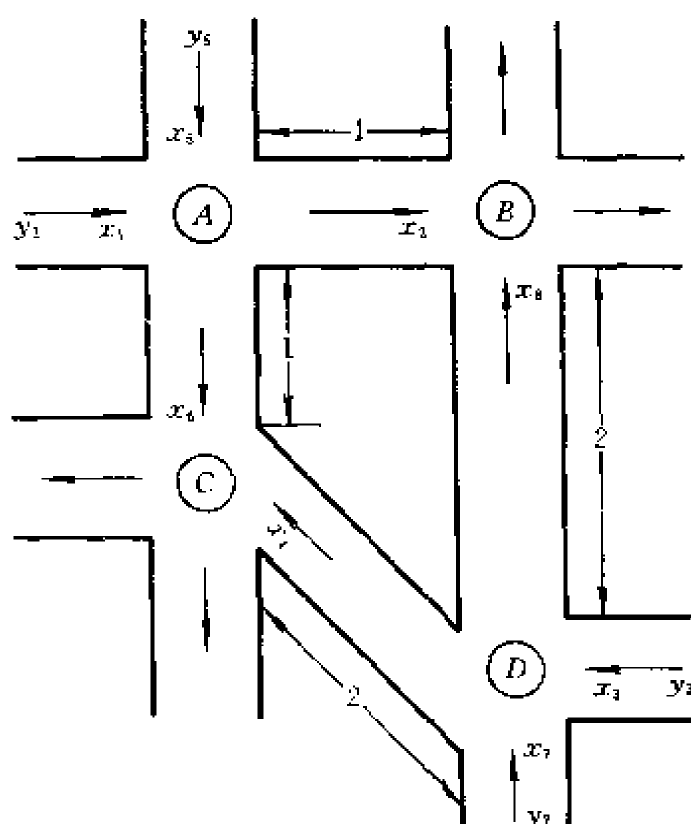


图 8－7　典型交通网络

城市交通网络通常由一些互相连接的路段和交叉路口组成．为简单和确定起见我们讨论一个典型网络，如图 8－7 所示，由两条横向公路，两条纵向公路和 4 个交叉路口 A 、B、C 、D 组成．公路都是单行线，方向如图所示，且不考虑转弯．由 A 到 B 、C 的距离为 1 个单位，D 到 B、C 的距离为 2 个单位．

建模目的是调节各路口的红绿灯时间使等待的车队最短．模型的控制变量应取各路口的绿灯持续时间，而作为研究对象的状态变量则是每次绿灯开始时刻等候在各路口的车队长度．红绿灯是周期变化的，以这个周期为单位将时间离散化，建立离散模型，从建模和计算的角度看都是比较方便的．

模型假设

1．4个交叉路口的红绿灯周期相同，绿灯开始时刻也相同，将每次绿灯开始时刻记作 $t=0,1,2,\cdots$．

2．记时刻 t 等候在 8 个单行线路口的车队长度为 $x_i(t)$，$i=1,2,\cdots,8$（见图 8－7），时刻 t 开始的绿灯持续时间内通过单向路口 i 的车队长度为 $z_i(t)$，时刻 t 开始的红绿灯周期内到达单向路口 i 的车队长度为 $y_i(t)$，满足

$$x_i(t+1)=x_i(t)-z_i(t)+y_i(t),$$
$$i=1,2,\cdots,8,\ t=0,1,2,\cdots \tag{1}$$

根据超饱和交通的假定，上述各量均是非负的．

3．在超饱和交通条件下，$z_i(t)$ 与绿灯持续时间成正比，记作

$$z_i(t)=\alpha_i u_i(t) \tag{2}$$

其中 $u_i(t)$ 是路口 i 绿灯持续时间在时刻 t 开始的红绿灯周期中占的比例（$0\leqslant u_i(t)\leqslant 1$），$\alpha_i$ 是在一个红绿灯周期时间内，在超饱和情况下通过路口 i 的车队长度，称饱和车流长度，是已知量．

4．不计黄灯时间，纵向路口的绿灯时间恰是相应的横向路口的红灯时间，由图 8－7 可知

$$\begin{cases} u_5(t)=1-u_1(t) \\ u_6(t)=1-u_4(t) \\ u_7(t)=1-u_3(t) \\ u_8(t)=1-u_2(t) \end{cases} \tag{3}$$

5. 车队在交叉路口之间行驶 1 个单位距离所需的时间恰为 1 个红绿灯周期，即 1 个单位时间，于是由图 8－7 可知

$$
\begin{cases}
y_2(t)=z_1(t-1) \\
y_4(t)=z_3(t-2) \\
y_6(t)=z_5(t-1) \\
y_8(t)=z_7(t-2)
\end{cases}
\tag{4}
$$

$y_1(t)$、$y_3(t)$，$y_5(t)$，$y_7(t)$要由本网络以外的系统提供，设这些外部变量是已知的.

模型建立 在上述假设下将(2)、(3)、(4)式代入(1)，则方程(1)应表示为

$$
\begin{cases}
x_1(t+1)=x_1(t)+y_1(t)-\alpha_1 u_1(t) \\
x_2(t+1)=x_2(t)+\alpha_1 u_1(t-1)-\alpha_2 u_2(t) \\
x_3(t+1)=x_3(t)+y_3(t)-\alpha_3 u_3(t) \\
x_4(t+1)=x_4(t)+\alpha_3 u_3(t-2)-\alpha_4 u_4(t) \\
x_5(t+1)=x_5(t)+y_5(t)-\alpha_5+\alpha_5 u_1(t) \\
x_6(t+1)=x_6(t)+\alpha_5-\alpha_6-\alpha_5 u_1(t-1)+\alpha_6 u_4(t) \\
x_7(t+1)=x_7(t)+y_7(t)-\alpha_7+\alpha_7 u_3(t) \\
x_8(t+1)=x_8(t)+\alpha_7-\alpha_8-\alpha_7 u_3(t-2)+\alpha_8 u_2(t)
\end{cases}
\tag{5}
$$

引入向量、矩阵记号

$$x(t)=[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_8(t)]^T$$

$$y(t)=[y_1(t),0,y_3(t),0,y_5(t),0,y_7(t),0]^T$$

$$b=[0,0,0,0,0,\alpha_5-\alpha_6,0,\alpha_7-\alpha_8]^T$$

$$u(t)=[u_1(t),\ u_2(t),u_3(t),u_4(t)]^T$$

$$B_0^T=\begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \alpha_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_8 \\ 0 & 0 & -\alpha_3 & 0 & 0 & 0 & \alpha_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_4 & 0 & \alpha_6 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 8}$$

$$B_1^T=\begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_5 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \end{bmatrix}_{4\times 8}^{(第一行)^{*)}}$$

$$B_2^T=\begin{bmatrix} & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_7 \\ & & & & & & & \end{bmatrix}_{4\times 8}(第三行)$$

方程组(5)可以写成

$$x(t+1)=x(t)+y(t)+b+B_0u(t)+B_1u(t-1)+B_2u(t-2) \quad (6)$$

当 $y(t)$、b、B_0、B_1、B_2 及初始状态向量 $x(0)$ 已知时，只要给出控制向量 $u(t)$，$t=-2,-1,0,1,2,\cdots$，就可以由方程(6)递推求解.

根据交通网络的实际情况，对于 $x(t)$ 和 $u(t)$ 通常有如下的约束条件

$$0\leqslant x(t)\leqslant x_{\max} \quad (7)$$

$$u_{\min}\leqslant u(t)\leqslant u_{\max} \quad (8)$$

---

*) 矩阵中未标出的各行元素均为零，下同.

其中 $x_{\max}=[x_{1m}, x_{2m}, \cdots, x_{8m}]^T$ 是各个单向路口对等待车队长度的限制，$u_{\min}=[u_1', u_2', u_3', u_4']^T$ 和 $u_{\max}=[u_1'', u_2'', u_3'', u_4'']^T$ 是绿灯持续时间比例的下限和上限.

为达到在考察的时间范围内使整个网络等待的车队长度最短的目的，在最优控制问题中常用二次型函数作为指标，譬如设指标函数为

$$J(x(t))=\sum_t x^T(t)Qx(t) \tag{9}$$

其中 Q 是对角形加权矩阵，对角元素是对各路口等待车队的加权因子.

综上所述，这个超饱和交通网络控制模型可以归结为，在参数 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,8)$、外部变量 $y(t)$、加权阵 Q 及初始状态 $x(0)$ 给定时，寻求控制函数 $u(t)$,使得在约束条件(7)、(8)下，由(6)式解出的 $x(t)$ 所确定的、由(9)式表示的 $J(x(t))$ 达到最小值．这是线性系统在二次性能指标下的最优控制问题．当 $x(t)$ 和 $u(t)$ 的维数较高时求解较为复杂．Pearson 等提出和改进的目标协调法是这类问题的一种有效解法．

8.6 差分方程简介

本节介绍的范围仅限于前面几节用到的内容，主要是差分方程稳定性的知识．

差分方程的平衡点及其稳定性的概念与微分方程的有关概念是一致的，例如一阶线性常系数差分方程

$$x_{k+1}+ax_k=b, \quad k=0,1,\cdots \tag{1}$$

的平衡点由 $x+ax=b$ 解得 $x^*=\dfrac{b}{1+a}$．当 $k\to\infty$ 时若 $x_k\to x^*$

则 x^* 是稳定的，否则是不稳定的[*]. 容易看出，可以用变量代换方法将方程(1)的平衡点稳定性问题转换为

$$x_{k+1}+ax_k=0 \tag{2}$$

的平衡点 $x^*=0$ 的稳定性问题. 而对于方程(2),因为其解显然可表为

$$x_k=(-a)^k x_0, k=1,2,\cdots \tag{3}$$

所以立即可知当且仅当

$$|a|<1 \tag{4}$$

时方程(2)的平衡点(从而方程(1)的平衡点)才是稳定的.

顺便指出，对于 n 维向量 $x(k)$ 和 $n\times n$ 常数矩阵 A 构成的方程组

$$x(k+1)+Ax(k)=0 \tag{5}$$

其平衡点稳定的条件是 A 的特征根 λ_i,$(i=1,2,\cdots n)$均有

$$|\lambda_i|<1 \tag{6}$$

即均在复平面上的单位圆内. 这个结果可由将 A 化为对角阵(或若当阵)得到.

对于二阶线性差分方程，我们考察

$$x_{k+2}+a_1x_{k+1}+a_2x_k=0 \tag{7}$$

的平衡点($x^*=0$)的稳定性. 为求(7)的通解,写出它的特征方程 $\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$,记这个一元二次代数方程的根为 λ_1, λ_2，不难验

*) 实质上这里是指渐近稳定和不渐近稳定.

证，(7)的通解可表为

$$x_k = c_1\lambda_1^k + c_2\lambda_2^k \tag{8}$$

其中常数 c_1, c_2 由初始条件 x_0, x_1 确定．由(8)立即得到，当且仅当

$$|\lambda_1| < 1,\ |\lambda_2| < 1 \tag{9}$$

时方程(7)的平衡点才是稳定的．

与一阶线性方程一样，非齐次方程

$$x_{k+2} + a_1 x_{k+1} + a_2 x_k = b \tag{10}$$

的平衡点的稳定性和方程(7)相同．

二阶方程的上述结果可以推广到 n 阶线性方程，即稳定平衡的条件是特征方程—— n 次代数方程的根 $\lambda_i (i=1,2,\cdots,n)$ 均有 $|\lambda_i|<1$. 考虑到高阶方程和方程组的相互转化，这个条件与(5)、(6)给出的结论是完全一致的．

最后讨论一阶非线性差分方程

$$x_{k+1} = f(x_k) \tag{11}$$

的平衡点的稳定性．其平衡点 x^* 由代数方程 $x=f(x)$ 解出．为分析 x^* 的稳定性，将方程(11)的右端在 x^* 点作台劳展开，只取一次项，(11)近似为

$$x_{k+1} = f'(x^*)(x_k - x^*) + f(x^*) \tag{12}$$

(12)是(11)的近似线性方程，x^* 也是(12)的平衡点．关于线性方程(12)的稳定平衡点的讨论已由(1)~(4)给出，而当 $|f'(x^*)| \neq 1$ 时方程(11)与(12)平衡点的稳定性相同．于是得到当

$$|f'(x^*)| < 1 \tag{13}$$

时，对于非线性方程(11)，x^* 是稳定的；当

$$|f'(x^*)|>1 \tag{14}$$

时，对于方程(11) x^* 是不稳定的.

习　题

1. 在市场经济的蛛网模型中(8.1节)介绍了政府干预不稳定经济的两种办法，你能举出几种进行干预的实际措施，并对此作出评价吗？

2. 与市场经济蛛网模型的推广一段相类似，讨论下列问题：

① 因为一个时段上市的商品不能立即售完，其数量也会影响到下一时段的价格，所以 y_{k+1} 由 x_{k+1} 和 x_k 决定. 再设 x_{k+1} 仍只取决于 y_k. 给出稳定平衡的条件，并与8.1节(9)式和(16)式进行比较.

② 若除了 y_{k+1} 由 x_{k+1} 和 x_k 决定之外，x_{k+1} 也由 y_k 和 y_{k-1} 确定. 如8.1节(11)式. 试分析稳定平衡的条件是否还会放宽.

3. 验证阻滞增长模型(8.2节)的(15)～(18)式.

4. 用计算机解阻滞增长模型(8.2节方程(6)). 令 b 从(譬如)1.5逐渐增加，考察序列 x_k 收敛、2倍周期收敛、4倍周期收敛……直至一片混乱的情况. 试以 b 为横坐标，收敛点为纵坐标作图.

5. 举出几个阻滞增长模型(微分形式或差分形式)的应用实例.

6. 在按年龄分组的种群增长模型中(8.3节)，设一群动物最高年龄为15岁，每5岁一组分成3个年龄组，各组的繁殖率为 $b_1=0$，$b_2=4$，$b_3=3$，存活率为 $s_1=\frac{1}{2}$，$s_2=\frac{1}{4}$，开始时3组各有1000只. 求15年后各组分别有多少只，以及时间充分长以后种群的增长率和按年龄组的分布.

7. 在按年龄分组的种群增长模型中，证明当时间充分长以后若总和繁殖率 $R>1$(8.3节(17)式)，则种群增长，若 $R<1$ 则种群减少.

*8. 在按年龄分组的种群增长模型基础上，建立种群的稳定收获模型.

① 设年龄组区间、时段长度都正好等于种群的繁殖周期，种群的按年龄组分布、Leslie矩阵及增长规律仍用8.3节(3)～(5)式表示. 如果将每时段中各年龄组种群的增加量作为这个时段的收获量，令 $h_i(k)$ 为收获系数，表示时段 k 结束后第 i 年龄组的收获量与总数之比，即

$$h_i(k)=\frac{x_i(k+1)-x_i(k)}{x_i(k+1)}, \quad i=1,2,\cdots,n$$

所谓稳定收获的含义是，各个时段同一年龄组的收获量不变，即 $x_i(k)$和 $h_i(k)$与 k 无关．用 H 表示以 h_i 为对角元素的对角阵，证明稳定收获模型可表为

$$Lx-x=HLx$$

其中 x 是种群按年龄组的稳定分布．

② 证明获得稳定收获的充要条件是：h_i 满足

$$(1-h_1)[b_1+b_2s_1(1-h_2)+\cdots+b_ns_1s_2\cdots s_{n-1}(1-h_2)\cdots(1-h_n)]=1$$

且 $x=cx^*$ (c 是大于零的常数)，其中

$$x^*=[1,s_1(1-h_2),\cdots s_1s_2\cdots s_{n-1}(1-h_2)\cdots(1-h_n)]^T$$

③ 利用第 6 题的数据给出 H 和 x 的一组解，并计算稳定收获量．

*9．讨论稳定收获模型(第 8 题)的两个特例．

① 有些种群最年幼的级别具有较大的经济价值，所以饲养者只收获这个年龄组的种群，于是 $h_1=h$，$h_2=\cdots=h_n=0$．讨论这种情况下的模型，稳定收获的充要条件，并在第 6 题数据下求解．

② 对于随机捕获的种群，区分年龄是困难的，不妨假定 $h_1=\cdots=h_n=h$．讨论同样的问题．

第 9 章　层次分析法建模

人们在日常生活中常常碰到许多决策问题：买一件衬衫，你要在棉的、丝的、涤纶的 … 及花的、白的、方格的 … 之中作出抉择；请朋友吃饭，要筹划是办家宴或去饭店，是吃中餐还是西餐或自助餐；假期旅游，是去风光绮丽的苏杭，还是去迷人的北戴河海滨，或者去山水甲天下的桂林．如果以为这些日常小事不必作为决策问题认真对待的话，那么当你面临报考学校、挑选专业，或者选择工作岗位的时候，就要慎重考虑、反复比较，尽可能地作出满意的决策了．

从事各种职业的人也经常面对决策：一个厂长要决定购买哪种设备，上马什么产品；科技人员要选择研究课题；医生要为疑难病症确定治疗方案；经理要从若干应试者中选拔秘书；各地区各部门的官员则要对人口、交通、经济、环境等领域的发展规划作出决策．

人们在处理上面这些决策问题的时候，要考虑的因素有多有少，有大有小，但是一个共同的特点是它们通常都涉及到经济、社会、人文等方面的因素．在作比较、判断、评价、决策时，这些因素的重要性、影响力或者优先程度往往难以量化，人的主观选择（当然要根据客观实际）会起着相当主要的作用，这就给用一般的数学方法解决问题带来本质上的困难．

T. L. Saaty 等人在七十年代提出了一种能有效地处理这样一类问题的实用方法，称**层次分析法**（Analytic Hierarchy Process，简记 AHP）．这是一种定性和定量相结合的、系统化、层次化的分析方法．过去研究自然和社会现象主要有机理分析和统计分析两种方法，前者用经典的数学工具分析现象的因果关系，后者以

随机数学为工具，通过大量观测数据寻求统计规律．近年来发展的系统分析是又一种方法，而层次分析法就是系统分析的数学工具之一．

下面先介绍层次分析法的基本步骤和应用实例，再讨论该方法在理论、计算及建模等方面的若干问题[28,38,39,47,49]．

9.1 层次分析法的基本步骤

层次分析法的基本思路与人对一个复杂的决策问题的思维、判断过程大体上是一样的．不妨用前面提到的假期旅游为例，假如有 P_1、P_2、P_3 3个旅游胜地供你选择，你会根据诸如景色、费用和居住、饮食、旅途条件等一些准则去反复比较那3个候选地点．首先，你会确定这些准则在你的心目中各占多大比重，如果你经济宽绰、醉心旅游，自然特别看重景色条件，而平素俭朴或手头拮据的人则会优先考虑费用，中老年旅游者还会对居住、饮食等条件寄以较大关注．其次，你会就每一个准则将3个地点进行对比，譬如 P_1 景色最好，P_2 次之；P_2 费用最低，P_3 次之；P_3 居住等条件较好等等．最后，你要将这两个层次的比较判断进行综合，在 P_1、P_2、P_3 中确定哪个作为最佳地点．

上面的思维过程可以加工整理成以下几个步骤：

1．将决策问题分解为3个层次，最上层为目标层，即选择旅游地，最下层为方案层，有 P_1、P_2、P_3 3个供选择地点，中间层为准则层，有景色、费用、居住、饮食、旅途5个准则，各层间的联系用相连的直线表示（图9－1）．

2．通过相互比较确定各准则对于目标的权重，及各方案对于每一准则的权重．这些权重在人的思维过程中通常是定性的，而在层次分析法中则要给出得到权重的定量方法．

3．将方案层对准则层的权重及准则层对目标层的权重进行综合，最终确定方案层对目标层的权重．在层次分析法中要给出

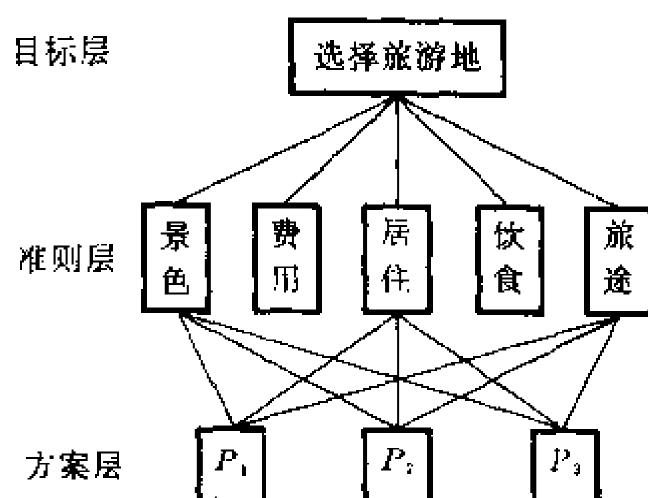


图 9-1 选择旅游地的层次结构

进行综合的计算方法.

层次分析法将定性分析与定量计算结合起来完成上述步骤,给出决策结果.下面我们来说明如何比较同一层各因素对上层因素的影响,从而确定它们在上层因素中占的权重.

成对比较矩阵和权向量 涉及到社会、经济、人文等因素的决策问题的主要困难在于,这些因素通常不易定量地量测.人们凭自己的经验和知识进行判断,当因素较多时给出的结果往往是不全面和不准确的,如果只是定性的结果,则常常不容易被别人接受.Saaty 等人的作法,一是不把所有因素放在一起比较,而是两两相互对比,二是对比时采用相对尺度,以尽可能地减少性质不同的诸因素相互比较的困难,提高准确度.

假设要比较某一层 n 个因素 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 对上层一个因素 O 的影响,如旅游决策问题中比较景色等 5 个准则在选择旅游地这个目标中的重要性.每次取两个因素 C_i 和 C_j,用 a_{ij} 表示 C_i 和 C_j 对 O 的影响之比,全部比较结果可用**成对比较矩阵**

$$A = (a_{ij})_{n\times n},\ a_{ij} > 0,\ a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}} \qquad (1)$$

表示．由于(1)式给出的 a_{ij} 的特点，A 称为**正互反矩阵**．显然必有 $a_{ii}=1$．如用 $C_1,\cdots,C_5$ 依次表示景色、费用、居住、饮食、旅途 5 个准则，设某人用成对比较法（做 $C_5^2=\frac{5\times4}{2}$ 次对比）得到的成对比较阵（正互反阵）为

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 4 & 3 & 3\\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5\\ 1/4 & 1/7 & 1 & 1/2 & 1/3\\ 1/3 & 1/5 & 2 & 1 & 1\\ 1/3 & 1/5 & 3 & 1 & 1\end{bmatrix} \tag{2}$$

(2)中 $a_{12}=1/2$ 表示景色 C_1 与费用 C_2 对选择旅游地这个目标 O 的重要性之比为1∶2；$a_{13}=4$ 表示景色 C_1 与居住条件 C_3 之比为 4∶1；$a_{23}=7$ 表示费用 C_2 与居住条件 C_3 之比为 7∶1．可以看出在此人选择旅游地时，费用因素最重，景色次之．怎样由成对比较阵确定诸因素 $C_1,\cdots,C_n$ 对上层因素 O 的权重呢？

仔细分析一下(2)式给出的成对比较阵 A 可以发现，既然 C_1 与 C_2 之比为 1∶2，C_1 与 C_3 之比为 4∶1，那么 C_2 与 C_3 之比应为 8∶1 而不是 7∶1 才能说明成对比较是一致的．但是，n 个因素要作 $\frac{n(n-1)}{2}$ 次成对比较，全部一致的要求是太苛刻了．Saaty 等人给出了在成对比较不一致的情况下计算各因素 $C_1,\cdots,C_n$ 对因素 O 的权重的方法，并且确定了这种不一致的容许范围．为了说明这点我们先看成对比较完全一致的情况．

设想把一块大石头 O 砸成 n 块小石头 $C_1,\cdots,C_n$，如果精确地称出它们的重量为 $w_1,\cdots,w_n$，在作成对比较时令 $a_{ij}=w_i/w_j$，

那么得到

$$A=\begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \cdots\cdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \tag{3}$$

这些比较显然是一致的．n 块小石头对大石头的权重(即在大石头中占的比重)可用向量 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^T$ 表示，如果大石头为单位重量．则有 $\sum_{i=1}^{n} w_i=1$．显然，A 的各个列向量与 w 仅相差一个比例因子．

一般地，如果一个正互反阵 A 满足

$$a_{ij}\cdot a_{jk}=a_{ik},\quad i,j,k=1,2,\cdots,n \tag{4}$$

则 A 称为一致性矩阵，简称**一致阵**．(3)式给出的 A 显然是一致阵．容易证明 n 阶一致阵 A 有下列性质(习题 1)．

1．A 的秩为 1，A 的唯一非零特征根为 n；

2．A 的任一列(行)向量都是对应于特征根 n 的特征向量．

如果得到的成对比较阵是一致阵，像(3)式的 A，自然应取对应于特征根 n 的、归一化的特征向量(即分量之和为 1)表示诸因素 $C_1,\cdots C_n$ 对上层因素 O 的权重，这个向量称为**权向量**．如果成对比较阵 A 不是一致阵，但在不一致的容许范围内(下面将说明如何确定这个范围)，Saaty 等人建议用对应于 A 最大特征根(记作 λ)的特征向量(归一化后)作为权向量 w，即 w 满足

$$Aw=\lambda w \tag{5}$$

直观地看，因为矩阵 A 的特征根和特征向量连续地依赖于矩阵的元素 a_{ij}，所以当 a_{ij} 离一致性的要求不远时，A 的特征根和特征向量也与一致阵的相差不大.(5)式表示的方法称为由成对比较阵求权向量的**特征根法**. 求 λ 和 w 的简便算法和特征根法更深入的意义，以及其它求权向量的方法见 9.3 节.

比较尺度 当比较两个可能具有不同性质的因素 C_i 和 C_j 对于一个上层因素 O 的影响时，采用什么样的相对尺度 a_{ij} 较好呢？Saaty 等人提出用 1－9 尺度，即 a_{ij} 的取值范围是 1，2，…，9 及其互反数 1，$\frac{1}{2}$，…，$\frac{1}{9}$.理由如下.

1. 在进行定性的成对比较时，人们头脑中通常有 5 种明显的等级，用 1－9 尺度可以方便地表示如下.

表 9－1　1－9 尺度 a_{ij} 的含义

尺度 a_{ij}	含　　义
1	C_i 与 C_j 的影响相同
3	C_i 比 C_j 的影响稍强
5	C_i 比 C_j 的影响强
7	C_i 比 C_j 的影响明显地强
9	C_i 比 C_j 的影响绝对地强
2,4,6,8	C_i 与 C_j 的影响之比在上述两个相邻等级之间
$1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{9}$	C_j 与 C_i 的影响之比为上面 a_{ij} 的互反数

2. 心理学家认为，进行成对比较的因素太多，将超出人的判断能力，最多大致在 7±2 范围. 如以 9 个为限，用 1－9 尺度表

示它们之间的差别正合适.

3.Saaty曾用1－3，1－5，…，1－17，…，$(d+0.1)-(d+0.9)$ $(d=1,2,3,4)$，1^p-9^p $(p=2,3,4,5)$等共27种比较尺度，对在不同距离处判断某光源的亮度等实例构造成对比较阵，并算出权向量.把这些权向量与按照光强定律等物理知识得到的实际的权向量进行对比发现，1－9尺度不仅在较简单的尺度中最好，而且结果并不劣于较复杂的尺度.

目前在层次分析法的应用中，大多数人都用1－9尺度.在(2)式给出的成对比较阵A中就是用的这个尺度.

一致性检验　成对比较阵通常不是一致阵，但是为了能用它的对应于特征根λ的特征向量作为被比较因素的权向量，其不一致程度应在容许范围内.怎样确定这个范围呢？

前面已经给出n阶一致阵的特征根是n，在9.3节将证明的一个重要定理表明，n阶正互反阵A的最大特征根$\lambda \geq n$，而当$\lambda=n$时A是一致阵.

根据上述定理和λ连续地依赖于a_{ij}的事实可知，λ比n大得越多，A的不一致程度越严重，用特征向量作为权向量引起的判断误差越大.因而可以用$\lambda-n$数值的大小来衡量A的不一致程度.Saaty将

$$CI=\frac{\lambda-n}{n-1} \tag{6}$$

定义为**一致性指标**.$CI=0$时A为一致阵；CI越大A的不一致程度越严重.注意到A的n个特征根之和等于A的对角元素之和(为什么？)，而A的对角元素均为1，所以特征根之和$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=n$.(不妨记$\lambda_1=\lambda$).由此可知，一致性指标$CI$相当于除$\lambda$外其余$n-1$个特征根的平均值(取绝对值).

为了确定A的不一致程度的容许范围，需要找出衡量A的

一致性指标 CI 的标准．Saaty 又引入所谓**随机一致性指标** RI，计算 RI 的过程是：对于固定的 n，随机地构造正互反阵 A'（它的元素 $a_{ij}'(i<j)$ 从 1 ~ 9，1 ~ 1/9 中随机取值，a_{ji}' 为 a_{ij}' 的互反数，$a_{ii}'=1$），然后计算 A' 的一致性指标 CI．可以想到，A' 是非常不一致的，它的 CI 相当大．如此构造相当多的 A'，用它们的 CI 的平均值作为随机一致性指标．Saaty 对于不同的 $n(=1\sim 11)$，用 100 ~ 500 个样本 A' 算出的随机一致性指标 RI 的数值如下[*]：

表 9－2　随机一致性指标 RI 的数值

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

表中 $n=1,2$ 时 $RI=0$，是因为 1，2 阶的正互反阵总是一致阵．

对于 $n\geqslant 3$ 的成对比较阵 A，将它的一致性指标 CI 与同阶（指 n 相同）的随机一致性指标 RI 之比称为**一致性比率** CR，当

$$CR=\frac{CI}{RI}<0.1 \tag{7}$$

时认为 A 的不一致程度在容许范围之内，可用其特征向量作为权向量．否则要重新进行成对比较，对 A 加以调整．顺便指出，(7)式中 0.1 的选取是带有一定主观信度的．

对于 A 利用(6)、(7)式和表 9－2 进行检验称为**一致性检验**．

对于(2)式给出的 A 可以算出[**] $\lambda=5.073$，归一化的特征向

---

*）由于随机性，不同的人用不同的样本得到的 RI 的数值会与表 9－2 稍有出入．

**）计算用的是简便算法——和法（见9.3 节）．

量 $w=(0.263,0.475,0.055,0.099,0.110)^T$. 由(6)式 $CI=\frac{5.073-5}{5-1}=0.018$，在表 9－2 中查出 $RI=1.12$. 按(7)式计算，$CR=\frac{0.018}{1.12}=0.016<0.1$，于是通过了一致性检验，故上述 w 可作为权向量.

组合权向量 在旅游决策问题中我们已经得到了第 2 层(准则层)对第 1 层(目标层，只有一个因素)的权向量，记作 $w^{(2)}=(w_1^{(2)},\cdots,w_5^{(2)})^T$ (即由(2)式的 A 算出的 w). 用同样的方法构造第 3 层(方案层，见图 9－1)对第 2 层的每一个准则的成对比较阵，不妨设它们为

$$B_1=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 1/2 & 1 & 2\\ 1/5 & 1/2 & 1\end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}1 & 1/3 & 1/8\\ 3 & 1 & 1/3\\ 8 & 3 & 1\end{bmatrix},$$

$$B_3=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 3\\ 1/3 & 1/3 & 1\end{bmatrix},\quad B_4=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 1/3 & 1 & 1\\ 1/4 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

$$B_5=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1/4\\ 1 & 1 & 1/4\\ 4 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

这里矩阵 $B_k(k=1,\cdots,5)$ 中的元素 $b_{ij}^{(k)}$ 是方案(旅游地) P_i 与 P_j 对于准则 C_k (景色、费用等)的优越性的比较尺度.

由第 3 层的成对比较阵 B_k 计算出权向量 $w_k^{(3)}$，最大特征根 λ_k 和一致性指标 CI_k，结果列入下表．

表 9－3　旅游决策问题第3层的计算结果

k	1	2	3	4	5
$w_k^{(3)}$	0.595 0.277 0.129	0.082 0.236 0.682	0.429 0.429 0.142	0.633 0.193 0.175	0.166 0.166 0.668
λ_k	3.005	3.002	3	3.009	3
CI_k	0.003	0.001	0	0.005	0

不难看出，由于 $n=3$ 时随机一致性指标 $RI=0.58$（表 9－2），所以上面的 CI_k 均可通过一致性检验．

下面的问题是由各准则对目标的权向量 $w^{(2)}$ 和各方案对每一准则的权向量 $w_k^{(3)}$ $(k=1,\cdots,5)$，计算各方案对目标的权向量，称为**组合权向量**，记作 $w^{(3)}$．对于方案 P，它在景色等 5 个准则中的权重用 $w_k^{(3)}$ 的第1 个分量表示(表 9－3 中 $w_k^{(3)}$ 的第 1 行)，而 5 个准则对于目标的权重又用权向量 $w^{(2)}$ 表示，所以方案 P_1 在目标中的组合权重应为它们相应项的两两乘积之和，即

$$0.595\cdot 0.263+0.082\cdot 0.475+0.429\cdot 0.055$$
$$+0.633\cdot 0.099+0.166\cdot 0.110=0.300$$

同样可以算出 P_2，P_3 在目标中的组合权重为 0.246 和 0.456，于是组合权向量 $w^{(3)}=(0.300,0.246,0.456)^T$．结果表明方案 P_3 在旅游地选择中占的权重近于 1/2，远大于 P_1、P_2，应作为第 1 选择地点．

由上述计算可知，对于3个层次的决策问题，若第1层只有1个因素，第2、3层分别有 n、m 个因素，记第2、3层对第1、2层的权向量分别为

$$w^{(2)}=(w_1^{(2)},\cdots,w_n^{(2)})^T$$

$$w_k^{(3)}=(w_{k1}^{(3)},\cdots,w_{km}^{(3)})^T,k=1,2,\cdots,n$$

以 $w_k^{(3)}$为列向量构成矩阵

$$W^{(3)}=[w_1^{(3)},\cdots,w_n^{(3)}]$$

则第3层对第1层的组合权向量为

$$w^{(3)}=W^{(3)}w^{(2)} \tag{8}$$

更一般地，若共有 s 层，则第 k 层对第1层（设只有1个因素）的组合权向量为

$$w^{(k)}=W^{(k)}w^{(k-1)},\ k=3,4,\cdots,s \tag{9}$$

其中$W^{(k)}$是以第 k 层对第 $k-1$ 层的权向量为列向量组成的矩阵．于是最下层（第 s 层）对最上层的组合权向量为

$$w^{(s)}=W^{(s)}W^{(s-1)}\cdots W^{(3)}w^{(2)} \tag{10}$$

组合一致性检验　在层次分析的整个计算过程中，除了对每个成对比较阵进行一致性检验，以判断每个权向量是否可以应用外，还要进行所谓组合一致性检验，以确定组合权向量是否可以作为最终的决策依据．

组合一致性检验可逐层进行．若第p层的一致性指标为$CI_1^{(p)}$，$\cdots$，$CI_n^{(p)}$（n 是第$p-1$层因素的数目），随机一致性指标为 $RI_1^{(p)}$，$\cdots$，$RI_n^{(p)}$，定义

$$CI^{(p)}=[CI_1^{(p)},\cdots,CI_n^{(p)}]w^{(p-1)} \tag{11}$$

$$RI^{(p)}=[RI_1^{(p)},\cdots,RI_n^{(p)}]w^{(p-1)} \tag{12}$$

则第 p 层对第 1 层的**组合一致性比率**为

$$CR^{(p)}=CR^{(p-1)}+\frac{CI^{(p)}}{RI^{(p)}},\ p=3,4,\cdots,s \tag{13}$$

其中 $CR^{(2)}$ 为由(7)式计算的一致性比率．最后，当最下层对最上层的组合一致性比率

$$CR^{(s)}<0.1^{*)} \tag{14}$$

时认为整个层次的比较判断通过一致性检验．

在旅游决策问题中可以算出 $CI^{(3)}=0.00176$，$RI^{(3)}=0.58$，前面已经有 $CR^{(2)}=0.016$，于是由(13)得到

$$CR^{(3)}=0.016+\frac{0.00176}{0.58}=0.019<0.1$$

通过了组合一致性检验，前面得到的组合权向量 $w^{(3)}$ 可以作为最终决策的依据．

在本节的最后，将**层次分析法的基本步骤**归纳如下．

1．**建立层次结构模型**　在深入分析实际问题的基础上，将有关的各个因素按照不同属性自上而下地分解成若干层次．同一层的诸因素从属于上一层的因素或对上层因素有影响，同时又支配下一层的因素或受到下层因素的作用．最上层为**目标层**，通常只有 1 个因素，最下层通常为**方案或对象层**，中间可以有 1 个或几个层次，通常为**准则或指标层**．当准则过多时(譬如多于 9 个)应进一步分解出子准则层．

---

*) 当层数较多时可将临界值0.1放宽．

2. 构造成对比较阵 从层次结构模型的第2层开始，对于从属于(或影响及)上一层每个因素的同一层诸因素，用成对比较法和1－9比较尺度构造成对比较阵，直到最下层.

3. 计算权向量并做一致性检验 对于每一个成对比较阵计算最大特征根及对应特征向量(计算方法见9.3节)，利用一致性指标，随机一致性指标和一致性比率做一致性检验. 若检验通过，特征向量(归一化后)即为权向量；若不通过，需重新构造成对比较阵.

4. 计算组合权向量并做组合一致性检验 利用(10)式计算最下层对目标的组合权向量，并根据(11)～(14)式做组合一致性检验. 若检验通过，则可按照组合权向量表示的结果进行决策，否则需重新考虑模型或重新构造那些一致性比率 CR 较大的成对比较阵.

9.2 层次分析法的广泛应用

层次分析法在七十年代中期由 T. L. Saaty 正式提出来之后，由于它在处理复杂的决策问题上的实用性和有效性，很快就在世界范围内得到普遍的重视和广泛的应用. 十几年来它的应用已遍及经济计划和管理、能源政策和分配、行为科学、军事指挥、运输、农业、教育、人才、医疗、环境等等领域. 从处理问题的类型看，主要是决策、评价，分析，预测等. 这个方法在八十年代初引入我国，也很快为广大的应用数学工作者和有关领域的技术人员所接受，得到了成功的应用.

从上节介绍的层次分析法的基本步骤看，建立层次结构模型是关键的一步，下面给出应用实例时即以这一步为主. 构造成对比较阵是整个工作的数量依据，当然是重要的，应当由经验和知识丰富、判断力强的专家给出，还不妨采用群体判断的方式. 至于第3、4步的计算工作，数学工作者是容易完成的.

例 1　城市能源供应系统改造方案的比较

某市能源供应方面存在着设施落后、供应分散、利用率低、污染严重等问题．经有关部门分析，可供选择的改造方案有：

P_1：制作高效煤制品，取代目前居民用的普通蜂窝煤；

P_2：将分散供热方式改造为区域供热；

P_3：建造热电联供设施，利用电厂余热；

P_4：实现城市煤气化；

P_5：郊县推广沼气池，作为农村主要生活能源．

这些措施在节约能源、降低污染等方面的效益，及在投资、原有设施闲置等方面的代价各不相同．为了综合考虑各种因素，确定这些方案的优劣顺序，应该以效益和代价为两个目标，建立两个层次结构模型，得到两个用组合权向量表示的这些方案的排序结果，然后再作效益和代价的综合判断．

以效益 U 为目标的层次结构中考虑 3 个准则：

C_1：节约能源；

C_2：降低污染以改善环境质量；

C_3：社会效益，指由于改变能源利用方式引起的方便生活、节约时间、降低劳动强度等．

以代价 V 为目标的层次结构中考虑的准则为：

D_1：投资，用建造生产单位能源设施所需资金来衡量；

D_2：设施闲置，指原有设施报废、拆除和改建的资金；

D_3：社会因素，指新设施的选址、征地、能源分配及新技术推广的宣传教育等．

以上述目标、准则和方案构成的层次结构如图 9－2 所示．某市根据具体情况给出了所需要的成对比较阵（略），由此算出的权向量、特征根 λ、一致性指标 CI、一致性比率 CR 及组合权向量、组合一致性比率见表 9－4、表 9－5．

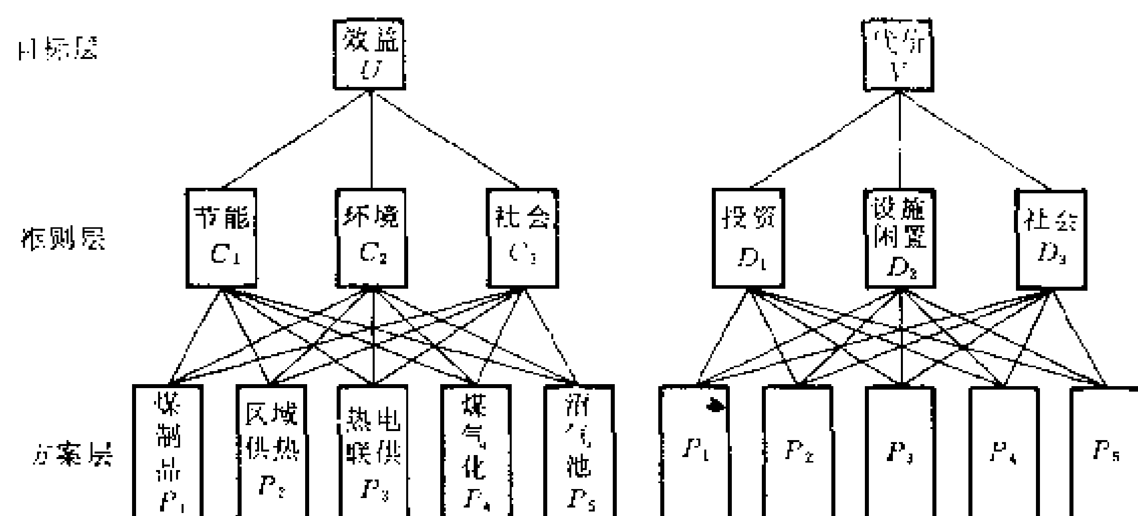


图 9－2　能源供应系统改造的层次结构

表 9－4　以效益 U 为目标的计算结果

权向量（C 对 U）	0.6370	0.2583	0.1047	$\lambda=3.0385$ $CI=0.0193$，$CR=0.0332$
准则 C ＼ 方案 P	C_1	C_2	C_3	组合权向量（P 对 U）
权向量（P 对 C） P_1	0.0979	0.0945	0.1368	0.1011
P_2	0.3211	0.1960	0.0837	0.2639
P_3	0.4827	0.0550	0.0371	0.3256
P_4	0.0680	0.6183	0.5091	0.2563
P_5	0.0303	0.0361	0.2332	0.0530
λ	5.3010	5.3105	5.0920	
CI	0.0753	0.0776	0.0230	
CR	0.0672	0.0693	0.0205	0.0961

表 9－5　以代价 V 为目标的计算结果 *)

权向量（D 对 V）		0.7352	0.2067	0.0581	λ=3.1171, CI=0.0585, CR=0.1009
准则 D / 方案 P		D_1	D_2	D_3	组合权向量（P 对 V）
权向量（P 对 D）	P_1	0.0516	0.0501	0.1237	0.0555
	P_2	0.2564	0.5529	0.3945	0.3257
	P_3	0.1676	0.2659	0.2343	0.1918
	P_4	0.4945	0.0811	0.1237	0.3875
	P_5	0.0299	0.0501	0.1237	0.0395
λ		5.2908	5.0996	5.0100	
CI		0.0727	0.0249	0.0025	
CR		0.0649	0.0222	0.0022	0.1533

从表 9－4 的组合权向量可知，热电联供效益最高，区域供热和煤气化处于第 2、3 位；而由表 9－5 知煤气化和区域供热代价太高，煤制品和沼气池代价较低．如果简化地将综合指标规定为与效益成正比、与代价成反比，那么把两个组合权向量的对应分量相除，再归一化可得综合指标为（0.2877，0.1279、0.2681，0.1044，0.2119）．可见煤制品和热电联供的综合效果最好，说明煤制品虽效益不太高，但代价很低，容易用较少的资金迅速生效，可优先实施．若资金雄厚，再上马热电联供等方案[49]．

例 2　科技成果的综合评价

*）表中 D 对 V 的 CR 超过 0.1，致使组合一致性比率也过大．这是由于 D 对 V 的成对比较阵构造得不好．

科技成果涉及的领域很广，种类很多，这里指的是直接应用于国民经济的某个生产部门后，可迅速转化为生产力，带来可定量计算的经济效益的那一类成果．评价准则先分为效益 C_1、水平 C_2、规模 C_3 共 3 类，再在每类中确定若干具体指标，如此构造的层次结构由图 9－3 给出．

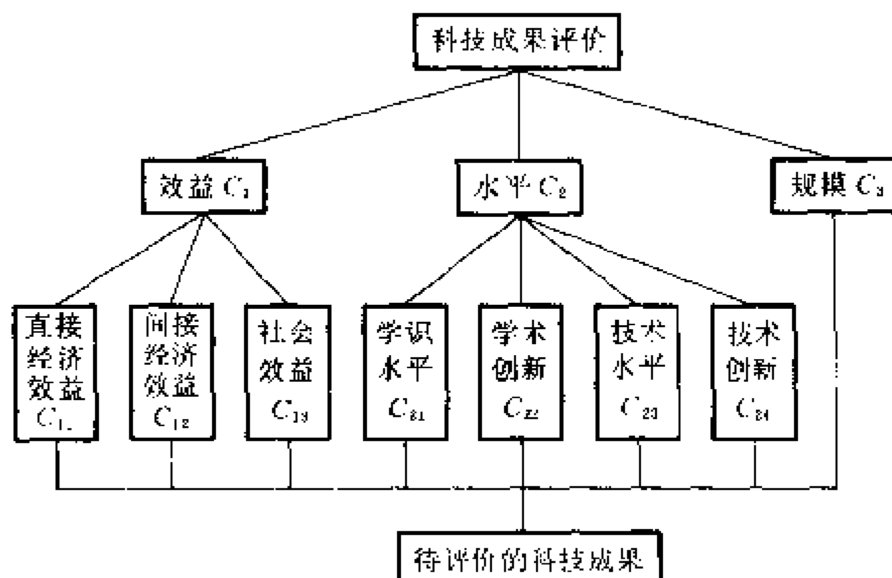


图 9－3　科技成果评价的层次结构

当对科技成果进行**相对评价**时，可直接利用层次分析法确定出它们对于综合评价的优劣顺序．当对科技成果进行**绝对评价**时，应先用层次分析法得到 C_{11}，C_{12}，… 各项具体指标在综合评价中的相对权重，再给出这些指标的等级标准，如对于 C_{11}，年经济效益在 100 万元以上为 1 等（9 分）；10 万元以上为 2 等（7 分）；…1 千元以下为 5 等（1 分）．对于 C_{23}，达到国际水平为 1 等（9 分）；部分达到或全面接近国际水平为 2 等（7 分）；国内先进水平为 3 等（5 分）；国内水平为 4 等（3 分）；一般水平为 5 等（1 分）．当某项成果在各指标中的等级被主管部门认定后，将各个分值乘以各指标在综合评价中的权重并求和，即为这项成果的综合绝对

评价的分值.

例 3 资源开发的综合判断

某发展中国家有 7 种可供开发的矿产资源 M：铁 Ir，铜 Co，磷酸盐 Ph，铀 Ur，铝 Al，金 Go，金刚石 Di. 它们开发后对国家经济发展的贡献可以通过两两比较得到. 另一方面，制订开发计划要考虑 6 个因素 Q：潜在经济价值 Q_1，开采费用 Q_2，风险 Q_3，需求 Q_4，战略重要性 Q_5，交通条件 Q_6. 综合判断要求既要给出各种资源在国家经济发展中的优先程度，又要确定每种资源开发中各个因素的相对重要性. 为此构造的层次结构如图 9－4.

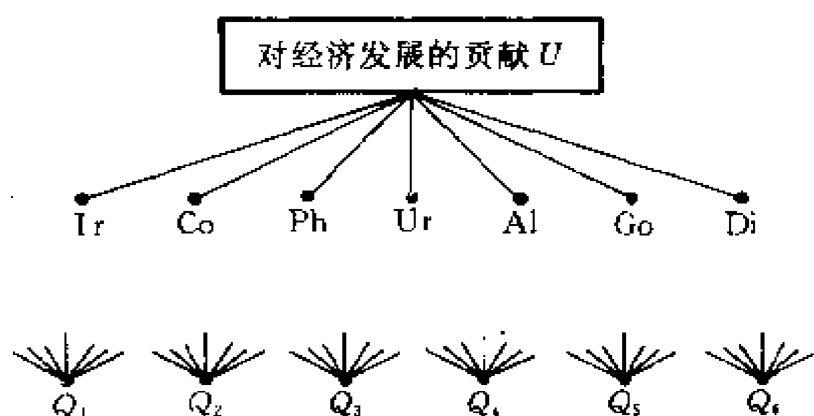


图 9－4 资源开发综合判断的层次结构

用层次分析法得到的资源 M 对目标 U 的权向量和因素 Q 对每种资源的权向量，及 Q 对 U 的组合权向量列入表 9－6. 为在同一尺度下比较各因素对所有资源的相对重要性，将 Q 对各种资源的权向量乘以相应的资源对目标的权重，结果列入表 9－7.

从上述结果可作如下分析：铁和铜对经济发展的贡献约占 66%，磷酸盐的贡献也占一定比例，而其它 4 种资源总和不过 20%；前 4 种资源的潜在经济价值高于其它因素，而后 3 种资源的风险大于经济价值，且目前的需求不大，故近期可暂不考虑这 3 种资源的开发；组合权向量表明效益方面的因素（Q_1、Q_5、Q_6）与代价方面的因素（Q_2、Q_3）之比为 $0.67:0.17 \approx 4:1$，故国家应根

表 9－6　资源开发判断的各个权向量

权向量(M 对 U)	0.40	0.26	0.15	0.09	0.04	0.04	0.02	组合权向量
Q \ M	Ir	Co	Ph	Ur	Al	Go	Di	(Q对 U)
权向量(Q对M) Q_1	0.44	0.41	0.44	0.34	0.33	0.18	0.13	0.40
Q_2	0.05	0.15	0.08	0.03	0.11	0.21	0.15	0.09
Q_3	0.05	0.03	0.07	0.05	0.34	0.26	0.50	0.08
Q_4	0.13	0.20	0.23	0.15	0.07	0.07	0.04	0.16
Q_5	0.26	0.16	0.11	0.29	0.04	0.03	0.04	0.19
Q_6	0.07	0.05	0.07	0.14	0.11	0.25	0.14	0.08

表 9－7　各因素对所有资源的相对重要性

Q \ M	Ir	Co	Ph	Ur	Al	Go	Di
Q_1	0.18	0.11	0.07	0.03	0.01	0.007	0.002
Q_2	0.02	0.04	0.01	0.003	0.004	0.008	0.003
Q_3	0.02	0.008	0.01	0.004	0.014	0.01	0.01
Q_4	0.05	0.05	0.034	0.014	0.003	0.003	0.001
Q_5	0.10	0.04	0.017	0.03	0.002	0.001	0.003
Q_6	0.03	0.013	0.01	0.013	0.004	0.01	0.003

据对资源的需求、价格等方面的变化尽量考虑有效地开发资源；综合起来看(表 9－7)经济价值的排序依次是铁、铜、磷酸盐、

从开采费用看铜最高，铁和磷酸盐次之．而风险却是铁最高，铜较低，这3种资源需求差不多，铁的战略重要性远高于其它，交通条件也以铁最好．上述分析对于这些资源的开发策略都是有用的[39]．

例4　工作选择

一个刚获得学位的大学毕业生面临选择工作岗位，他将要考虑的准则有：能够发挥自己的才干为国家作**贡献**；丰厚的**收入**；适合个人的**兴趣**及**发展**；良好的**声誉**；人际**关系**；地理**位置**等，于是他可以构造如图9－5的层次结构，用层次分析法确定可供选择的工作的优先顺序．

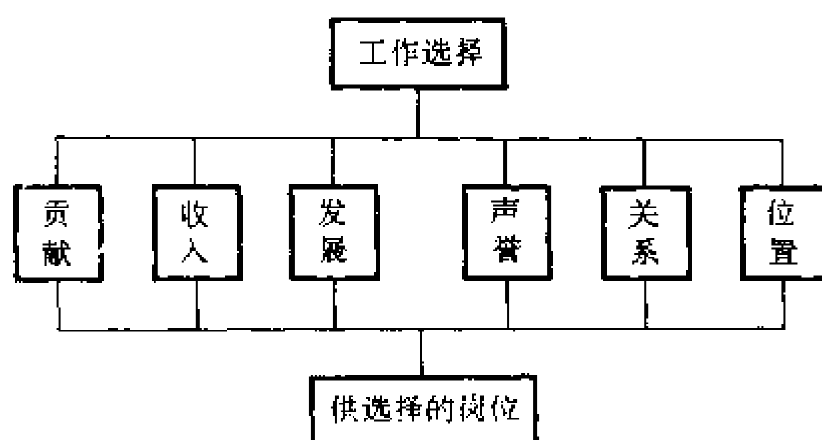


图9－5　工作选择的层次结构

你认为这些准则合适吗？试给出准则层对目标的成对比较阵．

例5　国家实力分析

一些高层研究人员要对美、俄、中、英、法、日、德等大国的国家综合实力进行分析判断，层次分析法为其提供了一种手段．这里的关键是确定合适的准则及进行实事求是的对比．一个供参考的层次结构如图9－6所示．

通过以上列举的几个实例可以大体上看出层次分析法的应用

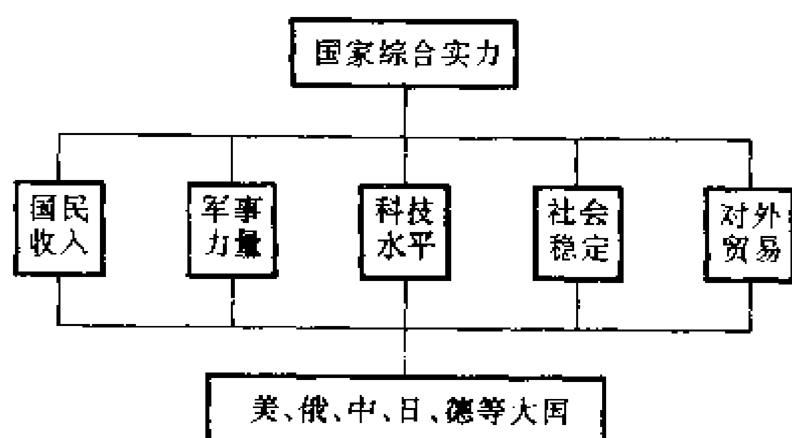


图 9-6 国家综合实力分析的层次结构

模式和涉及范围．顺便指出，在这个方法提出和完善的七十年代，Saaty 等人曾用它解决过一些国际或国家级的重大课题，如 1985 年世界石油价格的预测，苏丹运输系统的研究，美国未来高等教育(1985－2000)的规划等．

9.3 层次分析法的若干问题

层次分析法问世十几年来不仅得到广泛的应用，而且在理论体系、计算方法以及建立更复杂的层次结构等方面都有很快的发展．本节将着重从应用的角度讨论几个问题，对它的公理化体系等方面有兴趣的读者可参看[39，47]．

1．正互反阵最大特征根和对应特征向量的性质

成对比较阵是正互反阵．层次分析中用对应它的最大特征根的特征向量作为权向量，用最大特征根定义一致性指标(9.1 节(6)式)进行一致性检验．这里人们首先碰到的问题是：正互反阵是否存在**正的**最大特征根和**正的**特征向量；一致性指标的大小是否反映它接近一致阵的程度，特别，当一致性指标为零时，它是否就变为一致阵．下面两个定理可以回答这些问题．

定理 1 对于正矩阵 A（A 的所有元素为正数），

1) A 的最大特征根是正单根 λ；

2) λ 对应正特征向量 w(w 的所有分量为正数)；

3) $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{A^k e}{e^T A^k e} = w$

其中 $e=(1,1,\cdots,1)^T$，w 是对应 λ 的归一化特征向量.

定理的1)、2)是著名的 Perron(1907)定理的一部分，3)可通过将 A 化为标准形证明(略).

定理 2 n 阶正互反阵 A 的最大特征根 $\lambda\geq n$；当 $\lambda=n$ 时 A 是一致阵.

[证明] 设 A 的对应于 λ 的特征向量为 $w=(w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$，由定理1，$\lambda>0$，$w>0$. 不妨将 A 的元素 a_{ij} 记作

$$a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}\varepsilon_{ij}, \quad i,j=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

由 A 的正互反性，

$$\varepsilon_{ij}>0, \quad \varepsilon_{ji}=1/\varepsilon_{ij} \tag{2}$$

根据特征根和特征向量的定义，

$$\lambda w_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j, \quad i=1,2,\cdots,n \tag{3}$$

将(1)代入(3)并对 i 求和得

$$\lambda=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij} \tag{4}$$

利用(2)式并注意到 $\varepsilon_{ii}=1$，(4)式可化为

$$\lambda=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left(\varepsilon_{ij}+\frac{1}{\varepsilon_{ij}}\right)+1 \tag{5}$$

因为恒有

$$\varepsilon_{ij} + \frac{1}{\varepsilon_{ij}} \geqslant 2 \tag{6}$$

而(5)式中 Σ 和号内共 $\frac{n(n-1)}{2}$ 项，所以(5)、(6)给出

$$\lambda \geqslant n \tag{7}$$

此即定理的第 1 部分．当 $\lambda = n$ 时由(5)、(6)式可知必有

$$\varepsilon_{ij} + \frac{1}{\varepsilon_{ij}} = 2 \tag{8}$$

于是 $\varepsilon_{ij} = 1$，由(1)知

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$$

满足一致阵条件(9.1 节(4)式)，A 是一致阵．　　　　[证毕]

定理 2 和 9.1 节所述的一致阵的性质表明，n **阶正互反阵** A **是一致阵的充要条件为，**A **的最大特征根** $\lambda = n$.

上述结论为特征根法用于层次分析提供了一定的理论依据．

2．**正互反阵最大特征根和特征向量的实用算法**

众所周知，用定义计算矩阵的特征根和特征向量是相当困难的，特别是矩阵阶数较高的时候．另一方面，因为成对比较阵基本上是定性比较的量化结果，对它作精确计算是不必要的，所以完全可以用简便的近似方法计算其特征根和特征向量，下面介绍几种．

(1)**幂法**　步骤如下：

a．任取 n 维归一化初始向量 $w^{(0)}$

b．计算 $\tilde{w}^{(k+1)} = Aw^{(k)}, k = 0, 1, 2, \cdots$

c．$\tilde{w}^{(k+1)}$归一化，即令 $w^{(k+1)} = \tilde{w}^{(k+1)} / \sum_{i=1}^{n} \tilde{w}_i^{(k+1)}$

d. 对于预先给定的精度 ε，当 $|w_i^{(k+1)} - w_i^{(k)}| < \varepsilon (i=1,2,\cdots,n)$时，$w^{(k+1)}$即为所求的特征向量；否则返回 b

e. 计算最大特征根 $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\widetilde{w}_i^{(k+1)}}{w_i^{(k)}}$.

这是求最大特征根对应特征向量的迭代方法，其收敛性由定理 1 的 3)保证．$w^{(0)}$可任选或取为下面方法得到的结果．

(2) **和法** 步骤如下：

a. 将 A 的每一列向量归一化得 $\widetilde{w}_{ij} = a_{ij} / \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$

b. 对 $\widetilde{w}_{ij}$ 按行求和得 $\widetilde{w}_i = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{w}_{ij}$

c. 将 $\widetilde{w}_i$ 归一化 $w_i = \widetilde{w}_i / \sum_{i=1}^{n} \widetilde{w}_i$ *)，$w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$ 即为近似特征向量

d. 计算 $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{(Aw)_i}{w_i}$，作为最大特征根的近似值．

这个方法实际上是将 A 的列向量归一化后取平均值，作为 A 的特征向量．因为当 A 为一致阵时它的每一列向量都是特征向量，所以若 A 的不一致性不严重，则取 A 的列向量（归一化后）的平均值作为近似特征向量是合理的．

(3) **根法** 步骤与和法基本相同，只是将步骤 b 改为 b'．对 $\widetilde{w}_{ij}$ 按行求积并开 n 次方 $\widetilde{w}_i = \left(\prod_{j=1}^{n} \widetilde{w}_{ij} \right)^{1/n}$.

根法是将和法中求列向量的算术平均值改为求几何平均值．

---

*）在和法中 $\sum_{i=1}^{n} \widetilde{w}_i = n$，于是 $w_i = \widetilde{w}_i / n$．但对根法则不具有这种方便性．

以上3个方法中以和法最为简便. 试用它计算一个例子:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ 1/2 & 1 & 4\\ 1/6 & 1/4 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{归一化}]{\text{列向量}}\begin{bmatrix}0.6 & 0.615 & 0.545\\ 0.3 & 0.308 & 0.364\\ 0.1 & 0.077 & 0.091\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{求和}]{\text{按行}}\begin{bmatrix}1.760\\ 0.972\\ 0.268\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{归一化}}\begin{bmatrix}0.587\\ 0.324\\ 0.089\end{bmatrix}=w,\quad Aw=\begin{bmatrix}1.769\\ 0.974\\ 0.268\end{bmatrix}$$

$$\lambda=\frac{1}{3}\left(\frac{1.769}{0.587}+\frac{0.974}{0.324}+\frac{0.268}{0.089}\right)=3.009$$

精确计算给出 $w=(0.588, 0.322, 0.090)^T$, $\lambda=3.010$. 二者相比, 相差甚微.

3. 为什么用成对比较阵的特征向量作为权向量

我们知道, 当成对比较阵 A 是一致阵时, a_{ij} 与权向量 $w=(w_1,\cdots,w_n)^T$ 的关系满足 $a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}$, 那么当 A 不是一致阵时, 权向量 w 的选择应使得 a_{ij} 与 $\frac{w_i}{w_j}$ 相差(对所有的 i,j)尽量地小. 这样, 如果从拟合的角度看, 确定 w 可以化为如下的最小二乘问题:

$$\min_{w_i(i=1,\cdots,n)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}-\frac{w_i}{w_j}\right)^2 \tag{9}$$

由(9)式得到的最小二乘权向量一般与特征根法得到的不同．但是因为(9)式将导致求解关于 w_i 的非线性方程组，计算复杂，没有实用价值．

如果改为对数最小二乘：

$$\min_{w_i(i=1,\cdots,n)} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\ln a_{ij}-\ln \frac{w_i}{w_j}\right)^2 \tag{10}$$

则化为求解关于 $\ln w_i$ 的线性方程组．可以验证，如此解得的 w_i 恰是前面根法计算的结果(习题 3)．

特征根法解决这个问题的途径可由定理 2 的证明过程看出，若用(1)式给出的 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个方程由 a_{ij} 确定 w_i，ε_{ij} 共 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个未知数($i=1,\cdots,n,i>j$)，需增加 n 个限制条件．若这 n 个条件为

$$\lambda=\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{11}$$

则经(4)式推出(3)式，w 恰为特征向量．(11)式的含义请读者解释(对比 A 为一致阵的情况)．

由上可知，用不同标准确定的权向量是不同的．(当然，若 A 为一致阵，则用所有标准确定的权向量应相同)．那么，相对其他方法而言特征根法有什么优越性呢？

当比较 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ n 个因素对上层某因素的影响时，a_{ij} 是 C_i 对 C_j(直接比较)的强度，不妨称为 1 步强度．若记 $A^2=(a_{ij}^{(2)})$，则不难得到 $a_{ij}^{(2)}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}\cdot a_{sj}$，即 $a_{ij}^{(2)}$ 是 C_i 通过 $C_s(s=1,2,\cdots,n)$ 对 C_j 比较的强度之和，称 2 步强度，它已包含了 1 步强度 a_{ij}(因为和式中包括 $s=i,j$)．显然 $a_{ij}^{(2)}$ 比 a_{ij} 更能反映 C_i 对 C_j 的强度．类似地，记 $A^k=(a_{ij}^{(k)})$，$a_{ij}^{(k)}$ 是 k 步强度，它包含了 1

步至 $k-1$ 步强度．k 越大，$a_{ij}^{(k)}$越能全面地反映 C_i 对 C_j 的强度．可以认为 $a_{ij}^{(k)}$体现了相互比较的多步累积效应．

更进一步可以证明，对于正互反阵 A 和每一对(i,j),存在 k_0，当 $k>k_0$ 时 $a_{is}^{(k)}\geqslant a_{js}^{(k)}$或$a_{is}^{(k)}\leqslant a_{js}^{(k)}$ 对所有 $s\,(1\leqslant s\leqslant n)$成立．这表明对于足够大的 k，A^k的第i行元素给出了 C_i 在全部因素中排序权重的信息．可以用这行元素之和作为 C_i 的权重的度量，即以

$\dfrac{A^k e}{e^T A^k e}$ $(e=(1,1,\cdots,1)^T)$为诸因素的权向量，其中分母是归一化的需要．回顾本节定理 1 的 3)，当 $k\rightarrow\infty$ 时这个权向量正是 A 的特征向量 w，即

$$w=\lim_{k\rightarrow\infty}\frac{A^k e}{e^T A^k e} \tag{12}$$

由(12)式用级数理论还不难证明

$$w=\lim_{m\rightarrow\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{A^k e}{e^T A^k e} \tag{13}$$

以上分析表明，无论从全面反映因素间强度对比的多步累积效应的意义上((12)式)，还是从各个多步累积效应的平均的意义上((13)式)，用特征向量作权向量，优于用其他方法得到的权向量．

4．不完全层次结构中组合权向量的计算

在前两节列举的大多数层次结构模型中，上一层的每个因素都支配着下一层的所有因素，或被下一层所有因素影响，如图 9－1，9－2，9－4 ～ 9－6，这种层次结构称为**完全**的．但是也有的层次结构不是这样，如图 9－3，第 2 层的准则 C_1 支配第 3 层的 3 个指标 C_{11}、C_{12}、C_{13}(或者说有 3 个指标属于 C_1)，而 C_2 支配另外 4 个指标，C_3 不再划分指标，可以视作第 3 层的指标

就是准则 C_3 本身，即 $C_{31}=C_3$.这种层次结构称为**不完全的**.

不完全的层次结构会出现在不少评价、决策问题中，如学校要评价教师的贡献，粗略地只考虑教学与科研两个指标，若 P_1、P_2、P_3、P_4 4 位教师中 P_1、P_2 只从事教学，P_4 只搞科研，P_3 则二者兼顾，那么层次结构模型如图 9－7．C_1、C_2 支配因素的数目不等．

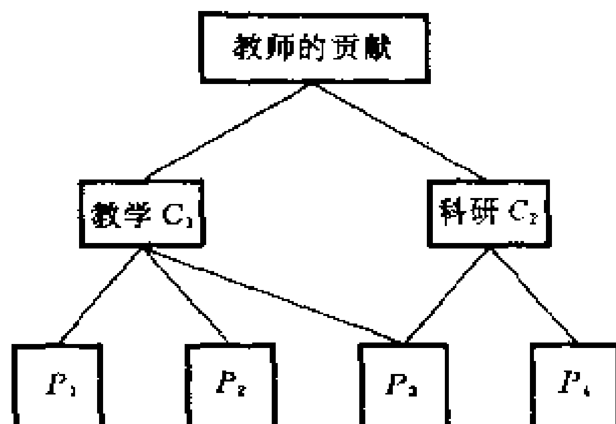


图 9－7 评价教师贡献的层次结构

在不完全层次结构组合权向量的计算中，是否应考虑以及怎样考虑支配因素数目不等的影响．为了避免叙述上的繁琐，我们具体地设第 2 层有 2 个因素 C_1、C_2，它们对第 1 层的权向量 $w^{(2)}=(w_1^{(2)},w_2^{(2)})^T$ 已经确定，第 3 层的因素 P_1、P_2、P_3 受 C_1 支配，记 $n_1=3$．P_3、P_4 受 C_2 支配，记 $n_2=2$．两个权向量 $w_1^{(3)}=(w_{11}^{(3)},w_{12}^{(3)},w_{13}^{(3)},0)^T$ 和 $w_2^{(3)}=(0,0,w_{23}^{(3)},w_{24}^{(3)})^T$ 也已分别从成对比较阵算出．因为第 3 层共 4 个因素，所以 $w_1^{(3)}$、$w_2^{(3)}$ 都应是 4 维向量，当某一因素不受 C_1 或 C_2 支配时，权向量的相应分量为零．下面讨论由 $w^{(2)}$ 和 $W^{(3)}=(w_1^{(3)},w_2^{(3)})$ 计算第 3 层对第 1 层的组合权向量 $w^{(3)}$ 的方法．

(1)不考虑支配因素数目不等的影响，像完全层次结构计算一样，用 9.1 节(8)式，即

$$w^{(3)}=W^{(3)}w^{(2)} \tag{14}$$

这种方法适合于像图 9－3 科技成果评价那类问题，其第 3 层的指标分别属于第 2 层的每一准则，所以每个指标对目标的组合权重，应该等于它对所属准则的权重乘以这个准则对目标的权重，这正是(14)式所表示的．

(2) 支配因素越多相对权重越大．用支配因素的数目对权向量 $w^{(2)}$进行加权，修正为$\widetilde{w}^{(2)}$，再计算 $w^{(3)}$，仍用前面的记号，有

$$\widetilde{w}^{(2)}=(n_1w_1^{(2)},\ n_2w_2^{(2)})^T\cdot(n_1w_1^{(2)}+n_2w_2^{(2)})^{-1} \tag{15}$$

$$w^{(3)}=W^{(3)}\widetilde{w}^{(2)} \tag{16}$$

其中(15)右端后面的因子是归一化的需要．

在图 9－7 所示的教师贡献的评价中，如果教师从事教学或科研完全由上级安排，那么若不考虑搞教学或科研的人数，则在评价时搞教学的教师（人数较多)将吃亏．譬如教学与科研两个准则的重要性相同，即 $w^{(2)}=(1/2,1/2)^T$，4 位教师不论从事教学或科研，能力都相同，即 $w_1^{(3)}=(1/3,1/3,1/3,0)^T$，$w_2^{(3)}=(0,0,1/2,1/2)^T$．公正的评价应是，被安排只搞教学或科研的 P_1、P_2、P_4 3 人的贡献相同，而 P_3 的贡献为他们的一倍．但是按照(14)式得到的是 $w^{(3)}=(1/6,1/6,5/12,1/4)^T$.用(15)、(16)式才会得到合理的结果 $w^{(3)}=(1/5,1/5,2/5,1/5)^T$．

(3) 支配因素越多相对权重越小．用支配因素数目的倒数对 $w^{(2)}$加权，(15)式变为

$$\widetilde{w}^{(2)}=\left(\frac{w_1^{(2)}}{n_1},\ \frac{w_2^{(2)}}{n_2}\right)^T\cdot\left(\frac{w_1^{(2)}}{n_1}+\frac{w_2^{(2)}}{n_2}\right)^{-1} \tag{17}$$

如果教师从事教学和科研完全靠发挥个人的积极性，而且上级希望每位教师都二者兼顾，那么可以考虑用这种方式评价，以鼓励从事人数较少的那一类工作（如图 9－7 中是 $n_2<n_1$)的教师．

5．递阶层次结构和更复杂的层次结构

以上讨论的所有层次结构模型有两个共同的特点，一是模型所涉及的各因素可以组合为属性基本相同的若干层次，层次内部因素之间不存在相互影响或支配作用，或者这种影响作用可以忽略；二是层次之间存在自上而下、逐层传递的支配关系，没有下层对上层的反馈作用，或层间的循环影响．具有这些特点的称为**递阶层次结构**，前面介绍的全部算法都是针对这种层次结构的．

更复杂的层次结构有以下几种情况．

(1)层次内部因素之间存在相互影响．例如以行驶性能为目标对各种型号汽车作评价时，准则层有刹车、转向、加速、运行等，这些准则之间就是相关的．

(2)下层反过来对上层有支配作用，形成循环，从而无法区分上下层．例如可以用教学、科研等每一项指标评价几位教师，也可以反过来对于每一位教师比较他的教学、科研等哪一方面表现最为出色，从而在指标层和对象层之间形成循环．

(3)既在层次内部因素之间存在相互影响，又在层次之间存在反馈作用．复杂的社会经济系统的层次结构就是这种情况，它的一个简化模型如图9－8．产业、需求、政策等6个层次(或称子系统)之间存在复杂的相互关系(用带箭头的直线表示)，在每层内部各因素(如产业包括农业、工业、第三产业，需求包括生活资料、社会发展资料、社会福利、国家安全等等)之间也有相互影响(用带箭头的弧线表示)．

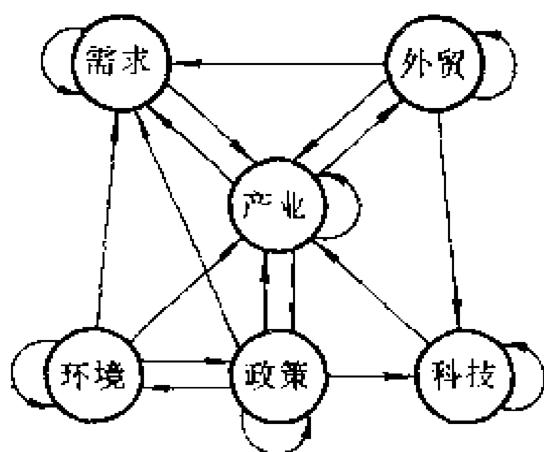


图9－8　社会经济系统的层次结构

用层次分析法研究这些更复杂的层次结构，需要引入超矩阵、极限相对权向量、极限绝

对权向量等概念，并建立相应的算法．

6．层次分析法的优点和局限性

从层次分析法的原理、步骤、应用等方面的讨论不难看出它有以下优点．

(1)**系统性** 层次分析把研究对象作为一个系统，按照分解、比较判断、综合的思维方式进行决策，成为继机理分析、统计分析之后发展起来的系统分析的重要工具．

(2)**实用性** 层次分析把定性和定量方法结合起来，能处理许多用传统的最优化技术无法着手的实际问题，应用范围很广．同时，这种方法将决策者与决策分析者相互沟通，决策者甚至可以直接应用它，这就增加了决策的有效性．

(3)**简洁性** 具有中等文化程度的人即可了解层次分析的基本原理和掌握它的基本步骤，计算也非常简便，并且所得结果简单明确，容易为决策者了解和掌握．

层次分析法的局限性可以用囿旧、粗略、主观等词来概括．就是说，第一，它只能从原有方案中选优，不能生成新方案；第二，它的比较，判断直到结果都是粗糙的，不适于精度要求很高的问题；第三，从建立层次结构模型到给出成对比较矩阵，人的主观因素的作用很大，这就使得决策结果可能难以为众人接受．当然，采取专家群体判断的办法是克服这个缺点的一种途径．

习　题

1．证明层次分析法中定义的 n 阶一致阵 A(9.1 节(4)式)有下列性质：

① A 的秩为 1，唯一非零特征根为 n；

② A 的任一列(行)向量都是对应于 n 的特征向量．

2．对于 n 阶成对比较阵 $A=(a_{ij})$，设 $a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}\varepsilon_{ij}$，$\varepsilon_{ij}=1+\delta_{ij}$，其中 $w=(w_1,\cdots,w_n)^T$ 是对应于最大特征根的特征向量，δ_{ij} 表示 a_{ij} 在一致性附近的扰动．若 δ_{ij} 为方差 σ^2 的随机变量，证明一致性指标 $CI\approx\frac{\sigma^2}{2}$．

3．证明用对数最小二乘法得到的权向量（9.3 节（10）式）与根法（9.3 节 2（3））的计算结果相同．

*4．用层次分析法解决一两个实际问题，例如：

① 学校评选优秀学生或优秀班级，试给出若干准则，构造层次结构模型．可分为相对评价和绝对评价两种情况讨论．

② 你要购置一台个人电脑，考虑功能、价格等因素，如何作出决策．

③ 为准备报考大学的青年建立一个选择志愿的层次结构模型．

④ 你的家乡准备集资兴办一座小型饲养场，是养猪，还是养鸡、养鸭、养兔……．

*5．在构造成对比较阵时，如果由于某种原因其上三角部分没有填满，得到的矩阵是残缺的．如何利用这一不完全的信息得到权向量．

*6．为减少层次分析法中的主观成分，可请专家群体构造成对比较阵．试给出一种由若干个成对比较阵确定权向量的方法．

*7．用另一种方法构造成对比较阵 $A=(a_{ij})$：a_{ij} 表示因素 C_i 与 C_j 的影响之差，$a_{ji}=-a_{ij}$，于是 A 为反对称阵，并且，当 $a_{ik}+a_{kj}=a_{ij}(i,k,j=1,2,\cdots,n)$ 时 A 是一致阵．规定权向量 $w=(w_1,\cdots,w_n)^T$ 应满足 $\sum_{i=1}^{n} w_i=0$，a_{ij} 可记作 $a_{ij}=(w_i-w_j)+\varepsilon_{ij}$（对一致阵 $\varepsilon_{ij}=0$）．试给出一种由 A 确定权向量 w 的方法．（与 1－9 尺度对应，这里用 0－8 尺度，即 a_{ij} 取值范围是 $0,1,\cdots,8$ 及 $-1,\cdots,-8$）．

第10章　图的方法建模

图是由平面上的一些点及这些点之间的连线(称为边)构成的.用点表示要研究的离散对象，用边表示对象之间的关系来建立模型，并且用图的性质和算法求解模型，是研究离散问题的重要手段.

图论是离散数学的重要分支，它的一些重要的但是涉及过多理论和算法的应用，如电网络及与最短路径有关的问题等都不可能在这里讨论.本章的选题着眼于从建模的角度说明哪一类离散问题可以用图的方法解决.这些题目用到的一点图论知识将在建模和求解的过程中作适当的叙述，使得没有学过图论的读者也能够理解.

10.1　消防设施与监狱看守

若干条街道构成居民小区，一个非常简化的小区如图10－1所示，$e_1, e_2, \cdots, e_7$ 表示街道，$v_1, v_2, \cdots, v_5$ 表示交叉路口.现计划在某些路口安置消防设施，只有与路口直接相连的街道才能使用它们.为使所有街道必要时都有消防设施可用，在哪些路口安置设施才最节省呢?[8].

一座监狱的几间牢室有道路相连，不妨设其示意图也为图10－1，$v_1, \cdots, v_5$ 表示牢室，$e_1, \cdots, e_7$ 表示道路.监狱看守要设在通过道路能直接监视所有牢室的地方，如果看守不得走动，那么他们应呆在某些牢室(即路口)所在地.问至少需要几名看守才能完成监视任务呢?

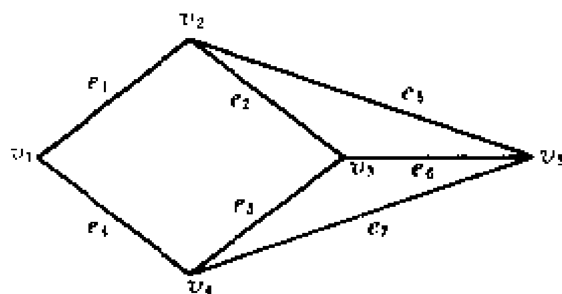


图10－1　街区(及监狱)示意图

上面两个问题的模型已经很自然地用图表示出来，也不难用图的性质和算法解决.

图的几个基本概念 以图 10－1 为例叙述.

图是由**顶点集** $V=(v_1, v_2, \cdots, v_5)$、**边集** $E=(e_1, e_2, \cdots, e_7)$ 以及各个顶点和各边之间确定的**关联关系** Ψ 组成的一种结构，记作图 $G=(V, E, \Psi)$，其中 $\Psi(e_1)=v_1v_2, \Psi(e_2)=v_2v_3, \cdots, \Psi(e_7)=v_4v_5$，$v_1$、$v_2$ 是 e_1 的端点，e_1 是 v_1、v_2 的邻边. 为简便起见以下将 Ψ 省略，记为 $G=(V, E)$，$e_1=v_1v_2, \cdots$. 显然，这里的图不是几何意义下的图形，只要保持 V, E, Ψ 不变，顶点的位置、边的长短曲直都可以任意选择. 图还可以用下面两种矩阵形式表示：

关联矩阵 (Incidence Matrix) $R=(r_{ij})_{n\times m}$ (n 为顶点数，m 为边数)，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若存在 } v_k\in V \text{，使 } e_j=v_iv_k\\ 0, & \text{否则}\end{cases} \tag{1}$$

即仅当以 v_i 为顶点的邻边是 e_j 时 $r_{ij}=1$. 图 10－1 的关联矩阵为

$$R=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&0&1&0\\0&0&1&1&0&0&1\\0&0&0&0&1&1&1\end{bmatrix}\begin{matrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\end{matrix} \tag{2}$$

$$\begin{matrix}e_1&e_2&e_3&e_4&e_5&e_6&e_7\end{matrix}$$

邻接矩阵 (Adjacency Matrix) $A=(a_{ij})_{n\times n}$，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若存在 } e_k\in E \text{，使 } e_k=v_iv_j\\ 0, & \text{否则}\end{cases} \tag{3}$$

即仅当 v_i 与 v_j 之间有边相连时 $a_{ij}=1$. 图 10－1 的邻接矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\\0&1&0&1&1\\1&0&1&0&1\\0&1&1&1&0\end{bmatrix}\begin{matrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\end{matrix}\qquad(4)$$

$$\begin{matrix}v_1&v_2&v_3&v_4&v_5\end{matrix}$$

可以看出，由图能够写出它的关联矩阵 R 和邻接矩阵 A，反之，由 R 或 A 也能够作出相应的图.

消防设施的安置 在每个路口都安置消防设施显然可以达到每条街道都可以使用的目的，但这是不必要的. 去掉 v_5，在 v_1、v_2、v_3、v_4 各安置一个也可达到目的. 再去掉 v_1，在 v_2、v_3、v_4 各安置一个仍然可以. 不能再去掉了. 不难发现，在 v_1、v_3、v_5 或 v_2、v_4、v_5 各安置一个也可以. 但是只在 2 个路口安置消防设施是不行的，所以应该安置 3 个设施. 可以看出，这里要研究图的顶点与边的关系.

图的复盖问题正是讨论这种关系的. 若图 G 的每条边都至少有一个端点在顶点集 V 的一个子集 K 之中，则 K 称为 G 的**复盖**(Covering). 一个图可以有很多复盖，如 (v_1, v_2, v_3, v_4)，(v_1, v_3, v_4, v_5)，(v_2, v_3, v_4)，(v_1, v_3, v_5)，(v_2, v_4, v_5) 都是图 10－1 所示的 G 的复盖. 含顶点个数最少的复盖称为**最小复盖**. 最小复盖也不一定唯一，如上面的 (v_2, v_3, v_4)，(v_1, v_3, v_5) 等. 最小复盖中顶点个数称**复盖数**，记作 α. 消防设施的安置问题归结为求图的最小复盖.

因为关联矩阵表示的是顶点与边之间的关系，所以关联矩阵与复盖密切相关. 下面的结论显然成立.

顶点集 V 的子集 K 是图 G 的一个复盖，当且仅当 G 的关联矩阵 R 中 K 的各顶点所对应的行内，每列至少存在一个元素 1.

从关联矩阵可以找出一个最小复盖，下面仅以 (2) 式为例说

明其步骤:

1)在(2)中取恰有两个1的那一列中1所在的行，如 v_3 行. 令 $v_3 \in K$，划去 v_3 行及 v_3 行中元素1所在的 e_2、e_3、e_6 列，得

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} \qquad (5)$$

$$\begin{matrix} e_1 & e_4 & e_5 & e_7 \end{matrix}$$

2)在(5)中取恰有两个1的那一列中1所在的行，如 v_5 行. 令 $v_5 \in K$. 划去 v_5 行及 v_5 行中元素1所在的 e_5、e_7 列，得

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_4 \end{matrix} \qquad (6)$$

$$\begin{matrix} e_1 & e_4 \end{matrix}$$

3)因为 $v_1 > v_2$，$v_1 > v_4$(若对所有的 j，$r_{kj}=1 \Rightarrow r_{ij}=1$，记 $v_i > v_k$)，划去 v_2、v_4 行，$v_1 \in K$，过程结束. 最小复盖 $K=(v_1, v_3, v_5)$.

综上可知，最小复盖的概念和算法完全解决了消防设施安置这一类问题.

监狱看守问题 在每间牢室设一看守是多余的，在 v_1、v_3，v_5 各设一看守即可同时监视 v_2、v_4. 还可以把 v_3 处的看守去掉，只留 v_1、v_5. 当然，在 v_2、v_3 或 v_4、v_5 处设看守亦可. 但是只在一处设看守是不行的. 所以至少需要2名看守.

用图来分析这个问题我们看到，与复盖问题研究用若干顶点控制所有邻边不同，这里讨论的是用若干顶点通过邻边控制所有顶点. 试看如下的定义：若图 G 的每个顶点或者直接属于顶点集 V 的某个子集 C，若者它的邻边的另一端点属于 C，则 C 称为 G 的**控制集**(Dominating set). 这样 (v_1, v_3, v_5)、(v_1, v_5)，(v_2, v_3)等都是图10－1的控制集. 含顶点个数最少的控制集称为最

小控制集，如(v_1, v_5)，(v_2, v_3)．最小控制集中顶点个数称控制数，记作δ．

邻接矩阵表示的是顶点之间的联系，所以它与控制集有关．将这种关系的论述及由邻接矩阵确定最小控制集的算法留给读者(习题1)．

评注 复盖和控制集是图论中研究顶点与边之间关系的两个概念，可以解决相当广泛的一类实际问题．对于消防设施和监狱看守的设置，因为问题本身已经构成了图，所以是这两个概念的直接应用．有些问题并没有图的含义，需要我们先构造图的模型，即赋予顶点、边以实际意义，再依问题性质用复盖或控制集的方法解决，试分析习题2．

10.2 化学制品的存放

一家公司生产若干种化学制品，其中某些制品是互不相容的，如果存放在一起，则可能发生化学反应，引起危险．因此公司必须把仓库分成相互隔离的若干区，以便把不相容的制品分开存放．问至少要划分多少小区，怎样存放才能保证安全[8]．

考察一个简化的实例．设只有7种化学制品，用a、b、c、d、e、f、g表示，其中不能存放在一起的是(a,b)，(a,d)，(b,c)，(b,e)，(b,g)，(c,d)，(c,e)，(c,f)，(d,e)，(d,g)，(e,f)，(f,g)．用图来表示这些制品和它们之间的关系是很方便的．顶点$v_1, v_2, \cdots, v_7$代表$a, b, \cdots, g$ 7种制品，把不能放在一起的两种制品用顶点之间的边连接起来，如图10－2．有边相连的两个顶点称为相邻的．设想仓库应划分为红、黄、绿等不同颜色的小区，相邻顶点代表的制品不能放在一个小区内．那

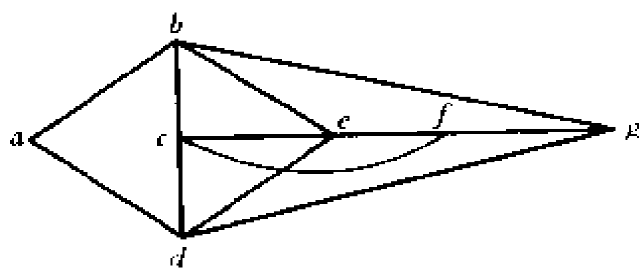


图10－2 化学制品存放的图

么我们的问题相当于，给各个顶色染色，使相邻顶点的颜色互不相同，并且为了使所用颜色的数目最少，每种颜色应该给尽可能多的顶点涂染．这就是图的所谓顶点染色问题，下面讨论解决这类问题的关键．

顶点染色　在顶点集 V 中要找出那些不包含相邻顶点的子集，并要求这种子集内顶点数目尽量地多，就可以用同一种颜色涂染尽可能多的顶点．不包含相邻顶点的 V 的子集 S 称为**独立集**(Independent set)．如果在 S 中添加任何顶点都会使 S 不再是独立集的话，那么 S 称为**极大独立集**．图 10－2 中 (a)，(a,e)，(a,e,g)都是独立集，其中只有(a,e,g)是极大独立集．还可以找出其他的极大独立集如(a,f)，(b,d,f)等．找出全部极大独立集是解决顶点染色问题的关键．

回顾 10.1 节中关于图的复盖的定义，不难发现独立集与复盖之间的密切关系．用$\overline{S}(\subset V)$表示 S 对 V 的补集，下述结论成立：若 S 是独立集，则$\overline{S}$ 是复盖；反之亦真．(证明留作习题 3)如图 10－2 中 $S=(a,e)$是独立集，$\overline{S}=(b,c,d,f,g)$是复盖．

与极大独立集形成这种互补关系的是**极小复盖**．可以想到它应定义为：如果从复盖 K 中去掉任何顶点都会使 K 不再是复盖的话，那么 K 称为极小复盖．图 10－2 中 $S=(a,e,g)$是极大独立集，$\overline{S}=K=(b,c,d,f)$是极小复盖．这样，求全部极大独立集又归结为找出所有的极小复盖．

求极小复盖的逻辑算法　这种算法的基础是极小复盖的如下性质：当且仅当对于每个顶点 v，或者 v 属于 K，或者 v 的所有相邻顶点属于 K，并且二者不能同时成立时，K 是极小复盖．算法的程序是：对于每个顶点 v，选择 v 或者选择 v 的所有相邻顶点．

利用逻辑代数方法可以有效地执行上述程序．逻辑代数中的"和"(＋)运算和"积"(・)运算分别相当于集合中的"或"($\bigcup$)

运算和"交"($\cap$)运算. 程序中对于顶点 a(图 10－2), 选择 a 或者选择 a 的所有相邻顶点 b, d, 应表示为 $a+bd$. 这样, 求图 10－2 的全部极小复盖归结为如下的逻辑算式:

$$(a+bd)(b+aceg)(c+bdef)(d+aceg)(e+bcdf) \cdot (f+ceg)(g+bdf) \quad (1)$$

利用逻辑代数运算规律可以将(1)式化简为

$$aceg+bcdeg+bdef+bcdf \quad (2)$$

得到全部极小复盖为(a, c, e, g), (b, c, d, e, g), (b, d, e, f)和(b, c, d, f).

回到**顶点染色**问题. 取全部极小复盖的补集, 得到图 10－2 的所有极大独立集: (b, d, f), (a, f), (a, c, g)和(a, e, g). 包含顶点数目最多的独立集称**最大独立集**, 其中的顶点数目称**独立数**, 记作 β. 任取一最大独立集, 如 $S_1=(b, d, f)$, 给它染上第 1 种颜色. 再利用上述方法找出 $G\setminus S_1$ 的全部极大独立集, 不难知道它们是(a, c, g), (a, e, g), 给 $S_2=(a, c, g)$染上第 2 种颜色. $G\setminus S_1\setminus S_2$ 就只剩下顶点 e 了, 于是给 e 染第 3 种颜色. 可以看出, 用 3 种颜色分别给(b, d, f), (a, c, g)和(e)涂染, 是颜色数目最少的顶点染色方案. 这里, 所用颜色的最少数目称为**顶点色数**. 当然, 读者不难给出用 3 种颜色为顶点染色的其它方案, 但决不可能用 2 种颜色完成任务.

于是化学制品的存放问题就相应地解决了, 即至少要把仓库划分 3 个小区, 可以将 b, d, f 3 种制品、a, c, g 3 种制品与制品 e 分开存放.

评注 用图的方法建模, 首先要把研究对象用图的两个主要元素顶点和边表示出来, 然后再将要解决的问题归结为图论中的某些概念, 如顶点染色. 至于算法可以查阅有关资料.

10.3 循环比赛的名次

若干支球队参加循环比赛，他们两两相互交锋，假设每场比赛只计胜负，且不允许平局. 在循环赛结束后怎样根据他们的比赛成绩排列名次呢? [8].

很自然地想到用顶点表示球队，而为了说明比赛的胜负，必须在连接顶点的边上标以表示方向的某种符号，如箭头. 图10－3给出了6支球队的比赛结果，即1队战胜2、4、5、6队，而输给了3队；5队战胜3、6队，而输给1、2、4队等等.

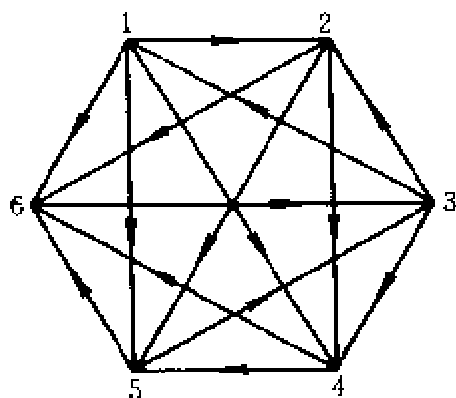


图10－3　6支球队的比赛结果

根据比赛结果排名次的一个办法是在图中顺箭头方向寻找一条通过全部6个顶点的路径，如 $3 \to 1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 6$，这表示3队胜1队，1队胜2队，…，于是3队为冠军，1队为亚军等等. 但是还可以找出其它路径，如 $1 \to 4 \to 6 \to 3 \to 2 \to 5$，$4 \to 5 \to 6 \to 3 \to 1 \to 2$ 等. 所以用这种方法显然不能决定谁是冠亚军.

排名次的另一个办法是计算得分，即每支球队获胜的场次. 上例中1队胜4场，2、3队各胜3场，4、5队各胜2场，6队胜1场. 由此虽可决定1队为冠军，但2、3队无法决出高低.

下面引用图论的有关知识解决这个问题.

竞赛图及其性质　在每条边上都标出方向的图称为**有向图**(Digraph). 每对顶点之间都有一条边相连的有向图称为**竞赛图**. (Tournament). 只计胜负、没有平局的循环比赛的结果可用竞赛图表示，如图10－3. 问题归结为如何由竞赛图排出顶点的名次.

2个顶点的竞赛图排名次不成问题.

3 个顶点的竞赛图只有图 10－4 的两种形式（不考虑顶点的标号）．对于（1），3 个队的名次排序显然应是{1，2，3}；对于（2），则 3 个队名次相同，因为他们各胜一场．

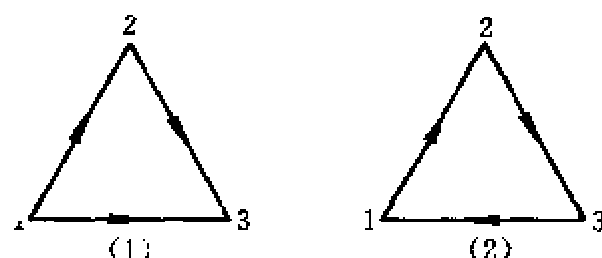


图 10－4 3 个顶点的竞赛图

4 个顶点的竞赛图共有图 10－5 所示的 4 种形式，下面分别进行讨论．

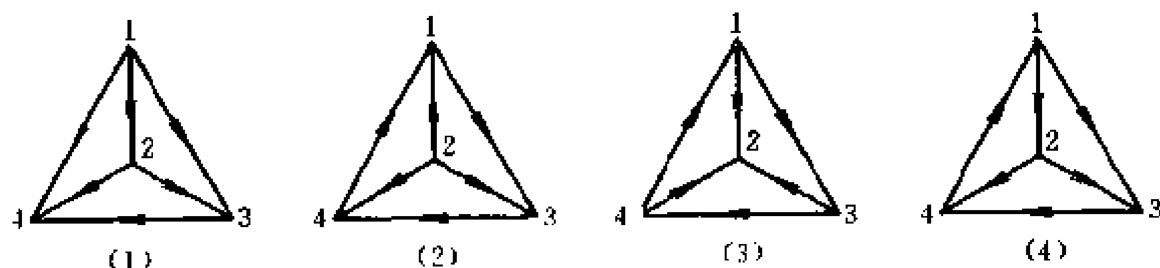


图 10－5 4 个顶点的竞赛图

（1） 有唯一的通过全部顶点的有向路径 1 → 2 → 3 → 4，这种路径称**完全路径**；4 个队得分为（3，2，1，0）．名次排序无疑应为{1，2，3，4}．

（2） 点 2 显然应排在第 1，其余 3 点如图 10－4（2）形式，名次相同；4 个队得分为（1，3，1，1）．

（3） 点 2 排在最后，其余 3 点名次相同；得分为（2，0，2，2）．

（4） 有不只一条完全路径，如 1 → 2 → 3 → 4，3 → 4 → 1 → 2；得分为（2，2，1，1）．由这些我们无法立即排出名次，但这种情形是研究的重点．还可以注意到，（4）具有（1）～（3）所没有的性质：对于任何一对顶点，存在两条有向路径（每条路径由一条或几条边组成），使两顶点可以相互连通，这种有向图称

为双向连通的(Biconnected).

5个顶点以上的竞赛图虽然更加复杂，但基本类型仍如图10－5所给出的3种：具有唯一的完全路径如(1)；双向连通如(4)；不属于这两种情况如(2)、(3).

一般的n个顶点的竞赛图具有以下性质：

1)竞赛图必存在完全路径.(可用归纳法证明)

2)若存在唯一的完全路径，则由完全路径确定的顶点的顺序，与按得分多少排列的顺序相一致.(这里一个顶点的得分指出它按箭头方向引出的边的数目)若顶点集为$V=(1,2,\cdots,n)$，不妨设唯一的完全路径为$1\to 2\to\cdots\to n$，则顶点i的得分为$n-i\,(i=1,2,\cdots,n)$.

显然，性质2给出了具有唯一完全路径的竞赛图的排名次方法，图10－5(1)的情况正是这样.

双向连通竞赛图的名次排序　3个顶点的双向连通竞赛图，如图10－4(2)，名次排序相同.以下讨论$n\,(\geqslant 4)$个顶点的双向连通竞赛图.

首先，竞赛图的邻接矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$重新定义如下(参看10.1节(3)式)：

$$a_{ij}=\begin{cases}1\text{，存在从顶点 } i \text{ 到 } j \text{ 的有向边}\\ 0\text{，否则}\end{cases}\tag{1}$$

依此，图10－5(4)的邻接矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\tag{2}$$

若记顶点的得分向量为$s=(s_1,s_2,\cdots,s_n)^T$，其中s_i是顶点i的得分，则由(1)不难知道

$$s=Ae\,,\;e=(1,1,\cdots,1)^T\tag{3}$$

由(2)、(3)式容易算出双向连通的图10－5(4)的得分向量是

$s=(2,2,1,1)^T$，正如前面已经给出的. 由 s 无法排出名次.

记 $s=s^{(1)}$，称为1级得分向量，进一步计算

$$s^{(2)}=As^{(1)} \tag{4}$$

称为2级得分向量. 每支球队(顶点)的2级得分是他战胜的各个球队的(1级)得分之和，有理由作为他排名次的依据. 对于图10－5(4)，$s^{(1)}=(2,2,1,1)^T$，$s^{(2)}=(3,2,1,2)^T$. 由 $s^{(2)}$可以决定冠军. 继续这个程序，得到 k 级得分向量

$$s^{(k)}=As^{(k-1)}=A^k e,\ k=1,2,\cdots \tag{5}$$

对于图10－5(4)有

$$s^{(3)}=(3,3,2,3)^T,\qquad s^{(4)}=(5,5,3,3)^T,$$
$$s^{(5)}=(8,6,3,5)^T,\qquad s^{(6)}=(9,8,5,8)^T,$$
$$s^{(7)}=(13,13,8,9)^T,\qquad s^{(8)}=(21,17,9,13)^T,$$

如果 $k\to\infty$ 时 $s^{(k)}$收敛于某个极限得分向量(为了不使它无限变大，应进行归一化)，那么用这个向量作为排名次的依据是合理的. 极限得分向量是否存在呢? 答案是肯定的. 因为对于 $n(\geqslant 4)$ 个顶点的双向连通竞赛图，存在正整数 r，使得邻接矩阵 A 满足 $A^r>0$. 这样的 A 称为**素阵**.

再利用著名的 Perron－Frobenius 定理，素阵 A 的最大特征根为正单根 λ，λ 对应正特征向量 s，且有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{A^k e}{\lambda^k}=s \text{ *)} \tag{6}$$

与(5)式比较可知，k 级得分向量 $s^{(k)}$，$k\to\infty$ 时(归一化后)将趋向 A 的对应于最大特征根的特征向量 s，s 就是作为排名次依据的极限得分向量. 如对图10－5(4)，算出其邻接矩阵 A((2)式)的最大特征根 $\lambda=1.4$ 和对应特征向量 $s=(0.323,0.280,0.167,0.230)^T$，从而确定名次排列为1，2，4，3.

---

*) 这里的结果与9.3节定理1是一致的.

对于本节开始提出的 6 支球队循环比赛的结果(图 10－3)，不难看出这个竞赛图是双向连通的．写出其邻接矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1&1&1\\0&0&0&1&1&1\\0&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}\qquad(7)$$

由(5)式算出各级得分向量为

$s^{(1)}=(4,3,3,2,2,1)^T$，　　$s^{(2)}=(8,5,9,3,4,3)^T$

$s^{(3)}=(15,10,16,7,12,9)^T$　$s^{(4)}=(38,28,32,21,25,16)^T$

进一步算出 A 的最大特征根 $\lambda=2.232$ 和特征向量 $s=(0.238,0.164,0.231,0.113,0.150,0.104)^T$，排出名次为 $\{1,3,2,5,4,6\}$.

其他情况　对于既没有唯一完全路径，又不是双向连通的竞赛图，如图 10－5 的(2)、(3)，通常可以分解为若干个双向连通的子竞赛图(只有一个顶点的图视为双向连通竞赛图的特例)．在图 10－6 中 8 个顶点的竞赛图分解为 3 个双向连通子竞赛图

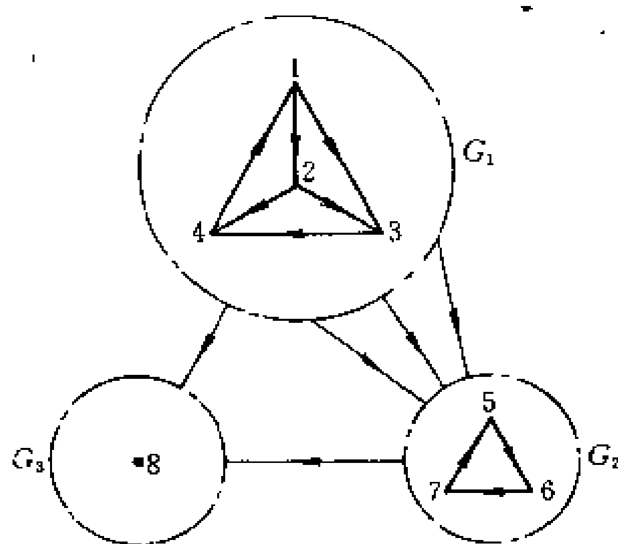


图 10－6　分解为3个双向连通子竞赛图

G_1、G_2、G_3，子图之间的边被简化了．实际上两子图的每对顶点之间都有边相连，而这些边的方向必是一致的，否则相应的子图可以合并为更大的双向连通子竞赛图．在每个这样的图中按上面介绍的方法排名次，而子图之间的名次不难由它们相连边的方向决定．在图 10－6 中 G_1 与图 10－5(4)相同，名次为{1，2，4，3}；G_2 是 3 个顶点的双向连通竞赛图，5、6、7 的名次相同；G_3 只有 1 个顶点 8．全部顶点的名次排列为{1，2，4，3，5，(6，7)，8}．

10.4 红绿灯的调节

在车辆拥挤的交叉路口，需要合理地调节各条车道安置的红绿灯，使车辆能够顺利、有效地通过．在图 10－7 所示的十字路口共有 6 条车道，其中 a、b、c、d 是 4 条直行道，e、f 是 2 条左转弯道，每条车道都设有红绿灯．要求制订这 6 组红绿灯的调节方案．首先应使各道的车辆互不冲突地顺利驶过路口，其次希望方案的效能尽量地高，譬如各车道总的绿灯时间最长，使尽可能多的车辆通过[37]．

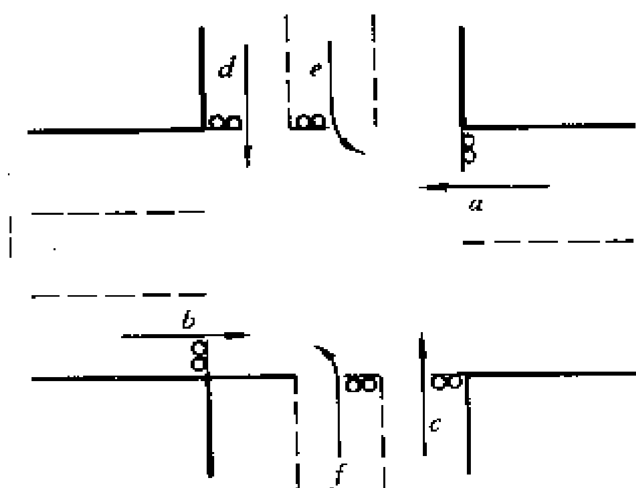


图 10－7　十字路口的 6 条车道

我们的研究对象是 6 条车道上的交通流，它们之间的关系由交

通流通过路口时是否相容确定．如 c 道上的交通流只与 d、f 道上的交通流相容．若用图中的顶点表示交通流，当两条交通流相容时将代表交通流的两顶点连接起来．这样得到的图称交通流的**相容图**，由图10－8 所示．相容图是用图的方法研究红绿灯调节的基础．

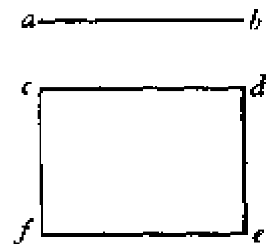


图 10－8　交通流相容图

可行调节　不妨假定 6 条车道的红绿灯调节是周期性的，譬如每分钟为一周期，于是只需将一分钟的时间划分为若干时段，将这些时段作为绿灯时间分配给各条交通流，使之满足相容性的要求．这相当于对交通流相容图的每个顶点，分配实轴(时间轴)上的一个区间，当两个顶点相连时它们对应的区间才可以重合．图论中区间图的概念可以用来解决这个问题．

图 $G=(V,E)$称为**区间图**(Interval graph)是指，存在从顶点 $u\in V$ 到区间的对应关系 $J(u)$，使得对于任意的 u，$v\in V\,(u\neq v)$，有

$$uv\in E <=> J(u)\cap J(v)\neq\varnothing \qquad (1)$$

(1)式表示当且仅当顶点 u、v 之间有连线时，它们对应的区间必有重合部分．图 10－9 给出了两个区间图及其对应关系 J(区间长度可以变化，但相互重合关系是确定的)．图 10－10 不是区间图，因为不存在满足(1)式的对应关系 J．

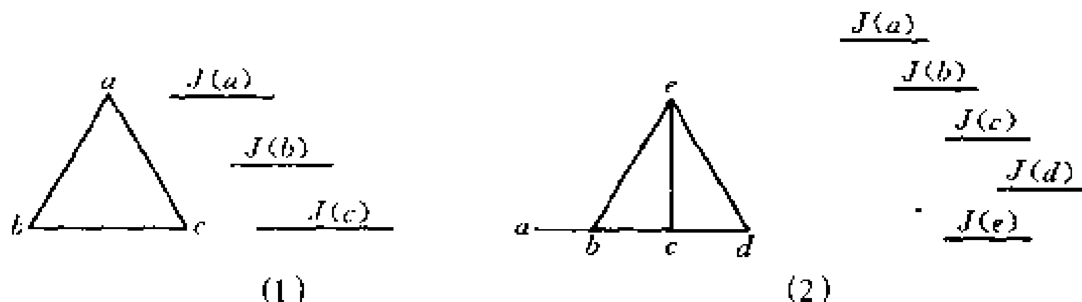


图10－9　区间图及对应关系J

可以看出，图 10－8 所示交通流相容图 G 不是区间图．但是因为对于相容的交通流，绿灯时间并不要求一定相重，所以可打

开 G 的某一条边，使生成的子图 H 是区间图，如图10－11给出了这样一种子图及其对应关系 J．实际上，将时间轴上的区间 $J(a)$，$J(b)$，…，$J(f)$ 作为绿灯时间，分配给相应的交通流 a，b，…，f，就是一种可行的红绿灯调节方案．当然，可以有很多种可行方案．

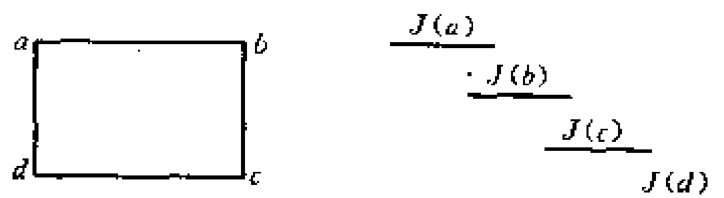


图 10－10　非区间图（$J(d)$ 与 $J(a)$ 无法重合）

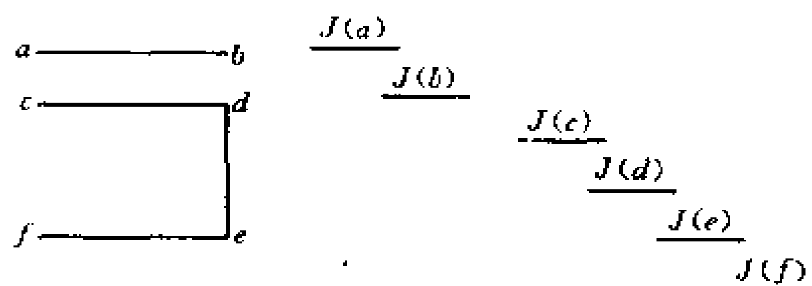


图 10－11　图10－8 的子图 H（区间图）及对应关系 J

有效调节　对于给定的子图 H，考察在一定意义下使总的绿灯时间最长的调节方案．将一分钟的间隔划分为 d_1、d_2、d_3、d_4 4 个时段，如图 10－12 那样地设定 $J(a)$，$J(b)$，…，$J(f)$，既符合图 10－11 的要求，又是使绿灯时间尽量长的方便合理的调节方案．下面的问题是确定 $d_1 \sim d_4$．

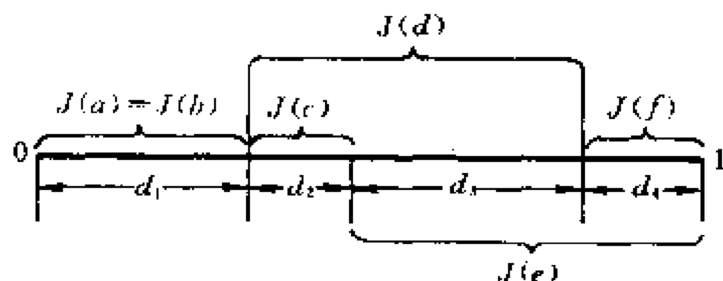


图 10－12　与子图 H 相应的方案

假设要求每条车道的绿灯时间都不小于10秒钟，又希望直行道(a,b,c,d)的绿灯时间比左转弯道(e,f)长一些(因为直行道的车辆较多)，不妨设二者的比例为$\lambda_1:\lambda_2$. 则问题归结为解如下的线性规划:

$$\max_{d_1\sim d_4} R=\lambda_1(2d_1+2d_2+d_3)+\lambda_2(d_3+2d_4) \qquad (2)$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} d_1+d_2+d_3+d_4=60 \\ d_1\geqslant 10 \\ d_2\geqslant 10 \\ d_2+d_3\geqslant 10 \\ d_4\geqslant 10 \\ d_3+d_4\geqslant 0 \end{cases} \qquad (3)$$

问题(2)、(3)的解是对应于子图H的最有效方案.

注意到交通流相容图G(图10－8)还可以生成不同于H(图10－11)的其他形式的子图H'(区间图)，譬如打开边ef. 对于H'可以给出类似于图10－12的安排，并解相应的线性规划，得到H'的最有效方案(习题10).

对G的所有可能生成的子图重复上述程序，并将得到的结果进行比较，才能确定与G相应的6条车道红绿灯最有效的调节方案.

评注 把交通流比作顶点，用相容原则来形成边，从而构造出交通流相容图，是这个问题建模的关键. 区间图的概念将图的顶点和边的关系与实轴上的区间对应起来，不仅可以解决本节提出的问题，在遗传学、考古学及生态学上都有广泛应用[37].

10.5 能源利用系统的预测和冲量过程的稳定性

用系统的观点考察某地区的能源利用状况. 先界定系统的范围. 譬如只考虑能源利用量、价格、生产率、环境质量、工业产

值、就业机会及人口总数 7 个因素，它们之间相当复杂的关系可以简化为一个因素对另外因素直接的促进或促退作用. 要研究的问题是，当某个因素突然发生改变时，系统各因素的演变过程如何[28].

定性模型与定量模型 能源利用系统的每个因素用图的一个顶点表示，因素间的直接影响用带方向的边表示，构成 10.3 节中提到的有向图. 为了表明因素间的影响作用是促进的（正面的）还是促退的（反面的），在箭头旁分别标以 + 号或 − 号. 于是整个系统可以用**带符号的有向图**（Signed Digraph）G_1 表示，如图 10 − 13. 这里有两点需要说明：第一，两顶点之间的有向边表示

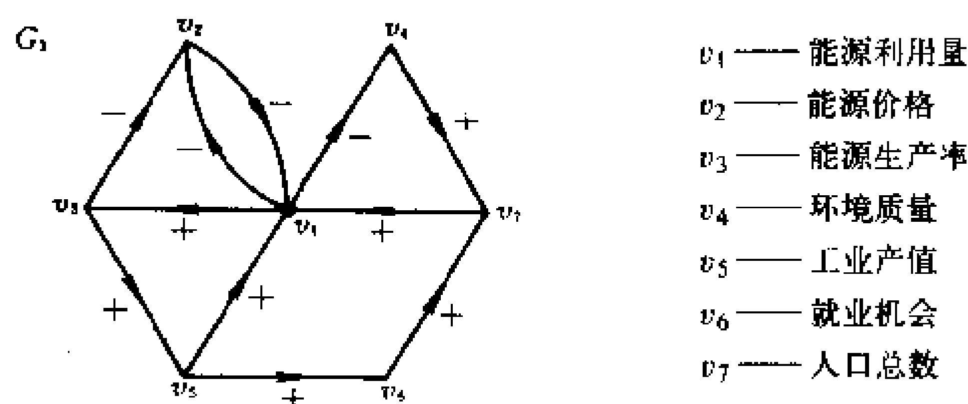


图 10 − 13 能源利用系统带符号的有向图

两因素间的直接影响，如 v_1v_3 带 + 号表示某时段能源利用量 v_1 的增加导致下一时段能源生产率 v_3 的增长，v_1v_4 带 − 号则表示 v_1 的增加导致下一时段环境质量 v_4 的降低. 因素间的间接影响是由几条相连的同向边反映出来的，如 v_1 的增加导致下时段 v_3 的增长，又引起再下时段工业产值 v_5 的增长. 有些因素间的影响是双向的，如 v_1 的增加导致下时段能源价格 v_2 的降低，v_2 的降低又引起再下时段 v_1 的增长. 第二，像能源利用这样的社会经济系统，因素之间的影响关系十分复杂，应该合理地、简化地确定哪些因素间有直接影响，这里除了主要根据客观规律作出决定外，方针政策有时也是判断的依据. 如能源利用量 v_1 增加时能源价格 v_2 是降低（v_1v_2 为 − ）还是提高（v_1v_2 为 + ），是由价格政策决定的.

带符号的有向图 $G_1=(V, E)$可用它的邻接矩阵 $A=(a_{ij})$，表示，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & 若 v_iv_j 为 + \\ -1, & 若 v_iv_j 为 - \\ 0, & 若 v_iv_j \notin E\end{cases} \tag{1}$$

图 10－13 的邻接矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

用图 G_1 和矩阵 A 表示的是定性模型，如果将系统各因素加以量化，并定量地描述因素间的相互影响，那么可以得到定量模型，用**加权的有向图**(Weighted Digraph)G_2 描述，如能源利用系统又可用图 10－14 表示．这里能源利用量 v_1 和生产率 v_3 均以变化 10% 为 1 个单位，图中表示 v_1 增加 1 个单位将引起 v_3 0.8个单

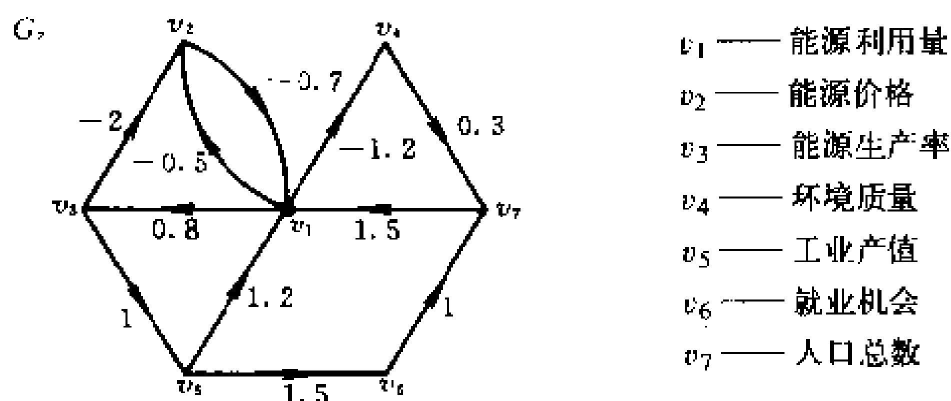


图 10－14　能源利用系统加权的有向图

位的增长．像 0.8 这样标在图中箭头旁的数字称为权．用权代替(1)式中 a_{ij} 的 ±1 取值，记作 w_{ij}(当 $a_{ij}=0$ 时 $w_{ij}=0$)，就得到

加权有向图的邻接矩阵 W. 图 10－14 的邻接矩阵为

$$W=\begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0.8 & -1.2 & 0 & 0 & 0 \\ -0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 \\ 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

显然，带符号的有向图的邻接矩阵 A 可视为加权有向图邻接矩阵 W 的特例，以下用 w_{ij} 代替 a_{ij} 表示 v_i 对下一时段 v_j 的影响.

冲量过程(Pulse Process) 为了研究系统的某因素在初始时段的一个突然变化所引起的整个系统在其后各时段的演变过程，用 $v_i(t)$表示因素 v_i 在时段 t 的值，$p_i(t)$表示 v_i 在时段 t 的改变量(冲量). 设系统共有 n 个因素，根据 w_{ij} 的含义显然有[*)]

$$v_i(t+1)=v_i(t)+p_i(t+1),\ i=1,2,\cdots,n,\ t=0,1,2,\cdots \tag{4}$$

$$p_j(t+1)=\sum_{i=1}^{n} w_{ij}p_i(t),\ j=1,2,\cdots,n,\ t=0,1,2,\cdots \tag{5}$$

记行向量 $v(t)=(v_1(t),\ v_2(t),\ \cdots,\ v_n(t))$，$p(t)=(p_1(t)\ p_2(t),\ \cdots,p_n(t))$，则(4)、(5)可表为

$$v(t+1)=v(t)+p(t+1) \tag{6}$$

$$p(t+1)=p(t)W,\quad t=0,1,2\ \cdots \tag{7}$$

如果只考虑系统在初始状态基础上的变化，不妨设

$$v(0)=p(0) \tag{8}$$

于是当系统在初始时段的冲量 $p(0)$给定后，就可以用(6)~(8)计

---

*）这里假设系统是封闭的，即不考虑系统与外界环境的相互影响，称为自治(Autonomous)冲量过程.

算系统在任意时段 t 的冲量 $p(t)$ 和值 $v(t)$，即对系统的演变作出预测.

对于能源利用系统用(2)式给出的 A 作为 W，并设初始时段能源利用量 v_1 有一个突然增加，即 $p(0)=(1,0,0,0,0,0,0)$，按照(6)~(8)得到的 $p(t)$、$v(t)$ 如表 10－1 所示.

表 10－1　能源利用系统的 $p(t)$ 和 $v(t)$

t	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	−1	1	−1	0	0	0	1	−1	1	−1	0	0	0
2	1	−1	0	0	1	0	−1	2	−2	1	−1	1	0	−1
3	1	−1	1	−1	0	1	0	3	−3	2	−2	1	1	−1
⋮	……							……						

这些结果可以直接从图 10－13 得到解释. 譬如因为 v_1v_4 为－，所以 $p_4(1)=-1$；因为没有从 v_1 经两条边到 v_4 的路径，所以 $p_4(2)=0$；因为从 v_1 有经过 3 条符号均为－的边到 v_4 的路径 $(v_1\rightarrow v_2\rightarrow v_1\rightarrow v_4)$，所以 $p_4(3)=-1$. 顺便指出，如果 a_{ij} 中的 ±1 没有定量含义的话，那么表中的具体数字也没有数量意义，只能表示正反面的影响所及.

这种由某些因素在初始时段的变化(冲量)引起的系统的演变过程称为**冲量过程**. 当初始冲量 $p(0)$ 中只有一个分量是 1，其余为 0 时，称为**简单冲量过程**. 显然，冲量过程可以分解为若干简单冲量过程的叠加. 以下只讨论简单冲量过程，记作 S.

简单冲量过程的稳定性　如果系统的任一因素在 $t=0$ 的变化，引起的系统各因素在任意时段的冲量和值都不会无限增长(或减少)，那么这个系统的冲量过程 S 是稳定的. 我们要得到判断 S 是否稳定的条件，并且当 S 不稳定时希望找到一种途径，通过改变某些因素之间可以控制的制约关系，把不稳定过程变为稳定.

对于所有的 i 和任意的 t，若 $|p_i(t)|$ 有界，称 S 是**冲量稳定**

的 (Pulse Stable)，若 $|v_i(t)|$ 有界，称 S 是**值稳定**的 (Value Stable)．由 (4) 式可知，若 S 是值稳定的，必是冲量稳定的，反之不然．

因为 $p(t)$，$v(t)$ 由一阶差分方程 (6)，(7) 确定，所以粗略地看，它们是否有界取决于 W 的特征根的模小于 1 还是大于 1．更精确的判断由下面的定理给出 *)．设 λ 是 W 的非零特征根．

定理 1　S 冲量稳定的必要条件是 $|\lambda|\leqslant 1$．

特别，当 w_{ij} 只取整数值如 ± 1，0 时，条件化为 $|\lambda|=1$．必要条件不满足时必存在某个简单冲量过程，其冲量不稳定．

定理 2　S 冲量稳定的充分条件是 $|\lambda|\leqslant 1$ 且均为单根．

定理 3　S 值稳定的充要条件是 S 冲量稳定且 $\lambda\neq 1$．

用上述定理检查用带符号的有向图 (图 10－13) 表示的能源利用系统．由 (2) 式给出的 A 的特征多项式为

$$f(\lambda)=\lambda^2(\lambda^5-\lambda^3-\lambda^2-1)$$

因为 $f(1)=-2$，$f(2)=76$，所以 $f(\lambda)$ 在 $(1,2)$ 内有根，据定理 1，必有某个简单冲量过程的冲量不稳定．

为了把不稳定的过程变为稳定，必须改变 W (或 A) 的某些元素，使特征根满足定理 2，3 的要求，但是矩阵元素与特征根之间的关系是复杂的．在如何改变系统的邻接矩阵的结构使其冲量过程稳定方面，目前尚没有一般的结论．下面介绍的方法适用于一类用特殊的有向图描述的系统．

如果一个带符号的有向图是双向连通的 (参看 10.3 节)，并且存在一个位于所有闭路上的中心顶点，那么称它是**改进的玫瑰形图** (Advanced Rosette)．所谓闭路是指从某顶点出发，沿有向边前进回到该顶点，且途中不经过重复顶点的路径．不难看出，图 10－13 满足这个要求，v_1 是中心顶点，由 v_1v_3，v_3v_5，v_5v_1 构

*) 定理中 S 指所有的简单冲量过程，即 $p(0)$ 中的元素 1 可以是任何一个分量．定理证明见 [28]．

成的闭路记作 $v_1v_3v_5v_1$. 构成闭路的有向边的数目称为闭路的**长度**; 当闭路包含奇数个带 - 号的有向边时, 定义闭路的符号为 -1, 否则为 $+1$; 用 a_k 记长度为 k 的闭路的**符号和**(当没有长度为 k 的闭路时令 $a_k=0$), 设 r 是使 $a_r\neq 0$ 的最大整数. 这样, 对于每个用改进的玫瑰形图描述的冲量过程(记作 S^*), 存在一个序列 $\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$, S^* 的稳定性完全由这个序列决定. 我们不加证明地引述下面的结论.

首先, 若对于所有的 $k=1, 2, \cdots$ 都有 $a_k=0$(即 $r=0$), 则 S^* 是冲量稳定和值稳定的. 以下设 $r>0$.

定理 4 S^* 冲量稳定的必要条件是

$$a_r=\pm 1 \tag{9}$$

$$a_k=-a_r \cdot a_{r-k},\ k=1, 2, \cdots, r-1 \tag{10}$$

定理 5 若S^* 冲量稳定, 则 S^* 值稳定的充要条件是

$$\sum_{k=1}^{r} a_k \neq 1 \tag{11}$$

定理 4 和 5 可以用来指导我们改变邻接矩阵 A 的某些元素 a_{ij}, 以便把不稳定的冲量过程变为稳定. 对于图 10 - 13 所示的能源利用系统, 为了找出导致不稳定的原因, 先检查定理 4 中哪些必要条件不成立.

由图 10 - 13 可知, 没有长度为 1 的闭路, $a_1=0$; 有 1 条长度为 2 的闭路 $v_1v_2v_1$, 两条有向边均为 - 号, $a_2=1$; 有 3 条长度为 3 的闭路: $v_1v_3v_2v_1$ 的符号是 $+1$, $v_1v_3v_5v_1$ 是 $+1$, 而 $v_1v_4v_7v_1$ 是 -1, 所以 $a_3=1+1-1=1$; 没有长度为 4 的闭路, $a_4=0$; 有 1 条长度为 5 的闭路 $v_1v_3v_5v_6v_7v_1$, 符号是$+1$, $a_5=1$; 对于 $k>5$, $a_k=0$, 于是 $r=5$. 这样我们得到序列 $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}=\{0, 1, 1, 0, 1\}$.

用定理 4 的 (9)、(10)两式检查上述结果发现, $a_2=-a_5a_3$ 和 $a_3=-a_5a_2$ 不成立. 由此可见, 为了满足冲量稳定的必要条件, 需要将 a_2, a_3, a_5 中的一个由 1 变为 -1. 由图 10 - 13 知道, 将

v_1v_2的符号由+改成−可以达到上述目的(a_2由1变为−1，而a_3、a_5不变)．这个改动的实际含义是，将原来的"能源利用量增加引起价格下降"，变为"能源利用量增加导致价格上升"，即从鼓励能源的利用变为限制利用，这种价格政策的变动属于人们可以控制的范围.

当v_1v_2的符号改为−号后，邻接矩阵A的特征多项式变为

$$f(\lambda)=\lambda^2(\lambda^5+\lambda^3-\lambda^2-1)=\lambda^2(\lambda-1)(\lambda^2+1)(\lambda^2+\lambda+1)$$

特征根是$\lambda=0,0,1,\pm i,\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{3}\,i\right)$．由定理2知冲量稳定，即能源利用系统在任何一个因素突然变化的影响下，各因素在后继时段的改变量都是有界的.

如果进一步检查值稳定的充要条件(11)式，就会发现$\sum_{k=1}^{5}a_k=0-1+1+0+1=1$．为了在不破坏(9)、(10)的基础上又使(11)式成立，必须使$a_3=a_5=-1$．这要求将长度为3的一条闭路和长度为5的闭路的公共有向边改变符号．我们由图10－13看到，只能是把v_3v_5由+改为−．其实际含义是，将原来的"能源生产率增加导致工业产值增长"，改为"能源生产率增加导致工业产值减少"．这似乎违反客观规律，不是人们能够控制的．实际上，对于能源利用系统要求值稳定不一定是合适的，在某个因素，如能源利用量增加的刺激下，按照客观规律,有些因素，如能源生产率、工业产值、就业机会等应该是越来越大的.

当然，还有其他的把原来不稳定的能源利用系统的冲量过程变为冲量稳定和值稳定的办法(习题11).

评注　本节以能源利用系统的预测及其稳定性为题，介绍了一种用带符号(及加权)的有向图和冲量过程建立模型的方法．它是定性和定量相结合的系统分析方法，适合于社会经济领域复杂大系统的宏观研究．解决问题的关键是确定研究的对象和范围，

即系统的边界，以及各因素间的相互关系．在这个过程中合理的简化是必不可少的，有时还要划分为若干子系统，建立子模型，用分解、协调和综合的方法处理．

从本节和前面几节可以看到，用邻接矩阵及关联矩阵表示图的结构，使得代数方法尤其是矩阵特征值理论成为进行定量分析的有力工具，这为用图的方法建模，解决实际问题开辟了新的领域．

习　题

1．在10.1节叙述了复盖与关联矩阵的关系并给出了由关联矩阵找最小复盖的方法．类似地，叙述控制集与邻接矩阵的关系并给出由邻接矩阵找最小控制集的方法．

2．在饭馆点菜，首先要求包含我们需要的营养成分．设菜单及包含的营养成分如下表（用1和0分别表示包含和不包含这种成分）．你如何点菜呢？如果给这些菜标上价钱，你想在保证营养条件下最省钱，又如何点菜？

菜单＼营养成分	蛋白质	醣	维生素	矿物质
菜肉蛋卷	1	0	1	1
炒猪肝	0	1	0	0
沙　拉	0	0	1	0
红烧排骨	1	0	0	0
咖喱土豆	0	1	0	0
清汤全鸡	1	0	0	1

3．证明：若S是图$G=(V,E)$的独立集，则S对V的补集$\overline{S}$是G的复盖；反之亦真．

4．利用逻辑代数运算规则将10.2节的（1）式化简成（2）式．

5．利用求极小复盖的逻辑算法，求图10－1的全部极小复盖．

6．试由独立集定义最大独立集．最大独立集中顶点的数目称独立数，记作β．证明：对于n个顶点的图，$\alpha+\beta=n$，其中α是复盖数（见10.1节）．

7．图10－15是几个国家的地图，试用最少的颜色为地图染色，使邻国能够明显地区别开．

8. 图 10－16 是 5 位网球选手循环赛的结果. 作为竞赛图, 它是双向连通的吗? 找出几条完全路径, 用适当方法排出 5 位选手的名次.

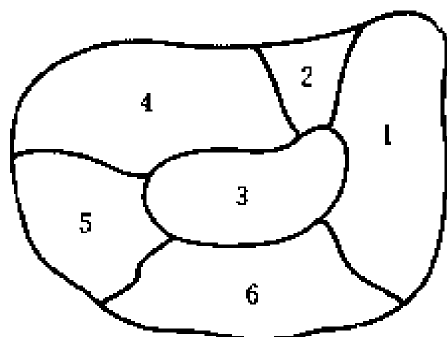


图 10－15

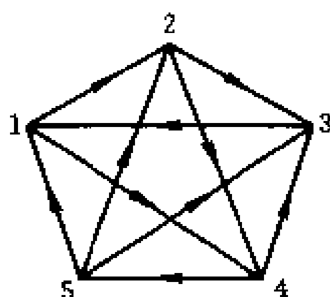


图10－16

9. 排名次的另一方法是考察"失分向量"以代替得分向量(选手输掉场次的数目为他的失分). 按失分由小到大排列名次.

① 证明: 这相当于把竞赛图中各有向边反向后, 按得分向量排列名次, 再把名次倒过来.

② 用失分向量方法对图 10－5(4)的竞赛图排列名次. 结果与用得分向量方法一致吗?

10. 在 10.4 节的交通流相容图(图 10－8)中, 打开 ef 边得到区间图 H'. 讨论如何求得相应于 H' 的最佳调节方案.

11. 利用 10.5 节的定理 4.5 说明, 为了把原来不稳定的能源利用系统(图 10－13)变为冲量和值稳定的, 如果限制只能改变两条有向边的符号, 那么只有 3 种可行方案: 改变 v_1v_2 和 v_3v_5(如 10.5 节所述); 改变 v_2v_1 和 v_5v_6; 改变 v_2v_1 和 v_6v_7.

12. 考察由野兔 R 和狐狸 F 组成的生态系统. 在野兔的食物资源充足的情况下, 其带符号的有向图如图 10－17 所示.

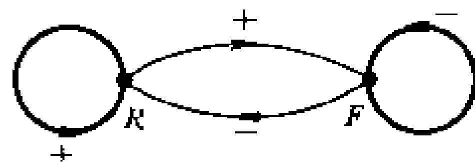


图 10－17

① 解释图中 +、− 号的意义.

② 若初始时段野兔有一增量, 且设 $v(0)=(10,10)$, 计算 $v(1)$, $v(2)$.

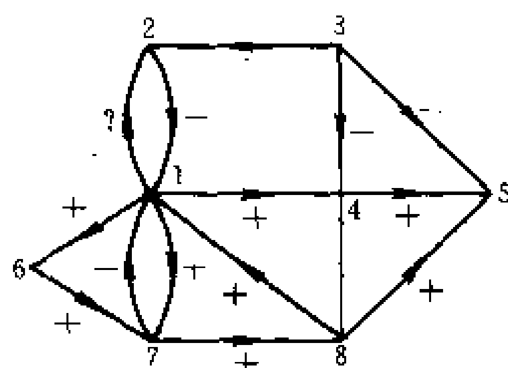
③ 证明该系统对所有简单冲量过程都是冲量和值稳定的, 从生态意义上进行解释.

④ 说明若用权描述二者的相互作用, 则在某种加权的情况下系统不再稳定, 并从生态意义上进行解释.

13. 食肉动物 C、食草动物 H 和草 P 组成生态系统(因为草地有限, 草

过密会使草的生长减慢). 用带符号的有向图建立这个系统的冲量过程模型,并证明冲量过程是不稳定的.

14. 公共汽车系统用带符号的有向图表示,如图 10－18,其中只有单位距离票价随乘客行程增加应该提高还是降低尚未确定(图中有向边 1 → 2的符号标为? 号). 讨论这个符号应为+ 还是－才能使冲量过程稳定.



1－ 乘客的行程; 2－ 单位距离票价; 3－ 节油量; 4－ 燃料消耗; 5－ 污染; 6－ 事故; 7－ 晚点; 8－ 居民人数

图 10－18

第11章　逻辑方法建模

从抽象的定义、公理出发，经过严密的逻辑推理得到一系列的公式、定理，是数学发展进程的重要环节. 这一研究方法也可以应用于建模过程中. 把对象的基本属性抽象成定义、公理，运用逻辑推理方法，或者会得到满足这些公理的结果，从而提供解决问题的正面答案；或者能证明不存在原来意义下的解，需要反过来审查对象的属性及所作的抽象定义，并可能导致对问题及其解决途径的重新认识.

逻辑方法可以建立连续的、离散的、确定的、随机的等各种类型的模型，因为下面的研究对象主要是离散的和确定性的，所以把它们归入本篇.

11.1　效益的合理分配

在经济或社会活动中若干实体(如个人、公司、党派、国家等)相互合作结成联盟或集团，常能比他们单独行动获得更多的经济或社会效益. 确定合理地分配这些效益的方案是促成合作的前提. 先看一个简单例子.

甲乙丙三人经商. 若单干，每人仅能获利 1 元；甲乙合作可获利 7 元；甲丙合作可获利 5 元；乙丙合作可获利 4 元；三人合作则可获利 10 元. 问三人合作时怎样合理地分配 10 元的收入.

人们自然会想到的一种分配方法是：设甲乙丙三人各得 x_1、x_2、x_3 元，满足

$$x_1+x_2+x_3=10 \tag{1}$$

$$x_1,x_2,x_3\geqslant 1,\quad x_1+x_2\geqslant 7,\ x_1+x_3\geqslant 5,\ x_2+x_3\geqslant 4 \tag{2}$$

(2)式表示这种分配必须不小于单干或二人合作时的收入．但是容易看出(1)、(2)有许多组解，如$(x_1, x_2, x_3)=(5,3,2)$，$(4,3,3)$，$(4,3.5,2.5)$等．另外，如果将(2)式中的7,5,4换一组数据如8,6,7，则不存在满足(1)、(2)的解．所以这不是一种圆满的分配方法．

上例提出的这类问题称为 n 人合作对策(Cooperative n-person game)．Shapley L. S. 1953年给出了解决该问题的一种方法，称 **Shapley 值**[37,38]．

***n* 人合作对策和 Shapley 值**　n 个人从事某项经济活动，对于他们之中若干人组合的每一种合作(特别，单人也视为一种合作)，都会得到一定的效益．当人们之间的利益是非对抗性时，合作中人数的增加不会引起效益的减少．这样，全体 n 个人的合作将带来最大效益．n 个人的集合及各种合作的效益就构成 n 人合作对策，Shapley 值是分配这个最大效益的一种方案．正式的定义如下．

设集合 $I=\{1,2,\cdots,n\}$，如果对于 I 的任一子集 s 都对应着一个实值函数 $v(s)$，满足

$$v(\varnothing)=0 \tag{3}$$

$$v(s_1 \cup s_2) \geqslant v(s_1)+v(s_2), \quad s_1 \cap s_2=\varnothing \tag{4}$$

称 $[I, v]$ 为 n 人合作对策，v 为对策的**特征函数**．

在上面所述经济活动中，I 定义为 n 人集合，s 为 n 人集合中的任一种合作，$v(s)$ 为合作 s 的效益．

用 x_i 表示 I 的成员 i 从合作的最大效益 $v(I)$ 中应得到的一份收入．$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 叫做合作对策的**分配**(Imputation)，满足

$$\sum_{i=1}^{n} x_i=v(I) \tag{5}$$

$$x_i \geqslant v(i), \quad i=1,2,\cdots,n \tag{6}$$

请读者解释(6)式的含义．显然，由(3)、(4)定义的 n 人合作对

策 $[I, v]$ 通常有无穷多个分配.

Shapley 值由特征函数 v 确定，记作 $\Phi(v)=(\varphi_1(v), \varphi_2(v), \cdots, \varphi_n(v))$，是一种特定的分配，即 $\varphi_i(v)=x_i$. Shapley 首先提出看来毫无疑义的几条公理，然后用逻辑推理的方法证明，存在唯一的满足这些公理的分配 $\Phi(v)$，并把它构造出来. 这里先给出 $\Phi(v)$的结果，Shapley 公理放在本节最后.

Shapley 值 $\Phi(v)=(\varphi_1(v), \varphi_2(v), \cdots, \varphi_n(v))$为

$$\varphi_i(v)=\sum_{s\in S_i} w(|s|)[v(s)-v(s\setminus i)], \quad i=1, 2, \cdots, n \quad (7)$$

$$w(|s|)=\frac{(n-|s|)!(|s|-1)!}{n!} \quad (8)$$

其中 s_i 是 I 中包含 i 的所有子集，$|s|$是子集 s 中的元素数目(人数)，$w(|s|)$是加权因子.

我们用这组公式计算本节开始给出的三人经商问题的分配，以此解释公式的用法和意义.

甲乙丙三人记为 $I=(1, 2, 3)$，经商获利定义为 I 上的特征函数，即 $v(\varnothing)=0$，$v(1)=v(2)=v(3)=1$，$v(1\cup 2)=7$，$v(1\cup 3)=5$，$v(2\cup 3)=4$，$v(I)=10$. 容易验证 v 满足(3)、(4). 为计算 $\varphi_1(v)$首先找出 I 中包含1的所有子集 s_1：$1, 1\cup 2, 1\cup 3, I$，然后令 s 跑遍 s_1，将计算结果记入表 11－1. 最后将表中末行相加得 $\varphi_1(v)=4$(元). 同法可计算出 $\varphi_2(v)=3.5$(元)，$\varphi_3(v)=2.5$(元). 这就是按照 Shapley 值方法计算的甲乙丙三人应得的分配.

让我们通过此例对(7)式作些解释. 对表 11－1 中的 s，譬如 $1\cup 2$，$v(s)$是有甲(即 1)参加时合作 s 的获利，$v(s\setminus 1)$是无甲参加时合作 s (只剩下乙)的获利，所以 $v(s)-v(s\setminus 1)$可视为甲对这一合作的"贡献". 用 Shapley 值计算的甲的分配 $\varphi_1(v)$是，甲对他所参加的所有合作(s_1)的贡献的加权平均值，加权因子

$w(|s|)$取决于这个合作 s 的人数. 通俗地说就是按照贡献取得报酬.

表 11-1 三人经商中甲的分配 $\varphi_1(v)$ 的计算

s	1	$1\cup 2$	$1\cup 3$	I
$v(s)$	1	7	5	10
$v(s\setminus 1)$	0	1	1	4
$v(s)-v(s\setminus 1)$	1	6	4	6
$\|s\|$	1	2	2	3
$w(\|s\|)$	1/3	1/6	1/6	1/3
$w(\|s\|)[v(s)-v(s\setminus 1)]$	1/3	1	2/3	2

下面考察一个实际问题.

污水处理费用的合理分担 沿河有三城镇 1，2 和 3，地理位置如图 11-1 所示. 污水需处理后才能排入河中. 三城镇既可以单独建立污水处理厂，也可以联合建厂，用管道将污水集中处理(污水应由河流的上游城镇向下游城镇输送). 用 Q 表示污水量(吨/秒)，L 表示管道长度(千米)，按照经验公式，建立处理厂的费用为 $P_1=73Q^{0.712}$(千元)，铺设管道费用为 $P_2=0.66Q^{0.51}L$(千元). 已知三城镇污水量为 $Q_1=5$，$Q_2=3$，$Q_3=5$，L 的数值如图 11-1 所示. 试从节约总投资的角度为三城镇制定污水处理方案. 如果联合建厂，各城镇如何分担费用[22].

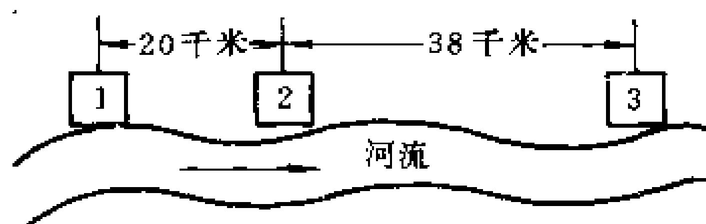


图 11-1 三城镇地理位置示意图

三城镇污水处理共有以下 5 种方案，计算出投资费用以作比较.

1)分别建厂. 投资分别为

$$C(1)=73\cdot 5^{0.712}=230,\quad C(2)=160,\quad C(3)=230$$

总投资 $D_1=C(1)+C(2)+C(3)=620$.

2）1，2合作，在城2建厂．投资为

$$C(1,2)=73\cdot(5+3)^{0.712}+0.66\cdot 5^{0.51}\cdot 20=350$$

总投资 $D_2=C(1,2)+C(3)=580$.

3）2，3合作，在城3建厂．投资为

$$C(2,3)=73\cdot(3+5)^{0.712}+0.66\cdot 3^{0.51}\cdot 38=365$$

总投资 $D_3=C(1)+C(2,3)=595$，

4）1，3合作，在城3建厂．投资为

$$C(1,3)=73\cdot(5+5)^{0.712}+0.66\cdot 5^{0.51}\cdot 58=463$$

这个费用超过了1，3分别建厂的费用 $C(1)+C(3)=460$. 合作没有效益，不可能实现.

5）三城合作，在城3建厂．总投资为

$$D_5=C(1,2,3)=73\cdot(5+3+5)^{0.712}+0.66\cdot 5^{0.51}\cdot 20$$
$$+0.66(5+3)^{0.51}\cdot 38=556.$$

比较结果以 $D_5=556$（千元）最小，所以应选择联合建厂方案．下面的问题是如何分担费用 D_5.

总费用 D_5 中有3部分：联合建厂费 $d_1=73\cdot(5+3+5)^{0.712}=453$；城1至2的管道费 $d_2=0.66\cdot 5^{0.51}\cdot 20=30$；城2至3的管道费 $d_3=0.66(5+3)^{0.51}\cdot 38=73$. 城3提出，$d_1$ 由三城按污水量比例5∶3∶5分担，d_2、d_3 是为城1，2铺设的管道费，应由他们担负；城2同意，并提出 d_3 由城1，2按污水量之比5∶3分担，d_2 则应由城1自己担负；城1提不出反对意见，但他们计算了一下按上述办法各城应分担的费用：

城3分担费用为 $d_1\cdot\dfrac{5}{13}=174$，

城2分担费用为 $d_1\cdot\dfrac{3}{13}+d_3\dfrac{3}{8}=132$，

城1分担费用为 $d_1\cdot\dfrac{5}{13}+d_3\dfrac{5}{8}+d_2=250$.

结果表明城2，3分担的费用均比他们单独建厂费用 $C(2)$，$C(3)$

小，而城 1 分担的费用却比 $C(1)$ 大．显然，城 1 不能同意这种分担总费用的办法．

为了促成三城联合建厂以节约总投资，应该寻求合理分担总费用的方案．三城的合作节约了投资，产生了效益．是一个 n 人合作对策问题，可以用 Shapley 值方法圆满地分配这个效益．

把分担费用转化为分配效益，就不会出现城 1 联合建厂分担的费用反比单独建厂费用高的情况．将三城镇记为 $I=(1,2,3)$，联合建厂比单独建厂节约的投资定义为特征函数．于是有

$$v(\varnothing)=0,\quad v(1)=v(2)=v(3)=0,$$

$$v(1\cup 2)=C(1)+C(2)-C(1,2)=230+160-350=40,$$

$$v(2\cup 3)=C(2)+C(3)-C(2,3)=160+230-365=25$$

$$v(1\cup 3)=0$$

$$v(I)=C(1)+C(2)+C(3)-C(1,2,3)$$

$$=230+160+230-556=64$$

容易看出 v 满足特征函数的条件(3)、(4)，三城联合建厂的效益为 64（千元）．用 Shapley 值方法计算这个效益的分配，城 1 应分得的份额 $\varphi_1(v)$ 的计算结果列入表 11－2，得到 $\varphi_1(v)=6.7+13=19.7$（千元）．类似地算出 $\varphi_2(v)=32.1$，$\varphi_3(v)=12.2$．可以验证：$\varphi_1(v)+\varphi_2(v)+\varphi_3(v)=64=v(I)$．看来，城 2 从总效益 64（千元）中分配的份额最大，你能从城 2 的地理位置与合作对策的角度解释这个结果吗．

表 11－2　污水处理问题中 $\varphi_1(v)$ 的计算

s	1	$1\cup 2$	$1\cup 3$	I
$v(s)$	0	40	0	64
$v(s\setminus 1)$	0	0	0	25
$v(s)-v(s\setminus 1)$	0	40	0	39
$\lvert s\rvert$	1	2	2	3
$w(\lvert s\rvert)$	1/3	1/6	1/6	1/3
$w(\lvert s\rvert)[v(s)-v(s\setminus 1)]$	0	6.7	0	13

最后，在联合建厂方案总投资额556(千元)中各城的分担费用为：城1是 $C(1)-\varphi_1(v)=230-19.7=210.4$；城2是 $C(2)-\varphi_2(v)=127.9$；城3是 $C(3)-\varphi_3(v)=217.8$.

现将前面用到的方法的数学基础— Shapley公理叙述如下：

Shapley 公理 设 v 是定义在 $I=(1,2,\cdots,n)$ 上的特征函数，Shapley提出，由 v 决定的一个分配 $\Phi(v)=(\varphi_1(v),\varphi_2(v),\cdots,\varphi_n(v))$ 应满足以下公理 *).

1) **对称性** 设 π 是 $I=(1,2,\cdots,n)$ 的一个排列，即 I 到它自身的一一对应，如 πi 是 i 的对应，πs 是 s 的对应 $(s\subset I)$. 若记 $v(\pi s)=u(s)$，则对于 $i=1,2,\cdots,n$ 有 $\varphi_{\pi i}(v)=\varphi_i(u)$. 该公理表示，每人的分配与他被赋予的记号 i 无关.

2) **有效性** 如果对于所有包含 i 的子集 s 都有 $v(s\setminus i)=v(s)$，则 $\varphi_i(v)=0$，且 $\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(v)=v(I)$. 该公理表示，若成员 i 对于每一个他参加的合作都没有贡献，那么他不应从全体合作的效益中获得报酬，另外，各成员分配之和应等于全体合作的效益.

3) **可加性** 对于定义在 I 上的任意两个特征函数 v 和 u，$\Phi(v+u)=\Phi(v)+\Phi(u)$，这个公理说明，当 n 人同时进行两项合作时，每人的分配是两项合作的分配之和.

可以认为把这三条公理作为分配合作效益的准则是合理的. Shapley严格证明了由(7)、(8)定义的 $\Phi(v)$ 是满足这些公理的唯一的分配.

顺便指出，作为一种分配，$\Phi(v)$ 应满足(6)式，即各成员从合作效益中的分配不应小于他单干时的收入，有 $\varphi_i(v)\geqslant v(i)$，$i=1,2,\cdots,n$. 这个关系没有被列入公理. 但是可以验证，由上述公理及特征函数的性质，(7)、(8)所定义的 $\Phi(v)$ 是满足该关

*) 这组公理与Shapley最初的提法稍有不同，见[5] .

系的(习题1).

评注 n 人合作对策和Shapley值方法不仅可以解决经济活动中效益的分配问题，而且能够用来估量各个团体或派别在某种社会活动中的权重. 试看这样的例子：某理事会由三个派别分别占有的4、3、2个席位组成，表决提案时需有超过半数的赞成票方可通过. 每个派别成员同时投赞成票或反对票. 估量各派别在提案表决中的权重(即影响力).

可以看出，任何一派别都不能操纵表决，而当至少有两派赞成时提案就能通过. 将三派定义为集合 $I=\{1,2,3\}$，当各派结成联盟(包括一派单干)可使提案通过时定义这个联盟的特征函数为1，否则为0. 即 $v(\varnothing)=0$，$v(1)=v(2)=v(3)=0$，$v(1\cup 2)=v(1\cup 3)=v(2\cup 3)=v(I)=1$. 如此构成一合作对策. 用Shapley值方法算出的这个合作对策的分配 $\varphi(v)$，即为各派在提案表决中的权重. 容易得到 $\varphi_1(v)=\varphi_2(v)=\varphi_3(v)=1/3$，即三派对提案表决的影响力相同，虽然他们占有的席位不同. 这方面的练习和应用见习题3～5.

11.2 存在公正的选举规则吗

你参加过评选优秀运动员、优秀电影、优秀小说这一类活动吗？你知道组织者们是如何根据千万人对评选对象的投票情况决定评选结果的吗？你考虑过怎样决定评选结果才是公正的吗？当然这又引出了新的问题：公正的标准是什么？在普遍赞同的一组标准下是否存在所谓公正的评选结果？

这种根据若干人对某些对象的决策结果，综合出这个群体的决策结果的过程称为**群体决策**(Group Decisionmaking). 西方国家的一些机构和学者习惯用民意测验的方式，调查国民对社会福利、内外政策以及总统、内阁等官员的态度，然后希望用群体决策方法归纳出全体国民的倾向. 事实上，在社会经济领域内许

多问题都可以归结为群体决策. 有相当多的产品的质量无法用仪器设备精确测量, 而要靠专家们作出带有一定主观成分的评定. 像在啤酒质量评定会上, 由若干专家对各种啤酒进行品尝, 每人对这些啤酒按优劣排序. 最后由会议综合专家们给出的排序, 确定一个统一的排序结果.

为了叙述方便起见, 我们把根据每个人对评选对象所作的排序来确定这个群体对评选对象排序的决策过程, 描述为一次选举, 有若干选民和若干候选人, 每个选民的一次投票是他按照自己的标准对各候选人优劣顺序的一次排序, 而选举规则要根据所有选民的排序确定选举结果(也是对各候选人的一个排序). 本节首先给出这种排序的一般性质,讨论简单的选举规则并指出它们的缺点,然后论证在一定意义上所谓公正的选举规则是不存在的,最后介绍一个特殊情况下的选举规则以及其他确定规则的方法[37,46].

简单的选举规则 用 $I=(1,2,\cdots,n)$表示选民集合, 由 m 个字母构成的 $A=(x,y,z,u,v,\cdots)$表示候选人集合. 选举要求每个选民 $i\in I$ 对全体候选人 A 作一排序, 记作p_i. 所谓选举规则是根据 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$确定群体对 A 的排序, 记作 p,这种由$(p_1,p_2,\cdots,p_n)$到 p 的对应关系在群体决策中称为**群体一致函数**(Group Consensus Function).*)

作为对集合 A 的任何一个排序p_i和p, 必须具备以下两个性质, 也可以称为公理:

1. 对于任意的 $x,y\in A$, 下面三种关系必有且仅有一种成立: **x 优于 y**, 记 $x>y$ **); **x 等同 y**, 记 $x\sim y$; **x 劣于 y**, 记 $x<y$. 用$\geqslant$ 记优于或等同, $\leqslant$ 记劣于或等同.

2. 对于 $x,y,z\in A$, 若 $x\geqslant y$, $y\geqslant z$, 则 $x\geqslant z$; 且仅当前两式等同号成立时,后一式的等同号才成立. 这是排序的**可传递性**.

---

*) 西方国家用它来衡量人民对社会福利状况优劣的评价, 称为社会福利函数(Social walfare function).

**) 本节中"<", "≤", ">", "≥"及"~"均是排序符号.

在现实生活中人们常用的简单的选举规则有以下两种:

1) **简单多数规则** 当且仅当超过半数的选民投票 $x>y$ 时，选举结果为 $x>y$（$\sim$和 $<$ 的关系类似).

以下用 $(x>y)_i$ 表示在排序 p_i 中 x 优于 y；如不特别指明，用 $x>y$ 表示在排序 p 中 x 优于 y. 简单多数规则规定，当且仅当使含 $(x>y)_i$ 的排序 p_i 的数目超过 $n/2$ 时，$x>y$ 成立. 试看如下的一次选举：$I=(1,2,3)$，$A=(x,y,u,v)$，投票结果为

$$\begin{aligned} &p_1: x>y>u\sim v \\ &p_2: y>x>u>v \\ &p_3: x\sim u>v>y \end{aligned} \tag{1}$$

按照简单多数规则选举结果应为

$$p: x>y>u>v \tag{2}$$

这个规则用起来十分方便，但是有时用它确定的结果 p 违反排序的可传递性，如考察

$$\begin{aligned} &p_1: x>y>z \\ &p_2: y>z>x \\ &p_3: z>x>y \end{aligned} \tag{3}$$

则得到的 p 中应有 $x>y$、$y>z$，$z>x$，于是无法确定选举结果.

2) **记分规则** 设 $B_i(x)$ 为排序 p_i 中劣于 x 的候选人的数目，定义

$$B(x)=\sum_{i=1}^{n} B_i(x) \tag{4}$$

为 x 在选举中所得的**分数**，称为 **Borda 数**. 记分规则规定，当且仅当 $B(x)>B(y)$ 时，$x>y$ 成立（$\sim$和 $<$ 的关系类似).

在 (1) 式给出的投票结果中 $B_1(x)=3$，$B_2(x)=2$，$B_3(x)=2$，$B(x)=3+2+2=7$；同样可得 $B(y)=5$，$B(u)=3$，$B(v)=1$. 于是按记分规则得到的选举结果与用简单多数规则得到的 (2) 式一致. 而对于 (3) 式表示的选举，因为 $B(x)=B(y)=B(z)=3$，所以按记分规则得到的结果为 $p: x\sim y\sim z$.

但是由于在投票时要求选民只考虑候选人的优劣顺序，不管其优劣程度，而记分规则却又显然以优劣程度为依据，并且用同一尺度——分数来衡量一个选民对不同候选人的排序（p_i 内部），及不同选民对候选人的排序（p_i 之间）的优劣程度．这样，选举的组织者根据 p_i 确定 p 的规则，与他当初对选民投票的要求是不一致的，因而这种规则是不尽合理的，试看下例：$I=(1,2,3,4)$，$A=(x,y,z,u,v)$，投票情况为

$$
\begin{aligned}
p_1, p_2, p_3 &: x>y>z>u>v \\
p_4 &: y>z>u>v>x
\end{aligned}
\tag{5}
$$

算出 $B(x)=12$，$B(y)=13$，按记分规则得到的结果应 $y>x$．但在（5）中有三位选民认为 $x>y$，只有一位认为 $y>x$，因为他把 y 和 x 分别排在首和末，致使选举结果服从了他个人的意愿，这是不能为多数人接受的．

上面两种简单的选举规则在多数情况下可以得到合理的、相同的结果，但在有些情况下则不然．有没有适合一般情况的、公正合理的选举规则呢？这首先涉及所谓公正合理的标准．从数学建模的角度看，应该先订下几条普遍认可的公理，然后用逻辑推理方法寻求满足这些公理的规则（如果这种规则存在的话）．Arrow K. 作了这样的工作(1951 年)，他给出了一组公理，但是却证明了一个反面的结果：不存在满足这组公理的选举规则．他的这种建模方法及所得到的结果对我们是有启发的，下面作简要介绍．

Arrow 公理与 Arrow定理　Arrow 提出了 5 条公理[*)]：

公理 1（选举的完全性）

选民对候选人的任何一种排序都是允许的．

公理 2（选举规则与选民投票的正相关）

若对于某次投票 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，选举规则确定的 p 中包

*）这里基本上采用了 [5] 的叙述，与 Arrow 原来的提法稍有出入．

括 $x>y$，而在另一次投票 $p_i'(i=1,2,\cdots,n)$ 中 x 的顺序或者与 p_i 相同，或者提前，而其他候选人的顺序不变．那么在选举规则确定的 p' 中也应包括 $x>y$．

这个公理表明若所有选民对候选人 x 的排序没有向后移动，则选举结果中 x 对其他候选人的优先性不应改变．

公理 3 （无关候选人的独立性）

设 A_1 是候选人集合 A 的子集．若在两次投票结果 p_i 和 p_i' $(i=1,2,\cdots,n)$ 中 A_1 内各候选人的排序相同，那么选举规则确定的 p 和 p' 中 A_1 内各候选人的排序也应相同．

该公理表明，尽管 A_1 以外的候选人在 p_i 和 p_i' 中的排序可以变化，但这不能影响 A_1 内各候选人在选举结果中的排序．

公理 4 （选民的主权性）

对于任意一对候选人 $x,y\in A$，存在一次投票 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，使得选举规则能由 p_i 确定 $x>y$．

如果这条公理不成立，那就是说，无论选民怎样投票，即使所有 p_i 中都有 $(x>y)_i$，选举规则也不能确定 $x>y$，这样的规则不尊重全体选民的一致愿望．

公理 5 （选民的非独裁性）

不存在这样的选民 i，使得对于任意一对候选人 x，y，只要 p_i 中有 $(x>y)_i$，选举规则就确定 $x>y$．

因为这样的选民 i 事实上垄断了选举结果，所以该公理表明不允许这种独裁者存在．

是否存在满足以上 5 条公理的选举规则呢？ 这与候选人数目 m 和选民人数 n 有关．

当 $m=1$ 或 $n=1$ 时选举无意义，不予讨论．

当 $m=2$，$n\geqslant 2$ 时简单多数规则就满足上述 Arrow 公理，请读者验证（习题 6）．

当 $m\geqslant 3$，$n\geqslant 2$ 时则有

定理 当至少有 3 位候选人和 2 位选民时，不存在满足 Arrow

公理的选举规则.

[证明] 下面的过程是证明任何一个满足公理 1,2,3,4 的选举规则必然导致独裁者的存在，从而违反公理 5. 按下述步骤进行.

1. 引入**决定性集合**的概念. 选民集合 I 的子集 J 称为候选人 x,y 的决定性集合，如果对于任何一次投票，只要 $(x>y)_i$, $i\in J$，选举规则就确定 $x>y$. 由公理 4 这样的集合一定存在，譬如全体选民集合 I 一定是任意一对候选人的决定性集合. 如果一对候选人的决定性集合 J 中不包含真子集 J_1，使 J_1 是某对候选人的决定性集合，则 J 称为**最小决定性集合**. 事实上，从 I 中将选民一个个地剔除，直到不能剩下一个决定性集合为止，就得到了最小决定性集合.

2. 给出一个**引理**. 在 Arrow 公理下 J 是 x,y 的决定性集合的充要条件是，存在这样一次投票：$(x>y)_i$, $i\in J$; $(x<y)_i$, $i\in I\setminus J$，选举规则确定 $x>y$. 这个引理的必要性由决定性集合的定义给出，充分性可由 Arrow 公理 1,2,3 证明(从略).

3. 证明 x,y 的最小决定性集合 J 中仅含一个选民. 用反证法，设 $j\in J$，且 $J\setminus j$ 非空. 由公理 1 可以考察有三位候选人 x, y, z 的这样一次投票.

$$\begin{aligned} &p_j &&: \quad x>y>z \\ &p_i(i\in J\setminus j) &&: \quad z>x>y \\ &p_i(i\in I\setminus J) &&: \quad y>z>x \end{aligned} \tag{6}$$

因为 J 对 x,y 是决定性的，所以选举规则确定 $x>y$. 另一方面，选举规则不可能确定 $z>y$，否则由(6)式按照引理，$J\setminus j$ 将成为 z, y 的决定性集合，与 J 的最小性矛盾. 所以选举规则只能确定 $y\geqslant z$. 这样，由 $x>y$ 和 $y\geqslant z$，排序的可传递性给出 $x>z$. 而将 $x>z$ 和(6)式用于引理又得到，j 是 x,z 的决定性集合，与 J 的最小性矛盾. 所以 J 中只含一个选民 j.

4. 证明 $J=j$ 对任一对候选人都是决定性的. 首先(6)式可

化为:

$$
\begin{aligned}
&p_j &&: x>y>z \\
&p_i(i\in I\setminus j) &&: y>z>x
\end{aligned}
\tag{7}
$$

已知j对x,y是决定性的，又I是y,z的决定性集合，由此可知j对x,z也是决定的(为什么？)．若候选人集合A中只有三人，则证明已结束；否则，对于任意的另一位候选人u，我们证明j对u,z也是决定性的．为此考察在(7)式基础上增加候选人u的这样一次投票：

$$
\begin{aligned}
&p_j &&: u>x>y>z \\
&p_i(i\in I\setminus j) &&: y>z>u>x
\end{aligned}
\tag{8}
$$

已知j对x,z是决定性的，又I是u,x的决定性集合，排序的可传递性给出$u>z$．于是由(8)式按照引理可知j对u,z是决定性的．

上述结果表明j是垄断选举的独裁者，因而满足前4条公理的选举规则违反公理5，即不存在满足全部Arrow公理的选举规则．
[证毕]

面对这样的结果人们首先想到的是重新审查Arrow公理．仔细研究这些看来合理的公理，有人对公理3(无关候选人的独立性)提出质疑，试看下例．

设$I=(1,2)$，$A=(x,y,z)$，选举规则是，若$(x>y)_1$，$(x>y)_2$，则$x>y$；若$(x>y)_1$，$(x<y)_2$，则$x\sim y$．这显然是公正的，但是将要看到利用公理3会导致矛盾的结果．考察4次投票，前3次投票情况及按这个选举规则确定的结果为：

$$
\begin{cases} p_1^{(1)}: & x>y>z \\ p_2^{(1)}: & x>y>z \end{cases} \Rightarrow p^{(1)}: x>y>z \tag{9}
$$

$$
\begin{cases} p_1^{(2)}: & x>z>y \\ p_2^{(2)}: & z>x>y \end{cases} \Rightarrow p^{(2)}: x\sim z>y \tag{10}
$$

$$
\begin{cases} p_1^{(3)}: & y>z>x \\ p_2^{(3)}: & z>y>x \end{cases} \Rightarrow p^{(3)}: y\sim z>x \tag{11}
$$

第4次投票情况为:

$$\begin{cases} p_1^{(4)}: & x>y>z \\ p_2^{(4)}: & z>x>y \end{cases} \tag{12}$$

比较(12)与(9)，候选人子集 $A_1=(x, y)$ 在 $p_i(i=1,2)$ 中的排序不变，按照公理 3，$p^{(4)}$ 中 x, y 的排序与 $p^{(1)}$ 一致，即 $x>y$；

比较(12)与(10)，$A_1=(x, z)$ 的排序不变，按照公理 3，$p^{(4)}$ 中 x, z 的排序与 $p^{(2)}$ 一致，即 $x \sim z$；

比较(12)与(11)，$A_1=(y, z)$ 的排序不变，与上面类似地有 $y \sim z$.

上面三个结果显然是矛盾的，其原因是公理 3 中虽然子集 A_1 内候选人排序不变，但是子集 A_1 以外候选人（即无关候选人）的插入影响了 A_1 内排序的优劣程度．公理 3 不考虑这种影响，致使产生了无法统一的结果．然而如果修改公理 3 以考虑优劣程度，那么就会涉及到对排序的基本性质的假定，超出了本节的讨论范围．下面转向寻求另外的解决途径．

联合尺度下的选举规则 如果“候选人”是葡萄酒，那么可以按照它们的甜度在从 0 到 1 的尺度上确定各自的位置．“选民”的口味不一，每个人可以在这个尺度上确定自己最理想的“候选人”应在的位置．在图 11－2 中 4 名“候选人” x, y, v, u 分别居于 0，0.1，0.7，0.9 处，3 名“选民” 1，2，3 认为自己最理想的“候选人”的位置是 1，0.4 和 0.6.

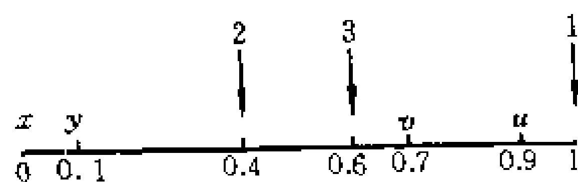


图 11－2 联合尺度示意图

图 11－2 这种表示称为选民和候选人的**联合尺度**，联合尺度的选举方法可以用在如颜色的深浅、口味的咸淡等物品质量的评定上．“候选人”按照客观标准，“选民”按照主观爱好分别在同一尺度上确定自己的位置．

由联合尺度很容易得到各位选民的一次投票结果，如对图

11－2有

$$p_1: u > v > y > x$$
$$p_2: y > v > x > u \qquad (13)$$
$$p_3: v > u > y > x$$

如果按照简单多数规则确定选举结果则有

$$p: v > u > y > x \qquad (14)$$

p 与 p_3 完全一致，而选民 3 是三位选民在联合尺度上居中的那一位，这个结果不是偶然的，事实上有以下的结论：

设有奇数个（2k＋1 个）选民，投票结果 p_i（$i=1, 2, \cdots, 2k+1$）由选民和候选人的联合尺度得到，j 是联合尺度上居中的那位选民，则简单多数规则确定的选举结果 p 与 p_j 一致，并且简单多数规则符合 Arrow 公理 *）.

我们只对这个结论作些解释. 如果 $(x>y)_j$，那么在联合尺度上 x，y 和 j 的位置可以出现图 11－3 所示的情况. 由于 j 是居中者，他的左面（包括他所在位置）正好有 k 个选民，这些选民的投票结果必是 $x>y$，于是至少有 $k+1$ 个选民的投票为 $x>y$，按照简单多数规则确定的选举结果应为 $x>y$，与 $j(x>y)_j$ 一致.

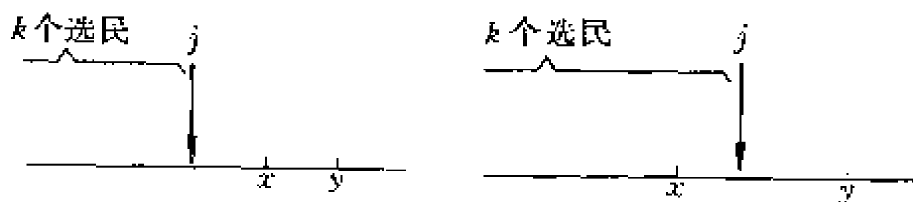


图 11－3　联合尺度上居中选民 j 与 x，y 的位置

由此可以看出，因为用联合尺度对投票情况作了限制，才可能存在满足 Arrow 公理的选举规则，并且这个规则简单易行——联合尺度上居中的选民的投票结果就是选举结果.

最小距离意义下的选举规则　这是一种与 Arrow 公理完全

*）这里的 p_i 由联合尺度得到，其范围比候选人的任意排序小得多. Arrow 公理涉及的投票应限制在这个小范围内.

无关的方法. 仍用 $I=(1,2,\cdots,n)$和 $A=(x,y,z,\cdots)$记选民和候选人集合, 用 P 记 A 的所有可能排序的集合(在排序基本性质1的意义下). 选民 i 的一次投票p_i可以看作集合 P 中的一个点. 如果能够合理地定义两点 p_i 和 p_j 之间的距离来衡量它们的接近程度, 那么从 I 的一次投票 $(p_1,p_2,\cdots,p_n)$确定选举结果, 就可以归结为在集合 P 中寻求到 n 个点 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的距离之和最小的点 p.

仍然可以用公理化方法来定义距离. 在一组合适的公理下, 能够构造性地证明, 如下定义的距离是唯一的(公理及证明见[5]).

任一对候选人 x,y 在选民 i,j 的一次投票 p_i,p_j 中的距离为:

$$\delta_{(x,y)}(p_i,p_j)=\begin{cases}0, & p_i,p_j \text{ 中 } x,y \text{ 的排序相同} \\ 1, & p_i,p_j \text{ 中一个含 } x\sim y\text{, 另一个含 } x>y\text{, 或 } x<y \\ 2, & p_i,p_j \text{ 中 } x,y \text{ 的排序相反}\end{cases} \tag{15}$$

p_i,p_j 之间的距离为

$$d(p_i,p_j)=\sum_{(x,y)\in A}\delta_{(x,y)}(p_i,p_j) \tag{16}$$

其中求和的含义是候选人成对地跑遍集合 A. 例如对于

p_1: $x>y>z$

p_2: $x\sim z>y$

按照定义(15), (16)有

$$d(p_1,p_2)=\delta_{(x,y)}(p_1,p_2)+\delta_{(x,z)}(p_1,p_2)+\delta_{(y,z)}(p_1,p_2)$$
$$=0+1+2=3$$

对于一次投票 $(p_1,p_2,\cdots,p_n)$, 确定选举结果 p 的原则通常有两种, 一是使 $\sum_{i=1}^{n}d(p,p_i)$最小; 二是使 $\sum_{i=1}^{n}d^2(p,p_i)$最小. 前者平均地照顾各个选民的意愿, 后者对于与多数选民看法不同的少

数选民的意见予以更多的考虑.

这种最小距离意义下的选举规则有两个主要缺点，一是尚没有在上述原则下求p的有效方法，基本上只能利用穷举法，当候选人数目稍多时计算量很大；二是可能出现p不唯一的情况（不论在哪种原则下）. 读者可以验证，对于本节(3)式给出的投票，用第一种原则确定的p是不唯一的（习题9）.

评注 我们用选民投票、选举规则等词汇叙述的群体决策问题在社会经济领域有着很强的实际背景和广泛的应用. 本节是用规定排序的基本性质，提出一组公理，通过逻辑推理，寻求选举规则这样的过程来建立模型的. 可以知道，如果提出的公理不合适（过多，相互矛盾，过于严格等），则可能得不到满足这些公理的结果；另一方面，如果提出的公理不充分（过少，过于宽松），则又可能无法推出结果或者结果不唯一. 所以用这种方法建模常常需要多次的反复. 我们在叙述了 Arrow 得到的反面结果后又介绍了两种方法，联合尺度下的选举规则是以缩小应用范围为代价换取一定结果的，最小距离意义下的选举规则应用上也存在诸多不便之处.

11.3 价格指数带来的问题

消费品价格的变化在任何国家都是普通百姓十分关心的问题之一. 由于政局不稳或市场失控，物价几倍、几十倍地上涨，固然会引起经济崩溃、民不聊生，而由政府把所有的价格定死，长期不准变动，也会导致生产停滞、比例失调，阻碍经济的正常发展. 为了逐步理顺各个经济部门和各种生产品之间的关系，既要允许各种商品的价格有升有降，又要将消费品价格总的上涨幅度控制在一定范围之内. 怎样衡量价格变化的趋势和程度呢？ 在资本主义社会发展的几百年历史中经济学家们提出了许多种所谓**价格指数**. 目前我国有关部门通用的价格指数也是其中的一种.

本节要讨论的问题是，如何评价已经存在的这些价格指数；根据客观的经济规律人们有理由要求价格指数满足哪些性质；能否找到满足这些性质的价格指数[5,48]．

可以看出，这个问题的提法与上一节的选举规则有相似之处，我们可以把价格指数应该满足的性质归纳为若干条公理，然后用逻辑推理的方法讨论这些公理的相容性和独立性，这样既能够从一个角度评价已有的一些价格指数，又可以回答满足上述性质的价格指数的存在性问题．

各种形式的价格指数 首先，对于一种固定的商品，若原来的价格为p^0，现在的价格为p，那么可以简单地用

$$I=\frac{p}{p^0} \tag{1}$$

衡量价格的变动．如果两种商品原价是p_1^0和p_2^0，现价是p_1和p_2，简单地用如下的平均

$$I=\frac{p_1}{p_1^0}+\frac{p_2}{p_2^0}\text{ 或 }\frac{p_1+p_2}{p_1^0+p_2^0}\text{ 或 }\frac{p_1p_2}{p_1^0p_2^0} \tag{2}$$

显然都不能表示总的价格变化，因为若第一种商品是大米，第二种是钢琴，那么(2)式无法反映人们对大米涨价远比对钢琴降价更为关切的实际情况．我们自然想到应该用加权平均的办法．

与人民生活息息相关的消费品有成百上千种，各个国家和地区要根据具体情况选出具有代表性的若干种，作为制订价格指数的依据．价格指数通常是衡量**基准年**(**基年**)和**考察年**(**现年**)价格的总的变动．设n种代表性消费品在基年的价格为$p_1^0,p_2^0,\cdots,p_n^0$，在现年的价格为$p_1,p_2,\cdots,p_n$．按照它们对人民生活、国家财政等方面的影响综合考虑，其权重分别为$q_1^0,q_2^0,\cdots,q_n^0$和$q_1,q_2,\cdots,q_n$．(例如可以用它们的销售量作为权重)记向量$p^0=(p_1^0,p_2^0,\cdots,p_n^0)^T$，$q^0=(q_1^0,q_2^0,\cdots,q_n^0)^T$，$p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)^T$，$q=(q_1,q_2,\cdots,q_n)^T$，则价格指数可记作$I(p,q|p^0,q^0)$．下面

列举一些经济学家们提出来的价格指数.

$$I_1(p,q\mid p^0,q^0)=\frac{p\cdot q^0}{p^0\cdot q^0}=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_iq_i^0}{\sum_{i=1}^{n}p_i^0q_i^0} \tag{3}$$

$$I_2(p,q\mid p^0,q^0)=\frac{p\cdot q}{p^0\cdot q}=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_iq_i}{\sum_{i=1}^{n}p_i^0q_i} \tag{4}$$

$$I_3(p,q\mid p^0,q^0)=\frac{p\cdot q}{p^0\cdot q^0}=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_iq_i}{\sum_{i=1}^{n}p_i^0q_i^0} \tag{5}$$

$$I_4(p,q\mid p^0,q^0)=\frac{p\cdot a}{p^0\cdot a}=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_ia_i}{\sum_{i=1}^{n}p_i^0a_i},\quad a_i>0 \tag{6}$$

$$I_5(p,q\mid p^0,q^0)=\left(\frac{p\cdot q^0}{p^0\cdot q^0}\ \frac{p\cdot q}{p^0\cdot q}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

$$I_6(p,q\mid p^0,q^0)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i}{p_i^0}\right)^{\alpha_i},\quad \alpha_i>0,\ \sum_{j=1}^{n}\alpha_j=1 \tag{8}$$

$$I_7(p,q\mid p^0,q^0)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i}{p_i^0}\right)^{\beta_i},\quad \beta_i=\frac{q_i^0}{\sum_{j=1}^{n}q_j^0} \tag{9}$$

$$I_8(p,q\mid p^0,q^0)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i}{p_i^0}\right)^{\gamma_i},\quad \gamma_i=\frac{q_i}{\sum_{j=1}^{n}q_j} \tag{10}$$

可以看出，在 I_1 中权重均用基年的数据，统计和计算比较简单，很多国家都用这种指数．在 I_2 中权重均用现年的数据，增加了统计和计算量，但是较确切地反映了价格的变化对当前人民生活的影响，我国有关部门采用这种指数．I_4 的权重是固定的，与基年和现年无关．I_5 是 I_1 和 I_2 的几何平均．I_6 与 I_7、I_8 的区别在于 α_i 为固定常数，与 q_i^0 或 q_i 无关．

为了进一步比较、评价这些指数，并研究更合适的价格指数的存在性，下面从直观上价格指数应满足的性质出发，引入若干公理．

价格指数的公理化　首先列出一些大多数人认可的价格指数应具有的性质．

1．只要有一种商品的价格上涨，其他商品的价格不下降，价格指数就应该上升（对价格的单调性）．

2．若所有商品的价格不变，价格指数不随权重的改变而改变．（对权重的不变性）．

3．若所有商品的价格均上升 k 倍，价格指数也上升 k 倍．（对价格的齐次性）．

4．价格指数介于单种商品价格比值的最小值和最大值之间．

5．价格指数与货币单位的选取无关，即只要商品的实际价格不变，仅仅货币单位改变，价格指数不应改变．（对货币单位的独立性）．

6．价格指数与商品计量单位的选取无关．（对计量单位的独立性，这里隐含着用商品数量表示权重）．

7．两年的价格指数之比与基年的选取无关．

8．价格指数不因某种商品被淘汰而失去意义．

这 8 条性质可以用数学语言表述为如下的公理．

对于 $p_i, q_i, p_i^0, q_i^0>0\ (i=1,2,\cdots,n)$，价格指数 $I(p,q\mid p^0,q^0)>0$，应满足以下 8 条公理：

1．若 $\tilde{p}>p$（指对所有的 i，$\tilde{p}_i\geqslant p_i$，且至少有一个 i，$\tilde{p}_i>p_i$），

则 $I(\tilde{p}, q \mid p^0, q^0) > I(p, q \mid p^0, q^0)$.

2. $I(p^0, q \mid p^0, q^0) = 1$.

3. $I(kp, q \mid p^0, q^0) = k\, I(p, q \mid p^0, q^0),\ k > 0$.

4. $\min\limits_i \dfrac{p_i}{p_i^0} \leqslant I(p, q \mid p^0, q^0) \leqslant \max\limits_i \dfrac{p_i}{p_i^0}$.

5. $I(\lambda p, q \mid \lambda p^0, q^0) = I(p, q \mid p^0, q^0),\ \lambda > 0$.

6. $I(\Lambda p, \Lambda^{-1} q \mid \Lambda p^0, \Lambda^{-1} q^0) = I(p, q \mid p^0, q^0)$，其中 $\Lambda = \mathrm{Diag}[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n],\ \lambda_i > 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$.*)

7. $\dfrac{I(\tilde{p}, \tilde{q} \mid p^0, q^0)}{I(p, q \mid p^0, q^0)} = \dfrac{I(\tilde{p}, \tilde{q} \mid \bar{p}^0, \bar{q}^0)}{I(p, q \mid \bar{p}^0, \bar{q}^0)}$.**)

8. $\lim\limits_{p_i \to 0} I(p, q \mid p^0, q^0) > 0$.***)

用这 8 条公理一一检验 (3) ~ (10) 列举的价格指数 $I_1 \sim I_8$，我们发现没有一个价格指数满足所有公理. 譬如 I_1, I_2, I_5 不满足公理 7, I_6, I_7, I_8 不满足公理 8, I_3 不满足公理 2，I_4 不满足公理 6. 那么，是否可以找到其他的、由 p, q, p^0, q^0 决定的价格指数 I，满足所有公理呢？ 可惜的是 Eichhorn 证明了如下的定理[24].

定理 不存在同时满足公理 2、3、6、7、8 的价格指数 $I(p, q \mid p^0, q^0)$.

[证明] 其过程是证明任何一个满足公理 2、3、6、7 的指数 $I(p, q, \mid p^0, q^0)$ 必然不满足公理 8.

记 $e = (1, 1, \cdots, 1)^T$，$C = \mathrm{Diag}[c_1, c_2, \cdots, c_n]$，$D = \mathrm{Diag}[d_1, d_2, \cdots, d_n]$，$(c_i, d_i > 0,\ i = 1, 2, \cdots, n)$. 先证明

---

*) $\mathrm{Diag}[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$ 表示以 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为对角元素的对角矩阵；请读者说明为什么这个式子表述了前面的第 6 条性质.

**) $\bar{p}^0$, $\bar{q}^0$ 分别是另一基年的价格和权重向量.

***) 用 $p_i \to 0$ 表示第 i 种商品被淘汰.

两个等式.

① $I(CDe, C^{-1}D^{-1}e|e,e)=I(Ce,C^{-1}e|e,e)\cdot I(De,D^{-1}e|e,e)$ (11)

其推导如下:

$$I(CDe,C^{-1}D^{-1}e|e,e)=\frac{I(CDe,C^{-1}D^{-1}e|e,e)}{I(Ce,C^{-1}e|e,e)}\cdot I(Ce,C^{-1}e|e,e)$$

$$\underline{\underline{\text{公理 7}}}\ \frac{I(CDe,C^{-1}D^{-1}e|Ce,C^{-1}e)}{I(Ce,C^{-1}e|Ce,C^{-1}e)}\cdot I(Ce,C^{-1}e|e,e)$$

$$\underline{\underline{\text{公理 2,6}}}\ I(De,D^{-1}e|e,e)\cdot I(Ce,C^{-1}e|e,e)$$

② $I(p,e|e,e)=I(p,p^{-1}|e,e)$ (12)

其推导如下:

$$\frac{I(p,e|e,e)}{I(p,p^{-1}|e,e)}\ \underline{\underline{\text{公理 7}}}\ \frac{I(p,e|p,e)}{I(p,p^{-1}|p,e)}\ \underline{\underline{\text{公理 2}}}\ 1$$

下面证明定理. 记 $\Lambda_i=\text{Diag}[1,\cdots,\lambda,\cdots,1]$ (第 i 对角元为 λ, $\lambda>0$, 其余为 1). 于是 $\prod_{i=1}^{n}\Lambda_i=\lambda E$ (E 为单位阵).

设 $I(p,q|p^0,q^0)$是满足公理 2、3、6、7 的价格指数, 令

$$s=\prod_{i=1}^{n}I(\Lambda_i e,e|e,e) \tag{13}$$

则

$$s\ \underline{\underline{(12)\text{式}}}\ \prod_{i=1}^{n}I(\Lambda_i e,\Lambda_i^{-1}e|e,e)$$

$$\underline{\underline{(11)\text{式}}}\ I\left(\prod_{i=1}^{n}\Lambda_i e,\prod_{i=1}^{n}\Lambda_i^{-1}e|e,e\right)$$

$$=I(\lambda e,\lambda^{-1}e|e,e)$$

$\xlongequal{公理3} \lambda I(e, \lambda^{-1}e \mid e, e) \xlongequal{公理2} \lambda$ (14)

当 $\lambda \to 0$ 时 $s \to 0$，于是在(13)式右端必存在某个因子有

$$\lim_{\lambda \to 0} I(\Lambda_i e, e \mid e, e) = 0 \tag{15}$$

这个结果与公理 8 矛盾. [证毕]

顺便指出，该定理没有涉及公理 1、4、5 的一个原因是：可以证明(习题 13、14)：

若指数 I 满足公理 1、2、3，则 I 满足公理 4；

若指数 I 满足公理 2、3、7，则 I 满足公理 5.

对常用的价格指数的分析 既然不存在满足所有公理的价格指数,我们只好回到前面列举的 $I_1 \sim I_8$ ((3)~(10)式). 首先，I_4 和 I_6 需要构造另外的参数 a_i 和 α_i，不便应用，I_5 可由 I_1、I_2 直接得到，I_3 不满足公理 2 (这是非常基本的要求)，所以不再对它们作进一步的分析.

对于 I_7、I_8，不难验证它们不满足公理 6、7、8(习题 11)，并且计算量较大，而对于 I_1 和 I_2，可以验证它们满足除公理 7 以外的其余公理(习题 10)，计算也较方便，所以 I_1 和 I_2 是目前常用的价格指数. 进一步分析它们与公理 7 的矛盾还可以发现，在一般情况下公理 7 能够近似地成立. 例如对于价格指数 I_2 和两个不同基年的价格向量 p^0，$\bar{p}^0$，公理 7 成立的条件是存在正数 k，

$$\bar{p}^0 = k p^0 \tag{16}$$

即对于所有商品一个基年的价格都是另一基年价格的 k 倍. 这个条件虽然不会绝对成立，但实际上是近似满足的. 于是为人们采用 I_1 和 I_2 作为实用的价格指数提供了更强的论据(关于 I_1 见习题 12).

习 题

1. 在 11.1 节中证明由(7)、(8)给出的 shapley 值 $\Phi(v)$ 满足 $\varphi_i(v) \geq v(i)$，$i = 1, 2, \cdots, n$.

2. 某甲(农民)有一块土地，若从事农业生产可收入 100 元. 若将土地租给某乙(企业家)用于工业生产，可收入 200 元. 若租给某丙(旅店老板)开发旅游业，可收入 300 元. 当旅店老板请企业家参与经营时，收入达 400 元. 为促成最高收入的实现，试用 shapley 值方法分配各人的所得.

3. 100 人的团体由四派组成，人数分别为 40、30、20、10 人. 决议需过半数成员赞成方可通过. 每个派别成员同时投赞成或反对票. 用 shapley 值方法计算各派在表决中的权重.

4. 理事会有五个常任理事和十个非常任理事，提案仅当全部常任理事和至少四个非常任理事赞成时方可通过. 求每位常任理事和每位非常任理事在投票中的权重.

5. 奇数个席位的理事会由三派组成，议案表决实行过半数通过方案. 证明在任一派都不能操纵表决的条件下，三派占有的席位不论多少，他们在表决中的权重都是一样的.

6. 在 11.2 节中证明当候选人数目 $m=2$，选民人数 $n\geqslant 2$ 时简单多数规则满足 Arrow 公理.

7. 举例说明确定选举结果的记分规则(由 11.2 节(4)式定义)不满足 Arrow 公理 3.

*8. 设 $I=(1,2,\cdots,n)$和 $A=(x,y,\cdots)$分别是选民和候选人集合，$(p_1, p_2,\cdots,p_n)$是 I 对 A 的一次投票(为简单起见，不考虑两候选人等同的情况). 选举结果 p 不是对 A 的一个排序，而只是决定一名优胜者(第一名). 现举出以下几种选举规则:

① $(p_1,p_2,\cdots,p_n)$中排在第一名最多的那位候选人为优胜者.

② 若多于或等于半数的选民将 x 排在其它候选人之前，x 是优胜者.

③ 若多于或等于半数的选民将 x 排在第一位，则 x 是优胜者；若没有这样的 x，就把排在第一位最多的两个候选人 x,y 进行比较，当多于或等于半数的选民将 x 排在 y 前面时，x 是优胜者.

④ 得分(Borda 数)居第一位者为优胜者.

问这些规则都能确定优胜者吗？ 对于同一次投票这些规则决定的优胜者相同吗？ 你还能提出一些决定优胜者的选举规则吗？

9. 用最小距离意义下的选举规则研究 11.2 节(3)式给出的投票.

① 如果以$\sum_{i=1}^{3} d(p,p_i)$最小为原则确定选举结果 p，说明 p 可以是 p_1，p_2

或p_3中任一个.

② 如果以$\sum_{i=1}^{3} d^2(p, p_i)$最小为原则确定选举结果$p$，说明$p: x \sim y \sim z$.

10. 在11.3节中验证价格指数I_2((4)式)满足除公理7以外的其余公理；而且当条件(16)式成立时它也满足公理7.

11. 验证价格指数I_8(11.3节(10)式)满足公理1～5，但不满足公理6～8.

12. 给出价格指数I_1(11.3节(3)式)满足公理7的条件，并解释该条件的实际含义.

13. 证明：若价格指数I满足公理1～3，则满足公理4.

14. 证明：若价格指数I满足公理2、3、7，则满足公理5.

15. 在定义价格指数时如何构造权重q和q^0是关键之一，你认为应该如何确定权重. 当然，你也可以定义不同于$I_1 \sim I_8$的价格指数，并说明其含义和性质.

第四篇　随机性模型

在第二、三篇讨论的模型中，从假设条件到求解结果都是确定性的．例如存贮模型中在单位时间对物品的需求为已知常数的假定下，得到的最佳订货周期和订货量是确定的数值．这种模型适合像炼钢原料的存贮等一类实际问题，因为炼钢厂的生产对原料的需求通常是稳定的．但是如果对象是商店仓库中的商品，市场对商品的需求不是确定的，而是遵从某种随机规律，那么寻求商店的订货策略就应该建立随机存贮模型．又如在人口模型中根据调查资料和设定的生育率、死亡率等数据，所预测的未来人口总数及按年龄的分布都是确定的数量．但是如果把出生和死亡看作有一定概率的随机事件，那么我们将得到预测未来人口概率分布及数字特征的随机人口模型．

本篇要讨论的随机性模型，是根据研究对象具有的包含随机因素的规律，以概率论为基本数学工具建立的，其结果通常也是在概率意义下表示出来的．

随机性模型也有连续的和离散的．第 12 章用连续型概率分布建立的模型大多属于连续模型；在第 13 章中以服从马氏规律的离散状态为对象的模型和第 14 章的排队模型属于离散模型．

顺便指出，因为本书介绍的主要是以机理分析方法建立的模型，所以用诸如回归分析、方差分析、主成分分析、聚类分析、时间序列分析等方法，根据大量统计数据建立的模型（也可称随机性模型），不在本篇讨论之列．

第12章 概率分布方法建模

在2.3节讨论过几个用初等概率方法建立的模型．实际上一些问题中的不确定现象常常是众多的随机因素影响所致，经过对大量数据的处理或者根据理论上的分析，随机影响可以用一定的概率分布，如正态分布、指数分布等描述．本节不是讨论如何得到这些概率分布的统计方法，而是在假设概率分布已知的条件下，按照研究目的和对象的客观规律来建立模型．

12.1 报童的诀窍

报童每天清晨从报社购进报纸零售，晚上将没有卖掉的报纸退回．设报纸每份的购进价为b，零售价为a，退回价为c，应该自然地假设为$a>b>c$．这就是说，报童售出一份报纸赚$a-b$，退回一份赔$b-c$．报童每天如果购进的报纸太少，不够卖的，会少赚钱；如果购进太多，卖不完，将要赔钱．请你为报童筹划一下，他应如何确定每天购进报纸的数量，以获得最大的收入[19]．

众所周知，应该根据需求量确定购进量．需求量是随机的，假定报童已经通过自己的经验或其它的渠道掌握了需求量的随机规律，即在他的销售范围内每天报纸的需求量为r份的概率是$f(r)(r=0,1,2,\cdots\cdots)$．有了$f(r)$和$a,b,c$，就可以建立关于购进量的优化模型了．

假设每天购进量为n份，因为需求量r是随机的，r可以小于n、等于n或大于n，致使报童每天的收入也是随机的，所以作为优化模型的目标函数，不能是报童每天的收入，而应该是他长期(几个月，一年)卖报的日平均收入．从概率论大数定律的观点看，这相当于报童每天收入的期望值，以下简称平均收入．

记报童每天购进 n 份报纸时的平均收入为 $G(n)$，如果这天的需求量 $r \leqslant n$，则他售出 r 份，退回 $n-r$ 份；如果这天的需求量 $r>n$，则 n 份将全部售出．考虑到需求量为 r 的概率是 $f(r)$，所以

$$G(n)=\sum_{r=0}^{n}[(a-b)r-(b-c)(n-r)]f(r)+\sum_{r=n+1}^{\infty}(a-b)nf(r) \tag{1}$$

问题归结为在 $f(r)$，a, b, c 已知时，求 n 使 $G(n)$ 最大．

通常需求量 r 的取值和购进量 n 都相当大，将 r 视为连续变量更便于分析和计算，这时概率 $f(r)$ 转化为概率密度函数 $p(r)$，(1)式变成

$$G(n)=\int_0^n[(a-b)r-(b-c)(n-r)]p(r)\mathrm{d}r+\int_n^{\infty}(a-b)np(r)\mathrm{d}r \tag{2}$$

计算

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}n}=(a-b)np(n)-\int_0^n(b-c)p(r)\mathrm{d}r-(a-b)np(n)+\int_n^{\infty}(a-b)p(r)\mathrm{d}r$$

$$=-(b-c)\int_0^n p(r)\mathrm{d}r+(a-b)\int_n^{\infty}p(r)\mathrm{d}r$$

令 $\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}n}=0$，得到

$$\frac{\int_0^n p(r)\,\mathrm{d}r}{\int_n^{\infty}p(r)\mathrm{d}r}=\frac{a-b}{b-c} \tag{3}$$

使报童日平均收入达到最大的购进量 n 应满足(3)式. 因为 $\int_0^{\infty} p(r)\mathrm{d}r = 1$，所以(3)式又可表为

$$\int_0^{n} p(r)\mathrm{d}r = \frac{a-b}{a-c} \tag{4}$$

根据需求量的概率密度 $p(r)$ 的图形很容易从(3)式确定购进量 n. 在图 12-1 中用 P_1、P_2 分别表示曲线 $p(r)$ 下的两块面积，则(3)式可记作

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a-b}{b-c} \tag{5}$$

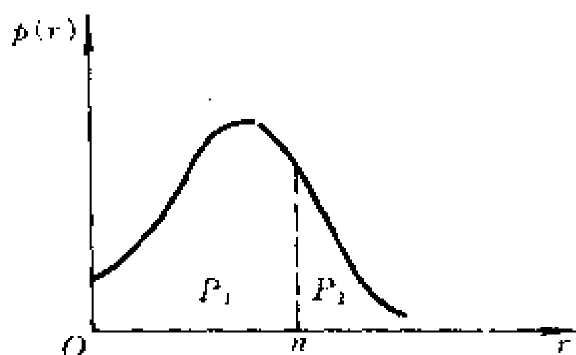


图 12-1 由 $p(r)$ 确定 n 的图解法

因为当购进 n 份报纸时，$P_1 = \int_0^{n} p(r)\mathrm{d}r$ 是需求量 r 不超过 n 的概率，即卖不完的概率；$P_2 = \int_n^{\infty} p(r)\mathrm{d}r$ 是需求量 r 超过 n 的概率，即卖完的概率，所以(3)式表明，购进的份数 n 应该使卖不完与卖完的概率之比，恰好等于卖出一份赚的钱 $a-b$ 与退回一份赔的钱 $b-c$ 之比. 显然，当报童与报社签订的合同使报童每份赚钱与赔钱之比越大时，报童购进的份数就应该越多.

12.2 随机存贮策略

商店在一周中的销售量是随机的. 每逢周末经理要根据存货的多少决定是否订购货物，以供下周的销售. 适合经理采用的一

种简单的策略是制订一个下界 s 和一个上界 S，当周末存货不少于 s 时就不订货；当存货少于 s 时则订货，且订货量使得下周初的存量达到 S. 这种策略称为(s,S)随机存贮策略.

为使问题简化起见，像确定性存贮模型（4.2 节）一样，仍然只考虑费用：订货费、贮存费、缺货费和商品购进价格，存贮策略的优劣以总费用为标准. 显然，总费用（在平均意义下）与(s,S)策略、销售量的随机规律以及单项费用的大小有关.

模型假设 为了叙述的方便，时间以周为单位，商品数量以件为单位.

1. 每次订货费为c_0（与数量无关），每件商品购进价为 c_1，每件商品一周的贮存费为 c_2，每件商品的缺货损失为 c_3. c_3 相当于售出价，所以应有 $c_1 < c_3$.

2. 一周的销售量 r 是随机的. r 的取值很大，可视为连续变量，其概率密度函数为$p(r)$.

3. 记周末的存货量为 x，订货量为 u，并且立即到货，于是周初的存货量为 $x+u$.

4. 一周的销售是集中在周初进行的，即一周的贮存量为 $x+u-r$，不随时间改变. 这条假设是为了计算贮存费用的方便，以后我们将考虑修改它.

建模与求解 按照制订(s,S)策略的要求，当周末存货量 $x \geq s$ 时，订货量 $u=0$；当 $x<s$ 时 $u>0$，且令 $x+u=S$. 确定 s，S 应以"总费用"最小为标准，因为销售量 r 的随机性，贮存量和缺货量也是随机的，致使一周的贮存费和缺货费也是随机的，所以目标函数应取一周总费用的期望值，即长期经营中每周费用的平均值，以下称平均费用.

根据假设条件容易写出平均费用为

$$J(u)=\begin{cases} c_0+c_1 u+L(x+u), & u>0 \\ L(x) & u=0 \end{cases} \tag{1}$$

其中

$$L(x)=c_2\int_0^x (x-r)p(r)\mathrm{d}r+c_3\int_x^\infty (r-x)p(r)\mathrm{d}r \qquad (2)$$

我们先在 $u>0$ 的情况下，求 u 使 $J(u)$ 达到最小值，从而确定 S. 为此计算

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}u}=c_1+c_2\int_0^{x+u} p(r)\mathrm{d}r-c_3\int_{x+u}^\infty p(r)\mathrm{d}r \qquad (3)$$

令 $\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}u}=0$，记 $x+u=S$，并注意到 $\int_0^\infty p(r)\mathrm{d}r=1$，可得

$$\frac{\int_0^S p(r)\mathrm{d}r}{\int_S^\infty p(r)\mathrm{d}r}=\frac{c_3-c_1}{c_2+c_1} \qquad (4)$$

这就是说，令订货量 u 加上原来的存量 x 达到 (4) 式所示的 S，可使平均费用最小*).

从 (4) 式可以看出，当商品购进价 c_1 一定时，贮存费 c_2 越小，缺货费 c_3 越大，S 应越大. 这是符合常识的.

下面讨论确定 s 的方法. 当存货量为 x 时，若订货则由 (1) 式在 S 策略下平均费用为

$$J_1=c_0+c_1(S-x)+L(S)$$

若不订货则平均费用为 $J_2=L(x)$. 显然，当 $J_2\leqslant J_1$ 即

$$L(x)\leqslant c_0+c_1(S-x)+L(S) \qquad (5)$$

时应不订货. 记

$$I(x)=c_1x+L(x) \qquad (6)$$

---

*) 读者容易验证，$\frac{\mathrm{d}^2J}{\mathrm{d}u^2}$ 恒大于零.

则不订货的条件(5)式表为

$$I(x)\leqslant c_0+I(S) \tag{7}$$

(7)式右端为已知数. 于是 s 应为方程

$$I(x)=c_0+I(S) \tag{8}$$

的最小正根.

方程(8)可以用图形求解. 注意到 $I(x)$ 与 $J(u)$ 表达式的相似性(见(1)与(6)式), 可知 $I(x)$ 是下凸的, 且在 $x=S$ 时达到极小值, 如图 12-2. 在极小值 $I(S)$ 上叠加 c_0, 按图中箭头方向即可得到 s.

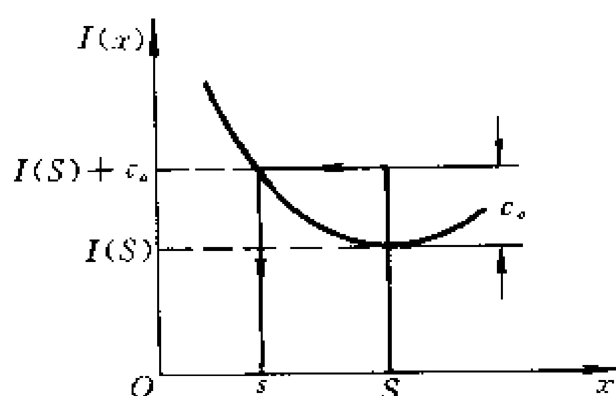


图 12-2 求 s 的图解法

综上所述, 根据模型(1)、(2)所确定的 (s,S) 策略由(4)、(6)、(8)式给出, 当 c_0, c, c_2, c_3 及 $p(r)$ 给定后, s, S 可以唯一地解出.

评注 在这个模型中贮存费用的计算是比较困难的. 因为一般地说贮存费应与贮存时间有关, 所以必须对一周内贮存量的变化情况作出适当的假定. 按照模型假设第 4 条, 贮存量 q 在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 内的变化可用图 12-3 表示(为简单起见设原存量 x 为 0). 即在可以忽略的短时间内贮存量就降为 $u-r$($u>r$ 时)或 0($u\leqslant r$ 时). 我们已经看到在这个假定下计算及其结果都十分简单.

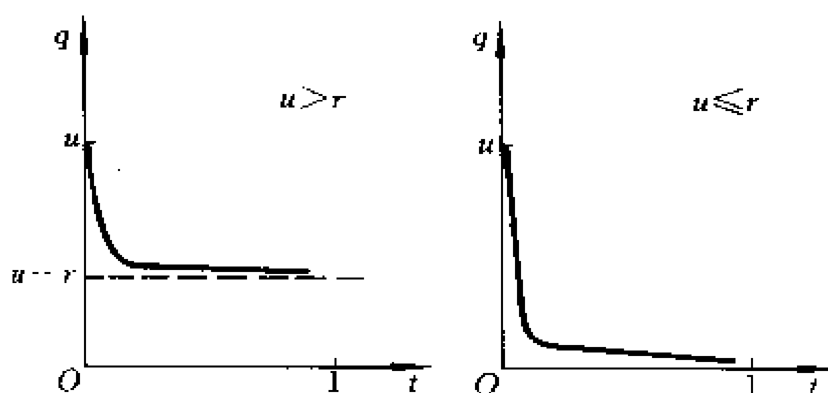


图 12-3 模型假设4 的图示

关于贮存量 q 的更合理的假定似乎应该如图 12－4 所示，即一周内的销售是均匀的，因而贮存量 q 呈直线下降．在这种情况下贮存费的计算就比较麻烦了，而且得不到简洁的结果（习题 2）．

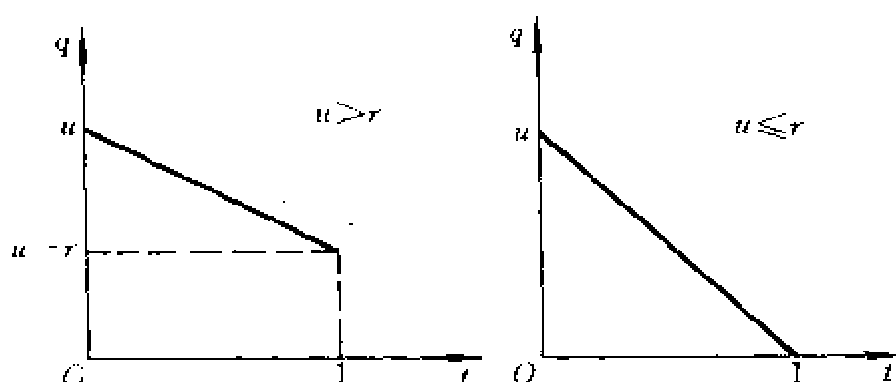


图 12－4　模型假设4 的改进

12.3　广告中的学问

书店要订购一批新书出售，它打算印制详细介绍图书内容的精美广告分发给广大读者以招徕顾客．虽然读者对这种图书的需求量是随机的，但是与书店投入的广告费用有关．根据以往的经验知道，随着广告费的增加潜在的购买量会上升，并且有一个上限．所谓潜在的买主是指那些对于得到这种图书确实有兴趣，但不一定花钱从这家书店购买的人．书店掌握了若干个潜在买主的名单，广告将首先分发给他们．这个模型要求我们，在对需求量随广告费增加而变化的随机规律作出合理假设的基础上，根据图书的购进价和售出价确定广告费和订购量的最优值，使书店的利润（在平均意义下）最大[32]．

问题分析　建模的关键在于分析广告费、潜在购买量与随机需求量之间的关系，并作出合理的、简化的假设．若记广告费为 c，潜在购买量为 $s(c)$，$s(c)$应是 c 的增函数（严格地说是非降函数），且有一个上界．为简单起见不妨设 $s(0)=0$．记实际的需求量为随机变量 r，其概率密度为 $p(r)$，于是对于给定的广告

费 c，需求量 r 在 0 到 $s(c)$之间随机取值，如果没有进一步的信息，可以简单地假设 $p(r)$在区间 $[0, s(c)]$ 内呈均匀分布.

为了确定函数 $s(c)$的形式，不妨首先假设印刷广告需要一笔固定的费用 c_0，它并不产生潜在购买量；然后，因为广告将优先分发给那些确定的潜在买主，如果每份广告的印刷费和邮寄费是固定的，那么 $s(c)$将随着 c 线性地增加；最后，随着广告的普遍分发，$s(c)$随着 c 的增加而渐趋于某一上界 S. 示意图如图 12－5，其中 $c_0 \leqslant c \leqslant c_1$ 是 $s(c)$的线性增加阶段.

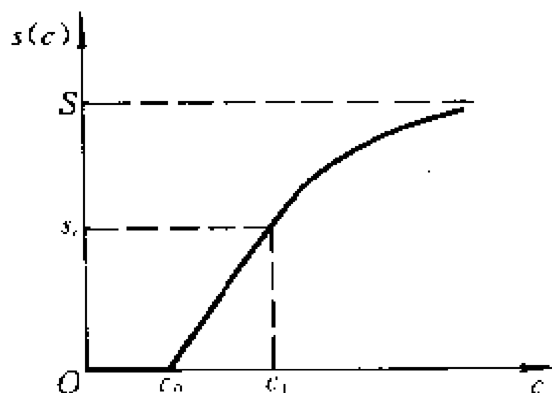


图 12－5　潜在购买量 $s(c)$的示意图

在以上分析的基础上作下面的假设.

模型假设

1. 每本图书的购进价为 a，售出价为 b，忽略贮存费用；需求量 r 是随机的，其概率密度记作 $p(r)$.

2. 广告费为 c，潜在购买量是 c 的函数记作 $s(c)$；需求量 r 在 $[s(0), s(c)]$ 内呈均匀分布.

3. 广告费中固定费用为 c_0，$s(0)=s(c_0)=0$；每份广告的印制和邮寄费用为 k，广告将首先分发给 s_0 个确定的潜在买主；$s(c)$是 c 的非降函数，且上界为 S.

建模与求解　设图书的购进量为 u，建模的目的是确定广告费用 c 和购进量 u 的最优值，使商店的平均利润（即利润的期望值）最大.

分三步建立模型. 先在给定的广告费 c 下根据假设 1，2 确定使平均利润达到最大的购进量，再利用假设 3 构造函数 $s(c)$的具体形式，最后根据前两步的结果确定广告费的最优值. 下面是具体步骤.

1. 当广告费 c 给定时，记购进量为 u 的平均利润是 $J(u)$，因

为利润是从售出书的收入中减去购进书和广告费的支出，注意到需求量 r 的概率密度为 $p(r)$，可以写出 $J(u)$ 的表达式为

$$J(u)=b\left(\int_0^u rp(r)\mathrm{d}r+\int_u^\infty up(r)\mathrm{d}r\right)-au-c \qquad (1)$$

利用 $\int_0^\infty p(r)\mathrm{d}r=1$，(1)式可化为

$$J(u)=(b-a)u-c-b\int_0^u (u-r)p(r)\mathrm{d}r \qquad (2)$$

式中 $(b-a)u-c$ 是购进的书全部售出时的利润，$b\int_0^u (u-r)$ $\cdot p(r)\mathrm{d}r$ 是当部分图书未能售出时的损失．

计算 $\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}u}$ 并令其为零，容易求出使 $J(u)$ 达到最大的 u 的最优值，记作 u^*，u^* 满足

$$\int_0^{u^*} p(r)\mathrm{d}r=\frac{b-a}{b} \qquad (3)$$

根据 r 在 $[s(0),\ s(c)]$ 内均匀分布的假设及 $s(0)=0$，有

$$p(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{s(c)}, & 0\leqslant r\leqslant s(c)\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \qquad (4)$$

代入(3)式得

$$u^*(c)=\frac{b-a}{b}s(c) \qquad (5)$$

即购进量的最优值 u^* 等于广告费 c 所决定的潜在购买量 $s(c)$ 乘

以比例系数 $\frac{b-a}{b}$，这个系数与进出差价 $b-a$ 成正比，与销售价 b 成反比.

将(4)、(5)代入(2)式，可得最大的平均利润为

$$J(u^*(c))=\frac{(b-a)^2}{2b}s(c)-c \tag{6}$$

2. 根据假设 3 和图 12－5，首先设

$$s(c)=0, \qquad 0\leqslant c\leqslant c_0 \tag{7}$$

记

$$c_1=c_0+ks_0 \tag{8}$$

因为 $s(c_1)=s_0$，所以

$$s(c)=\frac{c-c_0}{k}, \quad c_0\leqslant c\leqslant c_1 \tag{9}$$

是图 12－5 上的直线部分. 对于 $c>c_1$，应有

$$\lim_{c\to\infty} s(c)=S, \qquad \lim_{c\to\infty} s'(c)=0 \tag{10}$$

满足这个关系的最简单的函数形式之一是 $s(c)=S\frac{c+\alpha}{c+\beta}$，$\alpha$ 和 β 可以由 $s(c)$ 在 c_1 处函数和导数的连续性确定. 最后将所得结果与(7)、(9)两式合在一起，得到

$$s(c)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant c\leqslant c_0 \\ \dfrac{c-c_0}{k}, & c_0<c\leqslant c_1 \\ \dfrac{S(c-c_1)+s_0k(S-s_0)}{c-c_1+k(S-s_0)}, & c_1<c \end{cases} \tag{11}$$

3. 将 $s(c)$ 的表达式(11)代入(6)式，并记

$$\lambda=\frac{(b-a)^2}{2b} \tag{12}$$

可得

$$J(u^*(c))=\begin{cases} -c & , 0\leqslant c\leqslant c_0 \\ \left(\dfrac{\lambda}{k}-1\right)c-\dfrac{\lambda c_0}{k} & , c_0<c\leqslant c_1 \\ \lambda\dfrac{S(c-c_1)+s_0k(S-s_0)}{c-c_1+k(S-s_0)}-c & , c_1<c \end{cases}$$

(13)

其示意图如图 12－6．为了求出使 $J(u^*(c))$ 达到最大的广告费 c^*，先设当 s_0 个潜在买主实际上前来购书时，商店的利润应为正值，即

$$J(u^*(c_1))>0$$

代入(13)式，相当于要求

$$k<\lambda-\frac{c_0}{s_0} \quad (14)$$

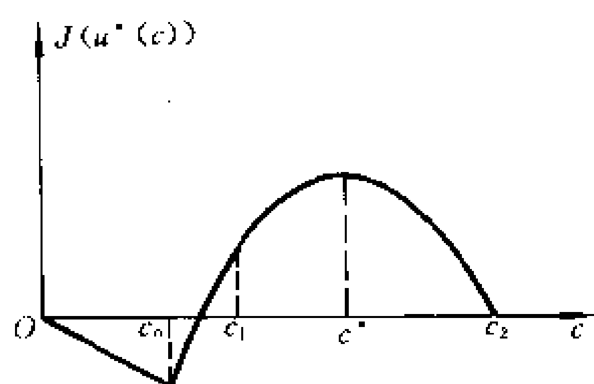


图 12－6 $J(u^*(c))$的示意图

即每份广告的费用 k 必须充分小，且由(12)式可以看出(14)式右端第一项 λ 取决于图书的进出差价，而第二项 $\frac{c_0}{s_0}$ 是每个潜在买主分担的固定广告费用．事实上，(14)式的假设是合理的，因为如果连那些确定的潜在买主来买书时商店都赔本的话，那么这笔生意就根本不必做了．

这样，为确定 c^* 只须对(13)右端的第 3 式求解极值问题．用微分法不难算出

$$c^*=c_1+k(S-s_0)\left(\sqrt{\frac{\lambda}{k}}-1\right) \quad (15)$$

这就是使商店利润达到最大的广告费的最优值．将(15)代入(11)的第 3 式可得

$$s(c^*)=S-\sqrt{\frac{k}{\lambda}}(S-s_0) \tag{16}$$

即在最优值 c^* 下的潜在购买量是从上界 S 中减去一部分，这部分与 $S-s_0$ 成正比，且随着广告费用 k(单价)的增加而增加，随着 λ(参看(12)式)的增加而减少.

最后，将(16)代入(15)式得到购进量 u 的最优值为

$$u^*(c^*)=\frac{b-a}{b}\left[S-\sqrt{\frac{k}{\lambda}}(S-s_0)\right] \tag{17}$$

评注 这个模型引入潜在购买量作为广告费的函数，将随机需求量的概率分布与广告费联系起来，从而确定了平均利润和购进量、广告费之间的关系. 一个值得商榷的地方是需求量呈均匀分布的假设，不过这不是本质的，如果代之以根据实际情况得到的其他概率分布，可以类似地求解. 关于潜在购买量的函数 $s(c)$，也可以依据具体问题选用其他形式. 另外，这个模型没有考虑贮存费，读者可以把这项费用加上，看看结果有哪些变化(习题3).

12.4 轧钢中的浪费

用连续热轧方法制造钢材时要经过两道工序，第一道是粗轧(热轧)，形成钢材的雏形；第二道是精轧(冷轧)，得到规定长度的钢材. 粗轧时由于设备、环境等方面随机因素的影响，钢材冷却后的长度大致上呈正态分布，其均值可以在轧制过程中由轧机调整，而其均方差则是由设备的精度决定的，不能随意改变. 精轧时把多出规定长度的部分切掉，但是如果发现粗轧后的钢材已经比规定长度短，则整根报废. 精轧设备的精度很高，轧出的成品材可以认为是完全符合规定长度要求的[4].

根据轧制工艺的要求，要在成品材规定长度 l 和粗轧后钢材

长度的均方差 σ 已知的条件下，确定粗轧后钢材长度的均值 m，使得当轧机调整到 m 进行粗轧，再通过精轧以得到成品材时的浪费最少．

问题分析 粗轧后钢材长度记作 x，x 是均值 m、均方差 σ 的正态随机变量，x 的概率密度记作 $p(x)$，如图 12－7 所示，其中 σ 已知，m 是待确定的值．当成品材的规定长度 l 给定后，记 $x \geq l$ 的概率为 P，即 $P=P(x \geq l)$，P 是图中阴影部分面积．

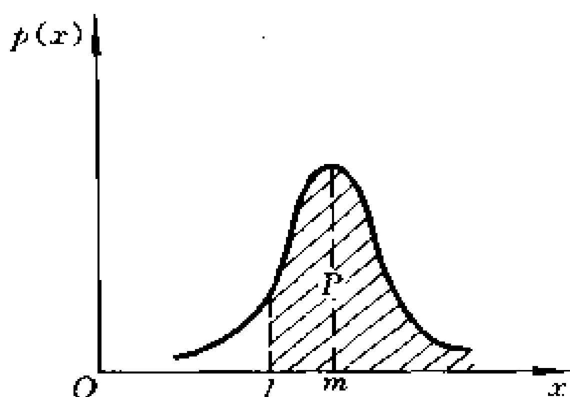


图12－7 钢材长度x的概率密度

轧制过程中的浪费由两部分构成．一是当 $x \geq l$ 时，精轧时要切掉长 $x-l$ 的钢材；二是当 $x<l$ 时，长 x 的整根钢材报废．由图可以看出，m 变大时曲线右移，概率 P 增加，第一部分的浪费随之增加，而第二部分的浪费将减少；反之，当 m 变小时曲线左移，虽然被切掉的部分减少了，但是整根报废的可能将增加．于是必然存在一个最佳的 m，使得两部分的浪费综合起来最小．

这是一个优化模型，建模的关键是选择合适的目标函数，并用已知的和待确定的量 l，σ，m 把目标函数表示出来．一种很自然的想法是直接写出上面分析的两部分浪费，以二者之和作为目标函数，于是容易得到总的浪费长度为

$$W=\int_{l}^{\infty}(x-l)p(x)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{l}xp(x)\mathrm{d}x \;^{*)} \qquad (1)$$

*）实际上，钢材长度 x 不可能取负值．但是因为通常 l，$m \gg \sigma$，x 取负值的概率极小，式中积分下限取 $-\infty$ 是为了下面表示和计算的方便．

利用 $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\mathrm{d}x=1$，$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\mathrm{d}x=m$ 和 $\int_{l}^{\infty} p(x)\mathrm{d}x=P$，(1)式可化简为

$$W=m-lP \tag{2}$$

W 是每粗轧一根钢材浪费的平均长度. 设想共粗轧了 N 根钢材(N 很大)，所用钢材总长为 mN，N 根中可以轧出成品材的只有 PN 根，成品材总长为 lPN，于是共浪费的长度为 $mN-lPN$，平均每粗轧一根钢材浪费长度为

$$\frac{mN-lPN}{N}=m-lP \tag{3}$$

与(2)式相同. 以 W 为目标函数是否合适呢?

轧钢的最终产品是成品材，浪费的多少不应以每粗轧一根钢材的平均浪费量为标准，而应该用每得到一根成品材浪费的平均长度来衡量. 为了将目标函数从前者(即(3)式所表示的)改成后者，只需将(3)式左端分母 N 改为成品材总数 PN 即可.

建模与求解 以每得到一根成品材浪费钢材的平均长度为目标函数. 因为当粗轧 N 根钢材时浪费的总长度是 $mN-lPN$，而只得到 PN 根成品材，所以目标函数为

$$J_1=\frac{mN-lPN}{PN}=\frac{m}{P}-l \tag{4}$$

因为 l 是已知常数，所以目标函数可等价地只取上式右端第一项，即

$$J(m)=\frac{m}{P(m)} \tag{5}$$

式中 $P(m)$ 表示概率 P 是 m 的函数. 实际上，$J(=J_1+l)$ 恰是每得到一根成品材所需钢材(粗轧后)的平均长度.

下面求 m 使 $J(m)$ 达到最小. 对于表达式

$$P(m)=\int_{l}^{\infty}p(x)\mathrm{d}x\,,\quad p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{6}$$

作变量代换

$$y=\frac{x-m}{\sigma} \tag{7}$$

并令

$$\mu=\frac{m}{\sigma}\,,\quad \lambda=\frac{l}{\sigma} \tag{8}$$

则(5)式可表为

$$J(\mu)=\frac{\sigma\mu}{\Phi(\lambda-\mu)} \tag{9}$$

其中 $\Phi(z)$是标准正态变量的分布函数，即 *)

$$\Phi(z)=\int_{z}^{\infty}\varphi(y)\mathrm{d}y\,,\quad \varphi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} \tag{10}$$

$\varphi(y)$是标准正态变量的密度函数. 再设

$$z=\lambda-\mu \tag{11}$$

用微分法解函数

$$J(z)=\frac{\sigma(\lambda-z)}{\Phi(z)} \tag{12}$$

的极值问题. 注意到 $\Phi'(z)=-\varphi(z)$，不难推出 z 的最优值 z^* 应满足方程

$$F(z)=\lambda-z\,,\quad F(z)=\Phi(z)/\varphi(z) \tag{13}$$

$F(z)$可根据标准正态分布的函数值 Φ 和 φ 制成表格(简表见表12－1)或绘出图形(略图如图12－8). 由表或图可以得到方程

---

*) 通常，分布函数定义为$\Phi_1(z)=\int_{-\infty}^{z}\varphi(y)\mathrm{d}y$，这时有$\Phi(z)=1-\Phi_1(z)$

(13)的根 z^*，再代回(11)和(8)式即得到 m 的最优值 m^*．

表 12－1　$F(z)=\Phi(z)/\varphi(z)$ 简表

z	−3.0	−2.5	−2.0	−1.5	−1.0	−0.5
$F(z)$	227.0	56.79	18.10	7.206	3.477	1.680
z	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$F(z)$	1.253	0.876	0.656	0.516	0.420	0.355

值得指出的是，对于给定的 $\lambda > F(0)=1.253$ [*]，方程(13)不只一个根，但是可以证明，只有唯一负根 $z^*<0$，才使 $J(z)$ 取得极小值(习题 6)．

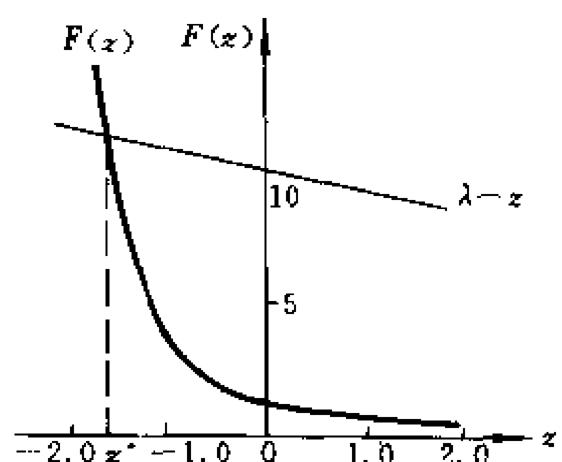


图 12－8　$F(z)$ 的图形及(13)的图解法

试看下面的例子，设要轧制长 $l=2.0$ 米的成品钢材，由粗轧设备等因素决定的粗轧冷却后钢材长度的均方差 $\sigma=20$ 厘米，问这时钢材长度的均值 m 应调整到多少才使浪费最少．

以(5)式给出的 $J(m)$ 为目标函数，由(8)式算出 $\lambda=l/\sigma=10$，解出方程(13)的负根为 $z^*=-1.78$(需要用更精细的 $F(z)$ 表)，如图 12－8 所示．由(11)和(8)式算得 $\mu^*=11.78$，$m^*=2.36$，即最佳的均值应调整为 2.36 米．还可以算出，$P(m^*)=0.9625$，按照(4)式每得到一根成品材浪费钢材的平均长度为 $J_1=\dfrac{m^*}{P(m^*)}-l=0.45$(米)．为了减小这个相当可观的数字，应该设法提高粗轧设备的精度，即减小 σ(习题 7)．

评注　模型中假定当粗轧后钢材长度 x 小于规定长度 l 时就整根报废，实际上这种钢材还常常能轧成短一些，譬如长 $l_1(<l)$

*) 通常 $l \gg \sigma$，故对于 $\lambda=l/\sigma$，这个条件是容易满足的．

的成品材．只有当 $x < l_1$ 时才报废．或者当 $x < l$ 时可以降级使用（对浪费打一折扣）．这些情况下的模型及求解就比较复杂了（习题 8）．

在日常生产活动中类似的问题很多，如某种物品包装成 500 克一袋出售，在众多因素的影响下包装封口后一袋的重量是随机的，不妨仍认为服从正态分布，均方差已知，而均值可以在包装时调整．出厂检验时精确地称量每袋的重量，多于 500 克的仍按 500 克一袋出售，厂方吃亏；不足 500 克的降价处理，或打开封口返工，或直接报废，将给厂方造成更大的损失．问如何调整包装时每袋重量的均值使厂方损失最小．至于生活中类似的现象常常难以完全用数量描述，如你从家中出发去车站赶火车，由于途中各种因素的干扰，到达车站的时间是随机的，但是平均时间可以控制．到达太早白白浪费时间，到达晚了则赶不上火车，损失巨大．你如何权衡两方面的影响来决定出发时间呢？

12.5 随机性人口模型

我们在 1.4 节、5.7 节和 8.4 节讨论的人口模型都是确定性的，已知初始人口并且给定了生育率、死亡率等数据后，可以确切地预测未来的人口．但是事实上，一个人的出生和死亡应该说是随机事件，无法准确预测．之所以能用确定性模型描述人口的发展，是因为考察的是一个国家或地区的数量很大的人口，用对总数而言的平均生育率、死亡率代替出生、死亡的概率，将人口作为连续变量处理．如果研究对象是一个自然村落或一个家族的人口，数量不大，需作为离散变量看待时，就要利用随机性人口模型来描述其变化过程了[30,35]．

时刻 t 的人口用随机变量 $X(t)$ 表示，$X(t)$ 只取整数值．记 $P_n(t)$ 为 $X(t)=n$ 的概率，$n=0,1,2,\cdots$．下面要在对出生和死亡的概率作出适当假设的基础上，寻求 $P_n(t)$ 的变化规律，并由

此得出人口 $X(t)$的期望和方差，用它们在随机意义下描述人口的发展状况.

模型假设 若 $X(t)=n$，对人口在 t 到 $t+\Delta t$ 的出生和死亡作如下假设(Δt 很小):

1. 出生一人的概率与 Δt 成正比，记作 $b_n \Delta t$；出生二人及二人以上的概率为 $o(\Delta t)$[*].

2. 死亡一人的概率与 Δt 成正比，记作 $d_n \Delta t$；死亡二人及二人以上的概率为 $o(\Delta t)$.

3. 出生与死亡是相互独立的随机事件.

4. 进一步设 b_n 和 d_n 均与 n 成正比，记 $b_n=\lambda n$，$d_n=\mu n$，λ 和 μ 分别是单位时间内 $n=1$ 时一个人出生和死亡的概率.

建模与求解 为了得到 $P_n(t)$的方程，考察随机事件 $X(t+\Delta t)=n$. 根据假设 1 ~ 3，与出生或死亡一人的概率相比，出生或死亡二人及二人以上的概率，出生一人且死亡一人的概率均可忽略. 这样，$X(t+\Delta t)=n$ 可以分解为仅仅三个互不相容的事件之和：$X(t)=n-1$ 且 Δt 内出生一人；$X(t)=n+1$ 且 Δt 内死亡一人；$X(t)=n$ 且 Δt 内没有人出生或死亡. 按照全概率公式有

$$P_n(t+\Delta t)=P_{n-1}(t)b_{n-1}\Delta t+P_{n+1}(t)d_{n+1}\Delta t + P_n(t)(1-b_n\Delta t-d_n\Delta t) \tag{1}$$

由此可得关于 $P_n(t)$的微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}t}=b_{n-1}P_{n-1}(t)+d_{n+1}P_{n+1}(t)-(b_n+d_n)P_n(t) \tag{2}$$

特别地，在假设 4 下方程为

$$\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}t}=\lambda(n-1)P_{n-1}(t)+\mu(n+1)P_{n+1}(t)-(\lambda+\mu)nP_n(t) \tag{3}$$

---

*) $o(\Delta t)$表示 Δt 的高阶小量.

若初始时刻($t=0$)人口为确定数量 n_0，则 $P_n(t)$的初始条件为

$$P_n(0)=\begin{cases}1, & n=n_0\\ 0, & n\neq n_0\end{cases} \tag{4}$$

(3)式对于不同的 n 是一组递推方程，在条件(4)下的求解过程非常复杂，并且没有简单的结果．幸而，通常人们对(3)式的解 $P_n(t)$并不关心，感兴趣的只是 $X(t)$的期望 $E(X(t))$(以下简记作 $E(t)$)和方差 $D(t)$，而它们可以由(3)、(4)直接得到．因为按照定义，

$$E(t)=\sum_{n=1}^{\infty} n\,P_n(t) \tag{5}$$

对(5)求导并将(3)代入得

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\lambda\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)P_{n-1}(t)+\mu\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)P_{n+1}(t)$$

$$-(\lambda+\mu)\sum_{n=1}^{\infty} n^2 P_n(t) \tag{6}$$

注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)P_{n-1}(t)=\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)P_k(t)\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)P_{n+1}(t)$$

$=\sum\limits_{k=1}^{\infty} k(k-1)P_k(t)$，代入(6)式并利用(5)式，则有

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=(\lambda-\mu)\sum_{n=1}^{\infty} n\,P_n(t)=(\lambda-\mu)E(t) \tag{7}$$

由(4)可以写出 $E(t)$的初始条件

$$E(0)=n_0 \tag{8}$$

显然，方程(7)在(8)下的解为

$$E(t)=n_0 e^{rt},\quad r=\lambda-\mu \tag{9}$$

这个结果与 1.4 节(3)式表示的指数模型．

$$x(t)=x_0 e^{rt} \tag{10}$$

形式上完全一致．从含义上看，随机性模型(9)中出生概率 λ 与

死亡概率 μ 之差 r 可称为净增长概率，人口的期望值 $E(t)$ 呈指数增长．在人口数量很多的情况下如果将 r 视为平均意义上的净增长率，那么 $E(t)$ 就可以看成确定性模型(10)中的人口总数 $x(t)$ 了．

对于方差 $D(t)$，按照定义

$$D(t)=\sum_{n=1}^{\infty} n^2 P_n(t)-E^2(t) \tag{11}$$

用类似求 $E(t)$ 的方法可以推出(习题9)

$$D(t)=n_0\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}e^{(\lambda-\mu)t}\left[e^{(\lambda-\mu)t}-1\right] \tag{12}$$

$D(t)$ 的大小表示了人口 $X(t)$ 在期望值 $E(t)$ 附近的波动范围．(12)式说明这个范围不仅随着时间的延续和净增长概率 $r=\lambda-\mu$ 的增加而变大，而且即使当 r 不变时，它也随着 λ 和 μ 的上升而增长．这就是说，当出生和死亡频繁出现时，人口的波动范围变大．

评注 从模型假设和得到的人口期望值的结果可以看出，这个随机性模型在确定性人口模型中相对应的，只不过是最简单的指数增长模型．但是即使这样，由方程(3)、(4)求解 $P_n(t)$ 已经相当复杂了．读者可以建立与确定性的阻滞增长(Logistic)模型相对应的随机性模型(习题10)．由这个模型，不仅 $P_n(t)$ 而且 $E(X(t))$ 都难以求出，甚至不知道 $E(X(t))$ 是否与确定性阻滞增长模型的结果(1.4节(7)式)一致．所以本节的讨论作为人口模型并没有多大的意义，但是作为一般的生灭过程，特别是从假设1～3得到的模型(2)式有着广泛的用途，如电梯的升降、交通路口的通过以及各种排队现象，都可以在适当的假设下用生灭过程的模型描述，我们将在后面的章节中加以讨论．

12.6 零件的预防性更换

在生产设备或科学仪器中长期运行的零部件，如滚珠、轴承、电器元件等会突然发生故障或损坏，即使是及时更换也已经造成了一定的经济损失．如果在零件运行一定时期后，就对尚属正常的零件做预防性更换，以避免一旦发生故障带来的损失，从经济上看是否更为合算？ 如果合算，做这种预防性更换的时间如何确定呢？[52]．

显然，解决这个问题的关键在于恰当地估计零件能够正常运行的时间，简称为零件的**寿命**．由于零件在制造及运行过程中各种随机因素的影响，它的寿命是随机变量．通过试验数据的统计处理和理论分析，可以确定零件寿命的分布函数、概率密度和平均寿命等数字特征．下面先介绍两个基本概念和几种常见的连续型寿命分布，再讨论零件的预防性更换问题．

可靠度和失效率 用随机变量 X 表示零件的寿命，其分布函数 $F(t)=P(X\leqslant t)$表示零件寿命不超过时间 t 的概率（即在时刻 t 之前失效）．X 的概率密度记为$f(t)$．寿命大于t的概率记为 $R(t)$，即

$$R(t)=P(X>t)=1-F(t) \tag{1}$$

称为零件的**可靠度**，显然有 $R(0)=1$，$R(\infty)=0$．按照定义和简单的推导，平均寿命即 X 的期望为（设积分收敛）：

$$EX=\int_0^{\infty} t\,\mathrm{d}F(t)=\int_0^{\infty} R(t)\mathrm{d}t \tag{2}$$

设零件运行到时刻 t 仍然正常，则它在$(t, t+\Delta t]$内失效的概率为

$$P(X\leqslant t+\Delta t\mid X>t)=\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{1-F(t)}\approx\frac{f(t)\Delta t}{R(t)} \tag{3}$$

定义

$$r(t)=\frac{f(t)}{R(t)} \tag{4}$$

称为**失效率**，是条件概率密度，当 Δt 很小时 $r(t)\Delta t$ 表示零件在 t 以前正常运行条件下，在 $(t, t+\Delta t]$ 内失效的概率．在实际应用中让 N 个零件同时运行，记 $n(t)$ 为时刻 t 以前失效的个数，$\Delta n(t)$ 为这时单位时间内失效的个数，则 $\dfrac{\Delta n(t)}{N-n(t)}\approx r(t)$．典型的失效率曲线如图 12－9，呈浴盆形状，分三个阶段．第Ⅰ阶段是早期失效期，主要由材料或工艺制造上的缺陷引起，应通过检验剔除一批不合格品，待零件渡过这一阶段后再投入运行．第Ⅱ阶段为偶然失效期，$r(t)$ 基本上保持不变，是零件的最佳使用阶段．第Ⅲ阶段是老化失效期，由于磨损、老化等原因失效率迅速上升，应采取维修或更换等手段维持设备的正常运行．

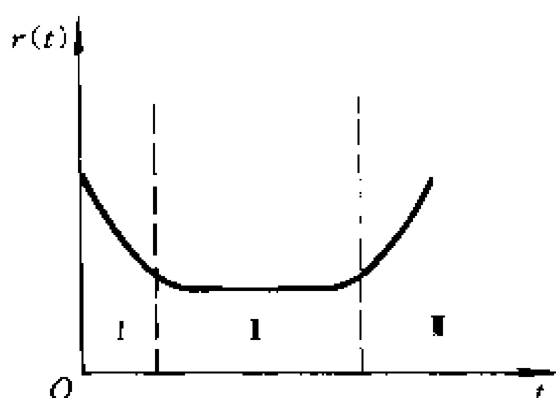


图 12－9 典型的失效率曲线

常见的寿命分布

1．**指数分布** 设失效率 $r(t)$ 为常数 λ，即当零件正常运行到时刻 t 后，在 $(t, t+\Delta t]$ 内失效的概率为 $\lambda\Delta t$，与 t 无关，那么用 $r(t)=\lambda$ 代入(4)、(1)式可得

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\lambda[1-F(t)] \tag{5}$$

在初始条件 $F(0)=0$ 下方程(5)的解为

$$F(t)=1-e^{-\lambda t},\quad t\geqslant 0, \lambda>0 \tag{6}$$

零件寿命 X 称为服从参数 λ 的指数分布．它最重要的性质是"无记忆性"，即当零件运行了时间 t 后如果仍正常，则从 t 开始它和

新的一样，寿命仍服从原来的指数分布，用式子表示就是（证明留作习题 13）

$$P(X>t+\tau \mid X>t)=P(X>\tau)=e^{-\lambda\tau} \tag{7}$$

在典型失效率曲线的第Ⅱ阶段（图 12－9），寿命大致上服从指数分布.

由(1)、(2)式容易得到指数分布的概率密度、可靠度和平均寿命分别为

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda t} \tag{8}$$

$$R(t)=e^{-\lambda t} \tag{9}$$

$$EX=1/\lambda \tag{10}$$

2. **Γ 分布**　若随机变量 X 的概率密度为

$$f(t)=\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}(\lambda t)^{\alpha-1}e^{-\lambda t},\quad t\geqslant 0,\ \alpha,\lambda>0 \tag{11}$$

称 X 服从参数为 α,λ 的 Γ 分布，记为 $\Gamma(\alpha,\lambda)$，其中 α 称形状参数，λ 称尺度参数，$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x$．显然，$\alpha=1$ 时 Γ 分布即为指数分布．并且可以证明，若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 均为参数 λ 的指数分布，且相互独立，则 $X=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 服从 $\Gamma(n,\lambda)$分布．利用(4)、(11)式还不难写出 Γ 分布的失效率为

$$r(t)=\left[\int_0^{\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}e^{-\lambda x}\mathrm{d}x\right]^{-1} \tag{12}$$

由(12)式可知，当 $\alpha<1$ 时 $r(t)$为减函数；$\alpha>1$ 时 $r(t)$为增函数.

Γ分布的概率密度曲线和失效率曲线如图 12－10. 若某零件的失效率不是常数，而是有下降或上升的趋势，则可以考虑采用 $\alpha<1$ 或 $\alpha>1$ 的 Γ 分布描述.

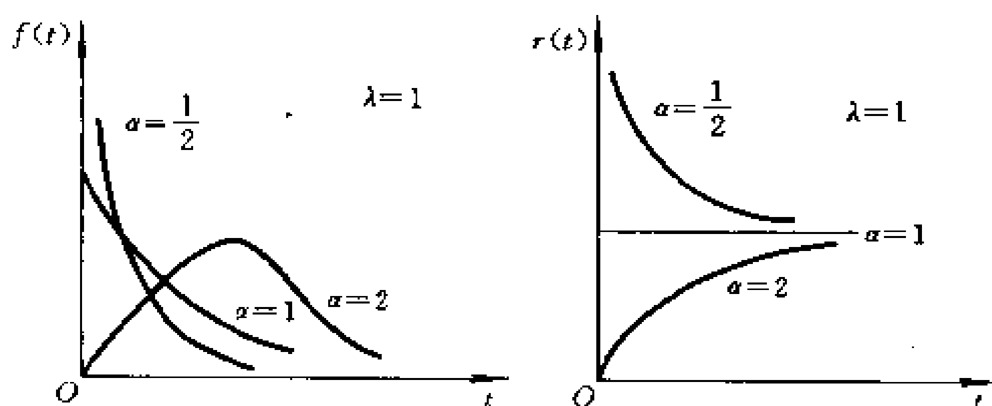


图 12－10　Γ 分布的概率密度曲线 $f(t)$ 和失效率曲线 $r(t)$
（$\alpha=1$ 时即为指数分布）

容易算出 $\Gamma(\alpha,\lambda)$ 分布的平均寿命为

$$EX=\frac{\alpha}{\lambda} \tag{13}$$

3. **威布尔分布**（Weibull）　若 X 的概率密度为

$$f(t)=\lambda\alpha(\lambda t)^{\alpha-1}\exp[-(\lambda t)^{\alpha}],\quad t\geqslant 0,\alpha,\lambda>0 \tag{14}$$

称 X 服从参数 α，λ 的威布尔分布，记作 $W(\alpha,\lambda)$，其中 α，λ 分别为形状参数和尺度参数．当 $\alpha=1$ 时也转化为指数分布．可以算出 $W(\alpha,\lambda)$ 分布的可靠度和失效率分别为

$$R(t)=\exp[-(\lambda t)^{\alpha}] \tag{15}$$

$$r(t)=\lambda\alpha(\lambda t)^{\alpha-1} \tag{16}$$

$r(t)$ 当 $\alpha<1$ 时是减函数，当 $\alpha>1$ 时是增函数．

威布尔分布的概率密度和失效率曲线如图 12－11．它广泛地用于描述真空管、轴承等零器件的寿命分布．

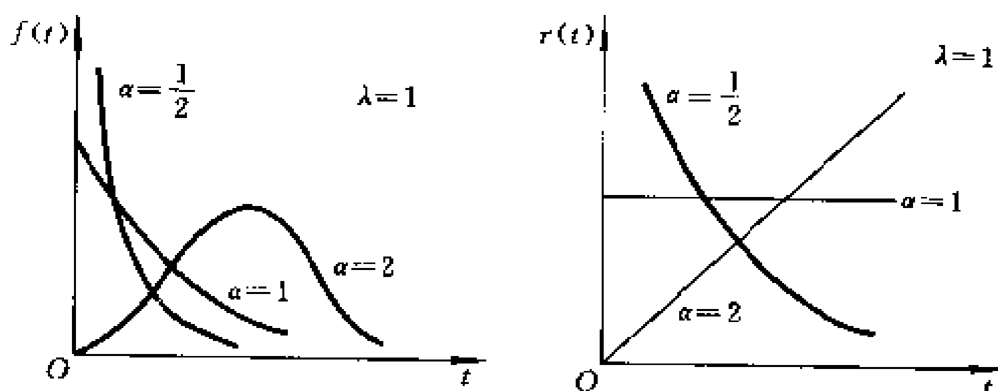


图 12－11　威布尔分布的概率密度曲线 $f(t)$ 和失效率曲线 $r(t)$
（$\alpha=1$ 时即为指数分布）

容易算出 $W(\alpha,\lambda)$分布的平均寿命为

$$EX=\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\Big/\lambda \tag{17}$$

预防性更换策略 设某零件寿命 X 的分布函数为 $F(t)$，平均寿命为 μ. 若零件发生故障后更换带来的损失为 c_1，未发生故障而采取预防性更换的费用为 c_2，显然 $c_1>c_2$. 所谓预防性更换策略是指，确定一个时间 T，当零件寿命 $X<T$ 时进行故障后更换，当 $X=T$ 仍然正常时进行预防性更换(假定更换所需时间忽略不计)，使得长期运行时的经济损失最小.

这是一个随机性优化模型，目标函数取为单位时间的平均损失. 零件每更换一次称为一个周期，周期的平均长度为

$$L=\int_0^T t\,\mathrm{d}F(t)+\int_T^\infty T\,\mathrm{d}\,F(t) \tag{18}$$

一个周期内的平均损失是

$$c=c_1F(T)+c_2[1-F(T)] \tag{19}$$

单位时间的平均损失定义为

$$\bar{c}(T)=\frac{c}{L} \tag{20}$$

将(18)、(19)式化简后代入(20)式可得

$$\bar{c}(T)=\frac{(c_1-c_2)F(T)+c_2}{T-\int_0^T F(t)\mathrm{d}t} \tag{21}$$

简单的求导运算可以推出使 $\bar{c}(T)$取极小值的 T 应满足

$$r(T)\int_0^T R(t)\mathrm{d}t-F(T)=\frac{c_2}{c_1-c_2} \tag{22}$$

其中 R 为可靠度(见(1)式)，r 为失效率(见(4)式).

下面的问题是讨论方程(22)在什么条件下有解及怎样求解.

记(22)式的左端为

$$h(T)=r(T)\int_0^T R(t)\mathrm{d}t-F(T) \tag{23}$$

显然 $h(0)=0$. 又因为平均寿命 $\mu=\int_0^\infty R(t)\mathrm{d}t$, 有 $h(\infty)=\mu r(T)-1$, 并且 $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}T}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}T}\int_0^T R(t)\mathrm{d}t$. 用 $h(0)$, $h(\infty)$和 $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}T}$ 的结果考察(23)、(22)式, 可以得到如下的结论:

若 $r(t)$为增函数且

$$\mu r(\infty)>\frac{c_1}{c_1-c_2} \tag{24}$$

则存在唯一的有限的 T 满足(22), 使 $\bar{c}(T)$达到最小, 且

$$\bar{c}(T)=(c_1-c_2)r(T) \tag{25}$$

如果这样的 T 找不到, 我们就说不存在预防性更换策略, 即不存在比故障后更换平均损失更小的预防性更换策略. 不难验证当 $r(t)$为常数时(寿命服从指数分布)即是这种情况(习题14).

例题 设某零件寿命服从 $\alpha=2$, $\lambda=1$ 的 Γ 分布, $\frac{c_1}{c_2}=3$. 问是否存在预防性更换策略, 若存在, 如何确定更换时间 T, 单位时间的最小平均损失是多少?

对于 $\Gamma(2,1)$分布, 按照(11)式其概率密度为

$$f(t)=te^{-t} \tag{26}$$

于是可以得到 $F(t)=1-(1+t)e^{-t}$, $R(t)=(1+t)e^{-t}$, $r(t)=\frac{t}{1+t}$, $\mu=2$, $\mu r(\infty)=2$, $\frac{c_1}{c_1-c_2}=\frac{3}{2}$. 满足 $r(t)$为增函数和(24)的条件, 故存在预防性更换策略, 且更换时间 T 满足方

程(22). 将上面的结果代入(22)得

$$2e^{-T}=3-T \tag{27}$$

在这种策略下单位时间的平均损失为

$$\bar{c}(T)=(c_1-c_2)r(T)=2c_2\frac{T}{T+1} \tag{28}$$

评注 按照常识, 对于随机失效的零件采取预防性更换的策略是合理的, 现实生活中也有此例. 但是根据本节讨论的模型, 从平均损失最小的角度出发, 预防性更换策略的存在是有条件的. 从(24)式看, 平均寿命越长, 失效率增长越快, 或者故障后更换与预防性更换的费用比 c_1/c_2 越大, 越倾向于采用预防性更换策略. 值得注意的是, 对于常用的寿命服从指数分布的零件, 不存在这种预防性更换策略.

在本节讨论的策略中要记录更换后零件的运行时间, 不妨称为年龄, 当年龄达到 T 仍正常时才更换, 可称作年龄更换策略. 另一种策略是每过时间 T 就更换一次, 不管在这过程中是否进行过故障后更换, 称作成批更换策略. 意思是当有多个零件运行时,

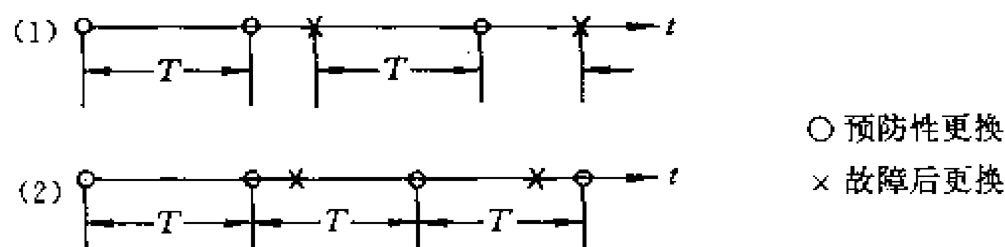


图 12-12 (1)年龄更换策略 (2)成批更换策略

在一定时刻 $kT(k=1,2,\cdots)$成批地对它们作预防性更换. 这两种更换策略的差别如图 12-12 所示. 看来成批更换策略更便于应用, 但是它的计算比较复杂.

12.7 设备检查方案

生产车间里应该经常检查各种设备的完好状况, 以便及时发

现和排除故障，保证生产的顺利进行. 接连两次检查的时间间隔称为检查周期，本节所谓设备检查方案即指确定检查周期. 设备出现故障的时刻是随机的，一旦出现故障，假定设备将带故障运行到下一次检查时才被发现，这会造成相当大的损失. 显然，检查周期越长，损失越大，另一方面，检查需付费用，周期越短，检查费越多. 于是需要建立一个随机性优化模型，根据对故障的随机规律、损失费、检查费等作的假设，确定检查周期使总的平均费用最小[20].

一般地说，检查周期不一定是常数，而应该根据故障出现时刻的概率分布来确定，在故障概率大的时候检查周期短，故障概率小时检查周期长. 故障概率要用连续型分布函数来描述，相应地，我们把检查周期表示为时刻 t 的函数，记作 $s(t)$，并且假设它连续. 这样，单位时间内的检查次数也是 t 的函数，记作 $n(t)$，显然 $n(t)=1/s(t)$. 通常，与设备正常运行的时间相比，检查周期很短，因而 $n(t)$ 很大，可以视 $n(t)$ 为连续函数.

模型假设

1. 设备故障时刻的概率分布函数为 $F(t)$，概率密度为 $f(t)$，设备使用期限是 T，于是 $F(T)=1$.

2. 设备带故障运行到检查时为止的损失与这段运行时间成正比，比例系数 c_1 即为单位时间损失费.

3. 因为单位时间检查次数 $n(t)$ 很大，所以在相邻两次检查之间出现故障的时刻可认为是均匀分布的，而带故障运行的时间则取这个分布的均值.

4. 每次检查费为 c_2，到时刻 t 为止的检查次数可表示为

$$\int_0^t n(\tau)\mathrm{d}\tau .$$

建模与求解　设备运行一直到某次检查发现故障或到使用期限 T 为止，优化模型的目标函数取作这样一次运行的总费用（损

失费与检查费)的期望值.

若设备在 $[t, t+\Delta t]$ 内发生故障，由假设 3 故障时刻在周期 $s(t)$内呈均匀分布，均匀分布的均值等于分布区间的一半，所以带故障运行时间为 $s(t)/2=1/2n(t)$. 再由假设 2 损失费为 $c_1/2n(t)$. 根据假设 4，检查费为 $c_2\int_0^t n(\tau)\mathrm{d}\tau$. 于是总费用为

$$\frac{c_1}{2n(t)}+c_2\int_0^t n(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

由假设 1，设备在一次运行中总费用的期望值为

$$c(n(t))=\int_0^T\left[\frac{c_1}{2n(t)}+c_2\int_0^t n(\tau)\mathrm{d}\tau\right]f(t)\mathrm{d}t \tag{1}$$

$c(n(t))$是 $n(t)$的泛函. 为了把求 $n(t)$使 $c(n(t))$达到最小的泛函极值问题化为 7.8 节中的形式(7.8 节中的(7)式)，令

$$x(t)=\int_0^t n(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2}$$

$x(t)$是到 t 为止的检查次数. (1)式化为

$$c(x(t))=\int_0^T\left[\frac{c_1}{2\dot{x}(t)}+c_2x(t)\right]f(t)\mathrm{d}t \tag{3}$$

$x(t)$的端点条件显然是

$$x(0)=0,\quad x(T)\text{自由} \tag{4}$$

(3)、(4)是一端固定、一端自由的泛函极值问题.

利用欧拉方程(7.8 节中的(11)式)可得 $x(t)$应满足

$$c_2f(t)+\frac{c_1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{f(t)}{\dot{x}^2(t)}\right)=0 \tag{5}$$

积分(5)式并注意到 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=f(t)$，有

$$c_2 F(t)+\frac{c_1}{2}\frac{f(t)}{\dot{x}^2(t)}=k \tag{6}$$

令积分常数 $k=c_2a$（a 是另一常数），则

$$\frac{f(t)}{\dot{x}^2(t)}=\frac{2c_2}{c_1}[a-F(t)] \tag{7}$$

用自由端点的横截条件确定常数 a. 根据 7.8 节的 (21) 式,

$$\left.\frac{f(t)}{\dot{x}^2(t)}\right|_{t=T}=0 \tag{8}$$

将 (8) 代入 (7) 式并由假设 1 的 $F(T)=1$，立即有 $a=1$. 于是

$$\frac{1}{\dot{x}^2(t)}=\frac{2c_2}{c_1}\frac{1-F(t)}{f(t)} \tag{9}$$

根据 (2) 式和 $x(0)=0$ 得到

$$n(t)=\sqrt{\frac{c_1}{2c_2}\frac{f(t)}{1-F(t)}} \tag{10}$$

这就是使总的期望费用达到最小的检查次数函数. 若将设备的正常运行时间视作寿命，$F(t)$为寿命的分布函数，引用 12.6 节可靠度和失效率的概念和记号，(10)又可表为

$$n(t)=\sqrt{\frac{c_1 r(t)}{2c_2}} \tag{11}$$

其中 $r(t)$是失效率.

我们终于得到 (11) 式这样一个简单的结果. 它表明最优的检查次数 $n(t)$完全由单位时间损失费 c_1、每次检查费 c_2 和设备的失效率 $r(t)$决定. 一般地，$r(t)$随时间 t 变化，那么当 $r(t)$较大的时候，容易出现故障，检查次数 $n(t)$就应该大一些. 这正是 (11) 式所给出的.

特别地，如果设备寿命服从参数 λ 的指数分布 (12.6 节 (6)式)，失效率为常数 $r(t)=\lambda$，且平均寿命 $\mu=1/\lambda$，则 (11) 式给出更

加简单的结果：

$$n=\sqrt{\frac{c_1}{2c_2\mu}} \tag{12}$$

单位时间检查次数与 t 无关．或者将检查周期 s 表示为

$$s=\sqrt{\frac{2c_2\mu}{c_1}} \tag{13}$$

s 是常数，即最优检查方案是等周期的．(13)还表明，设备的平均寿命 μ 越长，检查费与损失费之比 c_2/c_1 越大，检查周期应越长．这是符合常识的，而(13)式给出了它们之间的数量关系．容易知道，只有指数分布才能得到这种最简单的最优检查方案．

评注　本来检查次数是对于时间区间而言的，并且只取正整数值，模型中将它视为时刻 t 的连续函数，从而可以利用数学分析的工具，把优化问题归结为泛函极值问题．当然，其中离不开一些合理的简化，如假设 3．

这个模型的目标函数是运行到发现故障为止的总期望费用，而没有采用单位时间的平均费用．事实上如果忽略从设备故障到发现故障这段较小的时间，那么用这两种目标函数来求解最优的 $n(t)$ 是等价的，因为在后者中运行时间的期望与 $n(t)$ 无关．

习　题

1．利用 12.1 节的模型计算，若每份报纸的购进价为 0.15 元，售出价为 0.20 元，退回价为 0.12 元，需求量服从均值 500 份，均方差 50 份的正态分布，报童每天应购进多少份报纸才能使平均收入最高．这个最高收入是多少？

2．在 12.2 节中将假设条件 4 改为一周的销售是均匀进行的，如图 12－4 所示．试确定平均费用最小的策略 S．

3．在 12.3 节中增加考虑贮存费用，设每本书的贮存费为 d，与贮存时间无关．分析结果与 12.3 节有哪些不同．

4．某商店要订购一批商品零售，设购进价 c_1，售出价 c_2，订购费 c_0（与

数量无关)，随机需求量 r 的概率密度为 $p(r)$，每件商品的贮存费为 c_3(与时间无关)．问如何确定订购量才能使商店的平均利润最大．这个平均利润是多少．为使这个平均利润为正值，需要对订购费 c_0 加什么限制?

5．建立交货时间为随机变量的存贮模型．设商品订货费为 c_1，每件商品单位时间的贮存费为 c_2，缺货费为 c_3，单位时间需求量为 r．图 12－13 中 L 称订货点．当贮存量降至 L 时订货，而交货时间 x 是随机的，如图中的 x_1，x_2，…，设 x 的概率密度函数为 $p(x)$．订货量使下一周期初的贮存量达到固定值 Q．为了使总费用最小，选择合适的目标函数建立模型，确定最佳订货点 L．

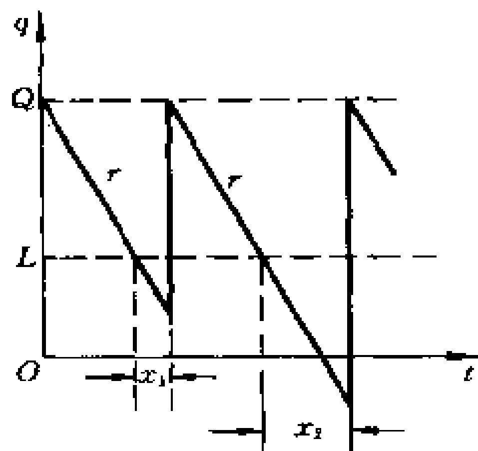


图 12－13

6．在 12.4 节中证明方程(13)仅有一个负根 z^*，并且只有 z^* 才给出 $J(z)$((12)式)的极小值．

7．在 12.4 节给出的例子中，若 $l=2.0$ 米不变，而均方差减为 $\sigma=10$ 厘米，问均值 m 应为多大，每得到一根成品材的浪费量多大(与原来的数值相比较)．

8．若钢材粗轧后，长度在 l_1 与 l 之间时降级使用，长度小于 l_1 才整根报废．试选用合适的目标函数建立优化模型，使某种意义下的浪费量最小．

9．推导 12.5 节的 (12)式．

10．作出与确定性阻滞增长模型相应的假设，建立随机性模型．

11．假设在 12.5 节的模型(2)、(3)式中，只考虑出生、忽略死亡，验证 $P_n(t)$ 满足负二项分布，即

$$P_n(t)=C_{n-1}^{n-n_0}(e^{-\lambda t})^{n_0}(1-e^{-\lambda t})^{n-n_0},\quad n=n_0,n_0+1,\cdots$$

12．考察一种既不同于指数模型，也不同于阻滞增长模型的情况：人口为 $x(t)$，最大允许人口为 x_m，t 到 $t+\Delta t$ 时间内人口增长量与 $x_m-x(t)$ 成正比．

① 建立确定性模型，将结果作图，与指数模型和阻滞增长模型的结果进行比较．

② 作出适当的假设，建立相应的随机性模型，求出人口的期望 $E(X(t))$ 解释 $E(X(t))$ 与① 中 $x(t)$ 在形式上完全一致的意义．

13. 在 12.6 节中证明指数分布具有无记忆性，即(7)式.

14. 若零件寿命服从指数分布，证明不存在 12.6 节给出的预防性更换策略. 又问，若失效率 $r(t)$ 为减函数，结果如何?

第 13 章 马氏链模型

在考察有随机因素影响的动态系统时，常常碰到这样的情况，系统在每个时期所处的状态是随机的，从这个时期到下个时期的状态按照一定的概率进行转移．并且下个时期的状态只取决于这个时期的状态和转移概率，与以前各时期的状态无关．这种性质称为无后效性，或马尔可夫(Markov)性．通俗地说就是，已知现在，将来与历史无关．具有马氏性的，时间、状态均为离散的随机转移过程通常用马氏链(Markov Chain)模型描述．

马氏链模型在经济、社会、生态、遗传等许多领域中有着广泛的应用．值得提出的是，虽然它是解决随机转移过程的工具，但是一些确定性系统的状态转移问题也能用马氏链模型处理．

13.5 节对本章模型用到的马氏链的基本知识作了简单介绍，不熟悉马氏链的读者可先阅读这一节．

13.1 基 因 遗 传

豆科植物茎的颜色有绿有黄，生猪的毛有黑有白，有粗有光，人类会出现先天性疾病如色盲等，这些都是基因遗传的结果．基因从一代到下一代的转移是随机的，并且具有马氏性，因此马氏链模型是研究遗传学的重要工具之一．本节给出的简单模型属于完全优势基因遗传理论的范畴．

生物的外部表征，如豆科植物茎的颜色，人的皮肤或头发，由生物体内相应的基因决定．基因分优势基因和劣势基因两种，分别用 d 和 r 表示．每种外部表征由体内的两个基因决定，而每个基因都可以是 d 或 r 中的一个，于是有三种基因类型，即 dd、dr 和 rr，分别称为优种、混种和劣种，用 D、H 和 R 表示．含优

种 D 和混种 H 基因类型的个体，外部表征呈优势，如豆科植物的茎呈绿色，人的皮肤或头发有色素；含劣种 R 基因类型的个体，外部表征呈劣势，如豆科植物的茎呈黄色，人的皮肤或头发无色素.

生物繁殖时，一个后代随机地继承父亲两个基因中的一个和母亲两个基因中的一个*)，形成它的两个基因. 一般两个基因中哪一个遗传下去是等概率的，所以父母的基因类型就决定了每一个后代基因类型的概率. 父母基因类型的组合有全是优种 DD、全是劣种 RR、一优种一混种 DH（父为 D，母为 H 或父为 H，母为 D）等 6 种状况，简单的计算可以得到对每种组合其后代各种基因类型的概率，如表 13－1 所示.

表 13－1　父母基因类型决定后代各种基因类型的概率

父母基因类型的组合		DD	RR	DH	DR	HH	HR
后代各种	D	1	0	1/2	0	1/4	0
基因类型	H	0	0	1/2	1	1/2	1/2
的概率	R	0	1	0	0	1/4	1/2

下面我们以马氏链为工具讨论两个具体的基因遗传模型[37, 53].

随机交配　这是自然界中生物群体的一种常见的、也是最简单的交配方式. 考察一个群体，假设雄性和雌性的比例永远相等，并且有相同的基因类型分布，即雄性和雌性的 D、H、R 的数量比例相等. 所谓随机交配是指，对于每一个不论属于 D、H 或 R 的雌性（或雄性）个体，都以 $D:H:R$ 的数量比例为概率，与一个属于 D、H 或 R 的雄性（或雌性）个体交配，其后代则按照前面所说的方式，等概率地继承其父母亲的各一个基因，来决定它的基因类型. 假定在初始一代的群体中，三种基因类型的数量比例是

*）本节的模型主要针对人类以外的生物，但是为了叙述的方便，仍沿用父亲、母亲这样的称谓.

$D(dd):H(dr):R(rr)=a:2b:c$，满足 $a+2b+c=1$．记 $p=a+b$，$q=b+c$，则群体中优势基因 d 与劣势基因 r 的数量比例为 $d:r=p:q$，且 $p+q=1$．讨论随机交配方式产生的一系列后代群体中的基因类型分布.

用 $X_n=1,2,3$ 分别表示第 n 代的一个体属于 D、H 及 R 基因类型，即 3 种状态，$n=0,1,2,\cdots$．$a_i(n)$表示个体属于第 i 种状态的概率，$i=1,2,3$，可视为第 n 代的群体属于第 i 种基因类型的比例．转移概率 p_{ij} 可用 $p_{ij}=P$(一个后代具有基因类型 j | 母亲具有基因类型 i)计算*)．在已知母亲基因类型的条件下，后代的基因类型取决于父亲的基因类型．值得指出的是，在计算 p_{ij} 时与其考虑被随机选择为父亲的三种不同基因类型的比例 $a:2b:c$，不如直接考察从雄性群体中以 $p:q$ 的比例获得优势基因 d 和劣势基因 r．譬如 $p_{11}=P$(后代为 $D(dd)$| 母亲为 $D(dd)$)，为使后代是 $D(dd)$只需从雄性群体中以概率 p 获得 d，所以 $p_{11}=p$，类似地有 $p_{12}=P$(后代为 $H(dr)$| 母亲为 $D(dd))=q$，$p_{13}=P$(后代为 $R(rr)$| 母亲为 $D(dd))=0$．而 $p_{21}=P$(后代为 $D(dd)$| 母亲为 $H(dr)$)，后代需以 1/2 的概率从母体获得 d，同时以 p 的概率从雄性群体中获得 d，所以 $p_{21}=\frac{1}{2}\cdot p=p/2$，同理有 $p_{22}=$ P(后代为 $H(dr)$| 母亲为 $H(dr))=\frac{1}{2}\cdot p+\frac{1}{2}\cdot q=\frac{1}{2}$，$p_{23}=q/2$．用同样的方法算出 p_{31}，p_{32}，p_{33} 后得到转移矩阵

$$P=\begin{bmatrix} p & q & 0 \\ p/2 & 1/2 & q/2 \\ 0 & p & q \end{bmatrix} \tag{1}$$

对于基因类型的初始分布，即初始状态概率 $a(0)=(a,2b,c)$，其中 $a,2b,c$ 满足

$$p=a+b,\qquad q=b+c \tag{2}$$

利用马氏链基本方程(13.5 节(8)式)可以得到

*) p_{ij} 中的条件也可用“父亲具有基因概率 i”，结果相同．

$$a(1)=a(0)P=(p^2, 2pq, q^2) \tag{3}$$
$$a(2)=a(1)P=(p^2, 2pq, q^2) \tag{4}$$
显然这个分布将保持下去. 这表明不管初始一代基因类型分布如何, 只要是从群体中随机选择的(即满足(2)式), 那么在随机交配方式中第一代继承者的基因类型分布为$D:H:R=p^2:2pq:q^2$, 并永远不变. 这个结果在遗传学中称 Hardy-Weinberg 平稳定律.

利用 13.5 节定理 1 容易知道(1)式表示的是一个正则链, 由 13.5 节(10)式算出其稳定分布也是$w=(p^2, 2pq, q^2)$. 表明当初始一代不是从群体中选取, 而是任意指定时(如$a(0)=(1,0,0)$), 在随机交配方式下经过足够长时间, 3 种基因类型的分布也趋向上述稳定分布.

这个模型得到的结果的正确性已由观察和实验证明. 如自然界中通常有$p=q=1/2$, 于是三种基因类型的平稳分布为$D:H:R=1/4:1/2:1/4$, 而优种D和混种H的外部表征呈优势. 据观察, 豆科植物茎呈绿色(优势表征)的约占 3/4, 与上面的结果相一致.

最后考察在随机交配下三种基因类型的首次返回平均转移次数, 即平均经过多少代每种基因类型首次回到原来的类型. 据 13.5 节定理 3, D、H、R 类型的首次返回平均换代数目
$$\mu_{11}=1/p^2, \quad \mu_{22}=1/2pq, \quad \mu_{33}=1/q^2 \tag{5}$$
即一个群体中基因d越多(p越大), 基本类型$D(dd)$的平均换代数目越小. 特别, 当$p=q=1/2$时, D、H、R 的平均换代数目分别为 4(代), 2(代)和 4(代).

近亲繁殖 这是指这样一种繁殖方式, 从同一对父母的大量后代中, 随机地选取一雄一雌进行交配, 产生后代, 如此继续下去, 考察一系列后代的基因类型的演变情况.

与前面的模型不同的是, 那里讨论后代群体中基因类型的分布, 只需设置D、H、R三个状态即可. 这里则循着随机选取的雄

雌配对、分析后代配对中基因类型的变化．于是状态应取配对的基因类型组合，设 $X_n=1,2,3,4,5,6$ 依次定义为 DD，RR，DH，DR，HH，HR，构造马氏链模型的关键是写出转移概率．

转移概率 p_{ij} 可根据本节开始给出的表 13－1 算出．首先，显然有 $p_{11}=1$，$p_{1j}=0\ (j\neq 1)$；$p_{22}=1$，$p_{2j}=0\ (j\neq 2)$．因为父母全为优种 D（或劣种 R）时，后代全是优种（或劣种），随机选取的雄雌配对当然也是．$p_{31}=1/4$，因为配对 DH（状态 3）的后代中 D 和 H 各占 1/2，所以随机选取的配对为 DD（状态 1）的概率是 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，而 $p_{33}=P$（后代配对为 DH｜父母配对为 DH）$=P$（后代雄性为 D，雌性为 H｜父母配对为 DH）$+P$（后代雄性为 H，雌性为 D｜父母配对为 DH）$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，同理有 $p_{35}=1/4$．又因配对 DH 的后代中没有 R，故对于含有 R 的状态 2，4，6，有 $p_{32}=p_{34}=p_{36}=0$．其它的 p_{ij} 可以类似地计算（留作习题 1），最后得到转移矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1/16 & 1/16 & 1/4 & 1/8 & 1/4 & 1/4\\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2\end{bmatrix}\qquad(6)$$

容易看出，状态 1（DD）和状态 2（RR）是吸收状态，这是一个吸收链（13.5 节定义 2）．它表明不论最初选取的配对是哪种基因类型组合，经过若干代近亲繁殖，终将变为 DD 或 RR，即变成全是优种或全是劣种，而且一旦如此，就永远保持下去．

为了计算从任一个非吸收状态 3，4，5，6 出发，平均经过多少代就会被吸收状态 1，2 吸收，我们首先将 13.5 节给出的转移

矩阵的标准形式(14)式与上面的 P 进行比较，得到

$$Q=\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/8 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix},\quad R=\begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1/16 & 1/16 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \tag{7}$$

然后按 13.5 节(15)、(16)、(18)式计算

$$M=(I-Q)^{-1}=\begin{bmatrix} 8/3 & 1/6 & 4/3 & 2/3 \\ 4/3 & 4/3 & 8/3 & 4/3 \\ 4/3 & 1/3 & 8/3 & 4/3 \\ 2/3 & 1/6 & 4/3 & 8/3 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$y=Me=\left(4\frac{5}{6},\ 6\frac{2}{3},\ 5\frac{2}{3},\ 4\frac{5}{6}\right)^T \tag{9}$$

$$F=MR=\begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \tag{10}$$

M 的第 1 行至第 4 行依次代表非吸收状态 DH、DR、HH 和 HR，根据 13.5 节定理 4 对于向量 y 的各个分量的解释，开始从 DH 配对的状态出发，在近亲繁殖的情况下平均经过 $4\frac{5}{6}$ 代就会被状态 DD 或 RR 吸收，即全变成优种或劣种．而根据定理 5，变成优种或劣种的概率为矩阵 F 的第 1 行元素，即 3/4 或 1/4．从其他状态 DR、HH 和 HR 出发，可以得到相应的结论．

上述结果的实用价值在于，在农业和畜牧业中常常是纯种(优种或劣种)生物的某些品质(如抗病性)不如混种，所以在近亲繁殖情况下大约经过 5 ~ 6 代就应该重新选种，以防止品质的下降．

13.2 仓 库 管 理

贮物仓库每周或每月清仓一次，检查库存量．假定货物入库量是确定的，而出库量是随机的，其概率分布由需求情况决定．仓库的容量是有限的，希望建立一个模型分析库存量的变化规律，特别是经过多长时间会出现库满或者库空的情况[6]．

时间以时段为离散化单位（周或月），记$t=0,1,2,\cdots$．取库存量为状态，选择合适的单位将状态离散化，记为 $X_t=i$，$i=0,1,2,\cdots,I$．当 $X_t=I$ 时库满，$X_t=0$ 时库空．假定每时段的入库量为 m 个单位，而出库量为随机变量 D_t，D_0，D_1，$D_2\cdots$ 相互独立且具有相同的概率分布：

$$P(D_t=j)=a_j,\quad j=0,1,2,\cdots \tag{1}$$

于是状态满足如下的随机转移规律

$$X_{t+1}=X_t+m-D_t,\quad t=0,1,2,\cdots \tag{2}$$

及约束条件

$$0\leqslant X_t\leqslant I,\quad t=0,1,2,\cdots \tag{3}$$

由于 D_t 之间相互独立，状态 X_t 的转移具有无后效性，所以可以用马氏链模型描述库存量的变化过程．

状态转移概率 p_{ij} 由状态转移规律（2）式和入库量的概率分布（1）式导出，即

$$p_{ij}=P(X_{t+1}=j\mid X_t=i)=P(D_t=i+m-j)=a_{i+m-j},$$
$$i=0,1,\cdots,I,\quad j=1,2,\cdots,I-1 \tag{4}$$

其中当 $i+m-j<0$ 时令 $p_{ij}=0$．为了确定 $j=0$ 和 $j=I$ 时的 p_{ij}，简单地规定当净入库量 $m-D_t$ 为正值时，应保证 $X_{t+1}\leqslant I$，否则减少实际入库量使 $X_{t+1}=0$；当 $m-D_t$ 为负值时应保证 $X_{t+1}\geqslant 0$，否则减少实际出库量使 $X_{t+1}=0$．根据（4）式和这个规定可以写出转移概率矩阵为

$$
P=\begin{array}{c}
\\ (0) \\ (1) \\ (2) \\ \vdots \\ (I-m) \\ (I-m+1) \\ \vdots \\ (I)
\end{array}
\begin{array}{ccccccc}
(0) & (1) & \cdots & (m) & (m+1)\cdots & (I-1) & (I) \\
\end{array}
\left[\begin{array}{ccccccc}
a_0' & a_{m-1} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots\ 0 & 0 \\
a_1' & a_m & \cdots & a_1 & a_0 & \cdots\ 0 & 0 \\
a_2' & a_{m+1} & \cdots & a_2 & a_1 & \ddots & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{I-m}' & a_{I-1} & \cdots & a_{I-m} & a_{I-m-1} & \cdots\ a_1 & a_0 \\
a_{I-m+1}' & a_I & \cdots & a_{I-m+1} & \cdots & \cdots\ a_2 & a_1+a_0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_I' & a_{I+m-1} & \cdots & a_I & \cdots & \cdots\ a_{m+1} & a_m+\cdots+a_0
\end{array}\right]
\tag{5}
$$

其中第 1 列的元素 $a_i'=1-\sum\limits_{k=0}^{i+m-1}a_k$，使行和为 1 .

当给定初始库存量，即初始状态概率向量后，由 13.5 节 (8) 式表示的马氏链基本方程容易算出各时段库存量的概率分布．在一般情况下这是一个正则链 (13.5 节定义 1 和定理 1)，希望得到 t 充分大时库存量的稳态概率分布．为计算简单起见，以下设 $m=1$，于是转移矩阵简化为

$$
P=\begin{array}{c}
\\ (0) \\ (1) \\ (2) \\ \vdots \\ (I-1) \\ (I)
\end{array}
\begin{array}{cccccc}
(0) & (1) & (2) & \cdots & (I-1) & (I) \\
\end{array}
\left[\begin{array}{cccccc}
a_0' & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
a_1' & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\
a_2' & a_2 & a_1 & \ddots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
a_{I-1}' & a_{I-1} & a_{I-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\
a_I' & a_I & a_{I-1} & \cdots & a_2 & a_1+a_0
\end{array}\right]
\tag{6}
$$

记稳态概率向量 $w=(w_0,w_1,\cdots,w_I)$，并设

$$
v_i=\frac{w_i}{w_I},\quad i=0,1,\cdots,I \tag{7}
$$

对于 w 的方程 $w=wP$ (13.5 节 (10) 式)，以 (7) 式代入，注意到显然有 $v_I=1$ 后，立即可以解出 v_i 的一组递推关系：

$$v_{I-1}=\frac{1-a_1-a_0}{a_0}$$

$$v_{I-2}=\frac{1-a_1}{a_0}v_{I-1}-\frac{a_2}{a_0}$$

$$\cdots\cdots \tag{8}$$

$$v_1=\frac{1-a_1}{a_0}v_2-\frac{a_2}{a_0}v_3-\cdots-\frac{a_{I-2}}{a_0}v_{I-1}-\frac{a_{I-1}}{a_0}$$

$$v_0=\frac{1-a_1}{a_0}v_1-\frac{a_2}{a_0}v_2-\cdots-\frac{a_{I-1}}{a_0}v_{I-1}-\frac{a_1}{a_0}$$

因为

$$\sum_{i=0}^{I-1}v_i=\frac{1}{w_I}\sum_{i=0}^{I-1}w_i=\frac{1-w_I}{w_I}$$

所以

$$w_I=\left(\sum_{i=0}^{I-1}v_i+1\right)^{-1} \tag{9}$$

$$w_i=w_I v_i \tag{10}$$

(8)~(10)式完全确定了 w .

最后讨论如何计算平均经过多长时间就会出现库满的情况. 将状态 I 视作吸收状态, (6)式表示的转移矩阵 P 改为

$$P=\begin{array}{c} (0)\\(1)\\ \vdots\\(I-1)\\(I)\end{array}\overset{\begin{array}{cccccc}(0)&(1)&(2)&\cdots&(I-1)&(I)\end{array}}{\left[\begin{array}{ccccc|c} a_0{}' & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a_1{}' & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{I-1}' & a_{I-1} & a_{I-2} & \cdots & a_1 & a_0\\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{array}\right]} \tag{11}$$

形成一个吸收链(13.5 节定义 2). 将 P 与吸收链转移矩阵的标准形式相比较(13.5 节(14)式), 知 Q 是 P 左上角的 $I\times I$ 子阵,

而$R=(0, 0, \cdots, 0, a_0)^T$. 由 13.5 节定理 4 可以计算$M=(I-Q)^{-1}$,和$y=Me$. y的各个分量就是从各个初始库存状态出发($i=0, 1, \cdots, I-1$),到达库满的平均时段数. 如果还知道初始状态的概率分布$p(0)=(p_0, p_1, \cdots, p_{I-1})$,则$p(0)y$即为从初始状态到达库满的加权平均时段数. 而按照 13.5 节定理 5,由各初始状态到达库满的概率分布由$F=MR$给出.

评注 仓库管理实际上是用马氏链模型描述的一个包含随机因素的存贮过程. 这种过程还可以举出其他实例,譬如水库的入库流量是随机的,概率分布由自然条件决定,而出库流量为确定值,以各时段的库容量为状态就构成一个马氏链(习题 5).

可以看出,建立马氏链模型的关键有两条,一是恰当地选取状态,状态要能描述过程的发展状况,通常应该是可以观测的,并且状态的转移要具有无后效性;二是正确地写出转移概率,为此可能要先确定状态转移规律,如本节的(2)式.

模型一旦建立,就可以利用马氏链的相关知识如稳态概率分布、被吸收的平均转移次数等来分析、计算实际对象提出的问题.

13.3 等级结构

在社会系统中常常按照人们的职务或地位划分出许多等级,如大学教师分为教授、讲师和助教,工厂技术人员分为高级工程师、工程师和技术员,军队里有将、校、尉、学生也有研究生、大学生、中学生等. 不同等级人员的比例形成一个等级结构,合适的、稳定的等级结构有利于教学、科研、生产等各方面工作的顺利进行. 因此希望建立一个模型来描述等级结构的变化状况,根据已知条件和当前的结构预报未来的结构,以及寻求为了达到某个理想的等级结构而应采取的策略[3].

引起等级结构变化的因素有两种,一是系统内部等级间的转移,即提升或降级;二是系统内外的交流,即调入或退出(包括

调离、退休、死亡等）．系统各个等级的人员每个时期按一定的比例变化，本是一个确定性的转移问题，但是如果我们把这种比例视为各等级的每个成员提升、降级或退出的概率，就能利用处理随机转移的马氏链模型描述等级结构的变化．当然在这种观点下各等级成员的数量应理解为相应的期望值．为了叙述的统一和方便，以下均采用比例、比例分布等词汇，不称概率、概率分布等．

下面先定义若干基本量，建立基本方程，然后讨论如何调节调入 成员在各等级的比例，保持等级结构的稳定，以及怎样尽快地达到或接近某个理想的等级结构．

基本量与基本方程 设一个社会系统由低到高地分为 k 个等级，如大学教师有助教、讲师、教授 3 个等级．时间以年为单位离散化，即每年进行且只进行一次调级．等级记作 $i=1,2,\cdots,k$，时间记作 $t=0,1,2,\cdots$．引入以下的定义和记号：

成员按等级的分布向量 $n(t)=(n_1(t),\ n_2(t),\ \cdots,n_k(t))$，其中 $n_i(t)$ 为 t 年属于等级 i 的人数；$N(t)=\sum\limits_{i=1}^{k} n_i(t)$ 为系统 t 年的总人数．

成员按等级的比例分布 $a(t)=(a_1(t),\ a_2(t),\ \cdots,a_k(t))$，其中 $a_i(t)=\dfrac{n_i(t)}{N(t)}$，于是有 $a_i(t)\geqslant 0$，$\sum\limits_{i=1}^{k} a_i(t)=1$．$a(t)$ 又称为等级结构．

转移矩阵 $Q=\{p_{ij}\}_{k\times k}$，其中 p_{ij} 为每年从等级 i 转移至等级 j 的成员（在等级 i 中占的）比例．

退出比例向量 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_k)$，其中 w_i 为每年从等级 i 退出系统的成员（在等级 i 中占的）比例；t 年退出系统总人数为

$$W(t)=\sum_{i=1}^{k} w_i n_i(t)=n(t)w^T \tag{1}$$

调入比例向量 $r=(r_1, r_2, \cdots, r_k)$，其中 r_i 为每年调入等级 i 的成员(在总调入人数中占的)比例；$r_i R(t)$ 为 t 年调入等级 i 的人数，其中 $R(t)$ 为 t 年调入总人数.

容易看出，p_{ij}, w_i 和 r_i 应满足

$$p_{ij}, w_i \geqslant 0, \quad \sum_{j=1}^{k} p_{ij} + w_i = 1 \tag{2}$$

$$r_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{k} r_i = 1 \tag{3}$$

为了导出成员按等级的分布 $n(t)$ 的变化规律，先写出总人数 $N(t)$ 的方程

$$N(t+1) = N(t) + R(t) - W(t) \tag{4}$$

和每个等级人数的转移方程

$$n_j(t+1) = \sum_{i=1}^{k} p_{ij}\, n_i(t) + r_j\, R(t), \quad j=1, 2, \cdots, k \tag{5}$$

用向量、矩阵符号可将(5)式表为

$$n(t+1) = n(t)Q + R(t)r \tag{6}$$

从 t 到 $t+1$ 年总人数的增长量记为 $M(t)$，再由(4)、(1)式可得

$$R(t) = W(t) + M(t) = n(t)w^T + M(t) \tag{7}$$

将(7)代入(5)式得到

$$n(t+1) = n(t)(Q + w^T r) + M(t)r \tag{8}$$

记

$$P = Q + w^T r \tag{9}$$

从(2)、(3)式可知 P 的行和为 1，是一个随机矩阵.(8)式记为

$$n(t+1) = n(t)P + M(t)r \tag{10}$$

当已知系统内部转移比例矩阵 Q，调入比例 r，初始的成员等级分布 $n(0)$，以及每年调入总人数 $R(t)$ 或每年总增长量 $M(t)$ 时，可以用(6)式或(10)式计算成员等级分布的变化情况 $n(t)$.(6)

和(10)即为等级分布的基本方程.

当每年系统总人数以固定的百分比 α 增长时，即 $M(t)=\alpha N(t)$，则可用成员的等级结构 $a(t)$代替 $n(t)$而将(10)式表示为

$$a(t+1)=(1+\alpha)^{-1}[a(t)P+\alpha r] \tag{11}$$

如果每年进出系统的人数大致相等，可以简化地假定系统总人数 $N(t)$保持不变，即 $M(t)=0$(或 $\alpha=0$)，这样(10)或(11)式化为相当简单的形式

$$a(t+1)=a(t)P=a(t)(Q+w^T r) \tag{12}$$

与马氏链的基本方程(13.5节(8)式)完全一致，只是要注意到这里的转移概率矩阵 P 的 i,j 元素为 $p_{ij}+w_i r_j$，即系统内部转移比例 p_{ij} 加上系统内外交流的比例 $w_i r_j$.

下面的讨论在等级结构基本方程(12)式的基础上进行.

用调入比例进行稳定控制 我们的中心问题是通过对调入比例 r 的调节，尽快地达到或接近给定的理想等级结构 a^*. 但是由(12)式可以看到，等级结构 $a(t)$通常是随着 t 变化的，人们自然希望 a^* 一旦达到，就能够通过选取适当的调入比例将 a^* 保持不变. 我们将看到并不是任何一个等级结构都可以用调入比例控制不变的. 本段的目的是，给定了内部转移矩阵 $Q=\{p_{ij}\}$(由(2)式退出向量 w 也完全被确定)，研究哪些等级结构用合适的调入比例可以保持不变，称为调入比例对等级结构的稳定控制.

根据基本方程(12)，对于某个等级结构 a，如果存在调入比例 r 使得

$$a=a(Q+w^T r) \tag{13}$$

则称 a 为**稳定结构**，注意这里的 r 必须满足基本关系(3)式，即 $r_i\geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{k} r_i=1$. 由(13)式不难得到

$$r=\frac{a-aQ}{aw^T} \tag{14}$$

可以验证r满足$\sum_{i=1}^{k} r_i=1$，由(14)式可知，当且仅当

$$a \geqslant aQ \tag{15}$$

时a是稳定结构. 虽然(15)式给出了稳定结构的范围，但是我们希望找到它的另一种表示形式.

通常$\sum_{j=1}^{k} p_{ij}<1$，所以可设$(I-Q)$可逆，记$M=\{m_{ij}\}=(I-Q)^{-1}$，则由(14)式可得

$$a=(aw^T)rM \tag{16}$$

记第i元素为1、其余元素为0的单位行向量为e_i，r可表为$r=\sum_{i=1}^{k} r_i e_i$. 又记M的第i行向量为$m_i=(m_{i1}, m_{i2}, \cdots, m_{ik})$，$\mu_i=\sum_{j=1}^{k} m_{ij}$，则$rM=\sum_{i=1}^{k} r_i e_i M=\sum_{i=1}^{k} r_i m_i$. 对(16)式作简单运算可以得到

$$aw^T=\frac{1}{\sum_{i=1}^{k} r_i \mu_i} \tag{17}$$

$$a=\sum_{i=1}^{k} \frac{r_i m_i}{\sum_{j=1}^{k} r_j \mu_j} \tag{18}$$

为了得到便于应用的结果，将(18)式进一步表为

$$a=\sum_{i=1}^{k} b_i s_i \tag{19}$$

其中

$$b_i=\frac{r_i \mu_i}{\sum_{j=1}^{k} r_j \mu_j} \tag{20}$$

$$s_i = \frac{m_i}{\mu_i} \tag{21}$$

对于 b_i，容易知道 $\sum_{i=1}^{k} b_i = 1$；又因为 M 的元素 m_{ij} 非负（为什么？），μ_i 非负，$\sum_{j=1}^{k} r_j \mu_j$ 非负（为什么？），所以当且仅当 $r_i \geqslant 0$ 时，$b_i \geqslant 0$．对于 $s_i = (s_{i1}, s_{i2}, \cdots, s_{ik})$，有 $s_{ij} = \frac{m_{ij}}{\mu_i}$，所以 $s_{ij} \geqslant 0$，$\sum_{j=1}^{k} s_{ij} = 1$．上述分析表明：

当且仅当 a 能够表示为以 b_i 为系数的 s_i 的线性组合（19）式，且 b_i 满足

$$b_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{k} b_i = 1 \tag{22}$$

时，a 是稳定结构．即存在 r，满足 $r_i \geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{k} r_i = 1$，使（13）式成立．

下面举一个例子，并对这个结果给予几何解释．

例 设大学教师的 3 个职称助教、讲师和教授依次记为等级 $i = 1, 2, 3$．每年等级之间的转移比例矩阵为

$$Q = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \tag{23}$$

这表示只有提升，没有降级，而且只能升一级，如每年由助教升入讲师的比例为 40%．求稳定的等级结构 a 的范围．

首先计算

$$M = (I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2.5 & 3.75 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

于是 $\mu_1=7$，$\mu_2=6.25$，$\mu_3=5$．然后由(21)式得到 $s_1=(0.286, 0.286, 0.428)$，$s_2=(0, 0.4, 0.6)$，$s_3=(0, 0, 1)$．稳定结构 a 可表示为

$$a=b_1s_1+b_2s_2+b_3s_3,\quad b_1, b_2, b_3\geqslant 0,\quad b_1+b_2+b_3=1 \tag{24}$$

下面讨论(24)式的几何意义．任何一个等级结构 $a=(a_1, a_2, a_3)$可视为三维空间的一个点，并且位于第一象限的平面

$$a_1+a_2+a_3=1,\quad a_1, a_2, a_3\geqslant 0 \tag{25}$$

上．这是一个以(1,0,0)、(0,1,0)、(0,0,1)为顶点的等边三角形，记为 $\mathscr{A}$，称**可行域**，如图 13－1 所示．s_1、s_2、s_3 也是等级结构，按照它们的坐标(即相应的分量)可以确定其在三角形中的位置，如 s_1 是由在两条边上的坐标点 0.286 和 0.286 经两条与边平行的直线确定的(如图所示)．而(24)式表示，稳定结构 a 应位于以 s_1、s_2、s_3 为顶点的三角形内(包括边及顶点)．记这个三角形域为 $\mathscr{B}$(图中阴影部分)，称为等级结构的**稳定域**.请读者写出用(15)式表示的稳定结构的范围,并证明它与 $\mathscr{B}$ 一致(习题6).

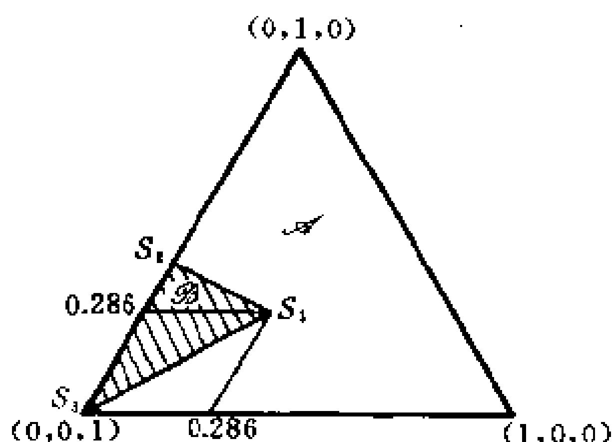


图 13－1　等级结构在三维空间中的可行域和稳定域

从计算过程可以看到，当等级转移只有提升一级使 Q 的非零元素只能位于(23)式所示的位置时，M 必是上三角阵，从而必然有 $s_3=(0, 0, 1)$，$s_2=(0, *, *)$，$s_1=(*, *, *)$($*$ 表示非零元素)．注意到 s_3 表示全部是教授的职称结构，s_2 表示全部是讲师或教授的结构，由稳定域 $\mathscr{B}$ 的构造可知，较高级职称所占比例较大的结构才是稳定的．这是职称只升不降的必然结果．

上面这个 3 等级例题的结果可以推广到一般包括 k 个等级的情况．

首先，等级结构 $a=(a_1, a_2, \cdots, a_k)$的可行域 $\mathscr{A}$ 是k 维空间中由下式决定的 $k-1$ 维超平面，

$$a_1+a_2+\cdots+a_k=1, \quad a_1, a_2, \cdots, a_k \geqslant 0 \tag{26}$$

而稳定域 $\mathscr{B}$ 则是 $\mathscr{A}$ 中以$s_1, s_2, \cdots, s_k$ 为顶点的凸域.

其次，当系统内部只有提升一级的转移，即转移矩阵具有

$$Q=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & & 0 \\ & p_{22} & \ddots & \\ & & \ddots & p_{k-1,k} \\ 0 & & & p_{kk} \end{bmatrix} \tag{27}$$

形式时，$\mathscr{B}$ 的顶点为 $s_k=(0, \cdots, 0, 1)$，$s_{k-1}=(0, \cdots, 0, *, *)$，$\cdots$，$s_2=(0, *, \cdots, *)$，$s_1=(*, *, \cdots, *)$.

用调入比例进行动态调节 讨论我们最关心的问题，设理想的等级结构是 a^*，并合理地假设 $a^* \in \mathscr{B}$，已知转移矩阵 Q 和初始等级结构 $a(0)$，求调入比例 r 使 $a(1)$达到或尽量接近 a^*. 如果没有达到 a^*，接着可以将 $a(1)$作为新的 $a(0)$，再求调入比例 r(不一定与上面的 r 相同)，使 $a(2)$达到或尽量接近 a^*. 如此继续下去直到某个 $a(t)$达到 a^* 或与之接近到满意的程度. 不妨将这个过程称为用调入比例对等级结构进行动态调节.

首先，要衡量 $a(1)$接近 a^* 的程度，必须定义两个等级结构之间的所谓距离. 对于 $a^{(1)}=(a_1^{(1)}, \cdots, a_k^{(1)})$和 $a^{(2)}=(a_1^{(2)}, \cdots, a_k^{(2)})$，用下式定义二者之间的距离 $D(a^{(1)}, a^{(2)})$

$$D(a^{(1)}, a^{(2)})=\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (a_i^{(1)}-a_i^{(2)})^2 \tag{28}$$

其中 $\lambda_i(\geqslant 0)$为对等级 i 的加权因子.

我们的目的归结为求解问题 E_1:

$\min D(a(1), a^*)$

满足

$$a(1)=a(0)(Q+w^T r)$$

$$r_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{k} r_i = 1$$

下面介绍一种解法. 因为

$$a^* - a(1) = a^* - a(0)(Q + w^T r) = a(0)w^T \left[\frac{a^* - a(0)Q}{a(0)w^T} - r \right]$$

式中的因子 $a(0)w^T$ 为常数, 若记

$$y = \frac{a^* - a(0)Q}{a(0)w^T}, \quad y = (y_1, y_2, \cdots, y_k) \tag{29}$$

则 $a^* - a(1)$ 与 $y - r$ 成正比. 于是由 (28) 式问题 E_1 转化为问题 E_2:

$$\min_{r_i} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (y_i - r_i)^2$$

$$r_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{k} r_i = 1$$

其中 y_i 按 (29) 式由已知数据算出, 并且不难验证

$$\sum_{i=1}^{k} y_i = 1 \tag{30}$$

若 $y_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \cdots, k$, 则 E_2 的解显然为

$$r_i = y_i, \quad i = 1, 2, \cdots, k \tag{31}$$

否则, 将 y_i 分为 $y_j > 0$ 和 $y_l \leqslant 0$ 两部分. 与 y 的分量 (下标) 相对应, r 也分为 r_j 和 r_l 两部分. 因为

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (y_i - r_i)^2 = \sum_{j} \lambda_j (y_j - r_j)^2 + \sum_{l} \lambda_l (|y_l| + r_l)^2 \tag{32}$$

因和式随 r_j 由 0 至 y_j 的增加而减少, 随 r_l 的增加而增加, 又 $\sum_{j} y_j > 1$, 所以为使和式最小应该 $r_j \leqslant y_j$, 及

$$r_l = r_l^* = 0 \tag{33}$$

(用 r_l^* 表示最优值) 而 r_j 由问题 E_3:

$$\min_{r_j} \sum_j \lambda_j (y_j - r_j)^2$$

$$0 \leqslant r_j \leqslant y_j, \quad \sum_j r_j = 1$$

解出．其中$y_j \geqslant 0$．用乘子法解这个条件极值问题，令

$$G(r_j) = \sum_j \lambda_j (y_j - r_j)^2 + 2\alpha \sum_j r_j \tag{34}$$

α 为待定因子．若 r_j^* 为问题 E_3 的解，则

$$\frac{\partial G}{\partial r_j}\Big|_{r_j^*} \begin{cases} = 0, & r_j^* > 0 \\ \geqslant 0, & r_j^* = 0 \end{cases} \tag{35}$$

将(34)代入(35)式可得

$$r_j^* = \begin{cases} y_j - \dfrac{\alpha}{\lambda_j}, & y_j > \dfrac{\alpha}{\lambda_j} \\ 0, & y_j \leqslant \dfrac{\alpha}{\lambda_j} \end{cases} \tag{36}$$

而其中α由

$$\sum_j r_j^* = 1 \tag{37}$$

确定．

下面用(23)式给出的大学教师职称等级结构的例子，说明用调入比例进行动态调节的方法．设 Q 如(23)式所示，$a(0) = (0, 0, 1)$，$a^* = (0.286, 0.286, 0.428)$，即前例中的 s_1，求 r 使 $a(1)$ 尽量接近 a^*．

在距离函数(28)中设权 $\lambda_i = 1\ (i = 1, 2, 3)$．按照(29)式可以算出$y_1 = 1.43$，$y_2 = 1.43$，$y_3 = -1.86$．根据(33)式应令 $r_3^* = 0$，再对(36)式取 $r_1^* = y_1 - \alpha = 1.43 - \alpha$，$r_2^* = 1.43 - \alpha$．又从(37)式 $r_1^* + r_2^* = 1$ 可以确定 $\alpha = 0.93$，并且因为 y_1，$y_2 > \alpha$，所以对

(36)式确有 $r_1^* = 1.43 - 0.93 = 0.5, r_2^* = 0.5$ *). 得到的调入比例为 $r^* = (0.5, 0.5, 0)$. 还可以算出 $a(1) = a(0)(Q + w^T r^*) = (0.1, 0.1, 0.8)$, 这是由 $a(0)$出发一年后达到的最接近 a^* 的等级结构(在(28)式定义的距离的意义下).

记上面的 $r^* = r(1)$, 由 $a(1)$出发用同样的方法可以得到 $r^* = r(2)$和 $a(2)$, 如此下去的计算结果如表 13－2.

表 13－2 调入比例 r 对 $a(t)$ 的调节

$a(0) = (0, 0, 1)$, $a^* = (0.286, 0.286, 0.428)$

t	1	2	3	4	5	6	7
	0.5	0.639	0.747	0.827	0.883	0.922	0.949
$r(t)$	0.5	0.361	0.253	0.173	0.117	0.078	0.051
	0	0	0	0	0	0	0
	0.1	0.165	0.207	0.235	0.253	0.264	0.272
$a(t)$	0.1	0.165	0.207	0.235	0.253	0.264	0.272
	0.8	0.670	0.586	0.531	0.495	0.472	0.457

评注 这个模型不仅能描述一个社会系统中的等级结构，也可以研究不同部门间成员的迁移，如在人才自由流动的情况下，从商、从政、从工、从教的人员结构的变化，或电子、钢铁、机械、建筑及第三产业中劳动力构成的演变等.

本节讨论的是最基本的、也是最简单的问题，即在总人数和内部转移比例不变的情况下，用调入比例来控制等级结构的变化. 为了解决实际问题可以有各方面的推广，例如总人数按一定比例增长的情况(基本方程如(11)式)；调入比例有上下界的情况；调入比例固定而用转移比例控制等级结构的问题，事实上许多社

*) 如果对于得到的 α，有某个 j' 使 $y_{j'} \leq \frac{\alpha}{\lambda_{j'}}$，则由(36)式有 $r_{j'}^* = 0$，然后用 $\sum_{j \neq j'} r_j^* = 1$ 重新确定 α，直到剩下的 j 全有 $y_j > \frac{\alpha}{\lambda_j}$，从而得到 r_j^*. 这样的 j 至少有一个.

会系统是从外部向最低等级调入成员，如学生入学，军人入伍．新教师也基本上由助教当起，即可认为调入比例固定为 $r=(1, 0, \cdots, 0)$．而转移比例，譬如只考虑提升一级的比例，却是按照人们制订的政策可以改变的．用这种比例对等级结构进行控制的问题要比用调入比例复杂得多，因为调入比例是 k 维向量（实际上只有 $k-1$ 个分量可变），而转移比例，即使只许提升一级也有 $2k-1$ 个可以调节的量（如果退出比例 w 也可以改变）．控制变量多了，对等级结构的调节更为灵活，计算也更为复杂．上述各种推广问题的讨论可参阅[3]．

13.4 资金流通

若干地区之间资金每年按一定比例相互流动，各个地区还有一部分资金流出这些地区，并且不再回来．政府为了使这些地区的资金分布趋向给定的稳定分布，计划每年向各地区投放或收回一定的资金．本节要建立一个模型描述各地区资金分布的变化规律，讨论在什么条件下可以趋近稳定分布，并确定政府应投放或收回多少资金[37]．

首先我们看到，这个问题与上节的等级结构有相似之处．地区间的资金流通可类比等级间的成员转移，资金流出这些地区可类比成员退出系统，而政府投放或收回资金相当于成员的调入．也有几点不同之处，一是进入各地区的资金可正（投放）可负（收回），而成员的调入比例不能为负；二是各地区资金总和每年是变化的，而上节是在系统总人数不变的假定下进行讨论的．

下面先建立资金分布的基本方程，再研究趋向稳定分布的问题．

设有 k 个地区，第 t 年地区 i 的资金为 $c_i(t)$，$i=1, 2, \cdots, k$，$t=0, 1, 2, \cdots$，每年从地区 i 流入地区 j 的资金的比例为 p_{ij}，每年政府向地区 i 投放的资金为 d_i（当 d_i 为负时表示从地区 i 收

回). 这些量满足 $c_i(t)\geqslant 0$, $p_{ij}\geqslant 0$, $\sum_{j=1}^{k} p_{ij}\leqslant 1$(总有某些地区每年有一定比例资金流出该系统). 记 $c(t)=(c_1(t), c_2(t), \cdots, c_k(t))$, $Q=\{p_{ij}\}$, $d=(d_1, d_2, \cdots, d_k)$, 类似于上节的(6)式, 容易得到

$$c(t+1)=c(t)Q+d \tag{1}$$

经递推可得

$$c(t)=c(0)Q^t+d\sum_{s=0}^{t-1}Q^s \tag{2}$$

如果将资金在各地区视为系统的 k 个状态, 并增加一个状态 0 表示资金流出这个系统, 资金流通的无后效性表明可以用马氏链模型描述其变化过程. 暂不考虑政府的资金投放, 资金在 $k+1$ 个状态间的转移矩阵可表为

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ R & Q \end{bmatrix} \tag{3}$$

其中第 1 行对应于状态 0, 因为资金一旦流出系统, 就不再回来, 所以状态 0 是一个吸收状态, 不妨假定各地区均对应于非吸收状态, 并且从这些状态出发可以到达状态 0, 即形成一个吸收链(13.5 节定义 2). 于是由 13.5 节转移矩阵 P 的标准形式(14)式和定理 4 可知, $(I-Q)$可逆, 且 $(I-Q)^{-1}=\sum_{s=0}^{\infty}Q^s$. 这隐含着 $Q^t\to 0\ (t\to\infty)$. 这样对(2)式令 $t\to\infty$ 就有

$$c(\infty)=d(I-Q)^{-1} \tag{4}$$

设政府希望各地区资金趋向于稳定分布 c^*, 在(4)式中令 $c(\infty)=c^*$ 可以得到

$$d=c^*(I-Q)=c^*-c^*Q \tag{5}$$

这就是说, 对于给定的 c^* 和 Q, 由(5)式算出的 d 可以使 $c(t)\to c^*\ (t\to\infty)$. 但是我们必须检查当(5)代入(2)式后得到的

$$c(t)=c(0)Q^t+(c^*-c^*Q)\sum_{s=0}^{t-1}Q^s \tag{6}$$

是否对于 $t=1,2,\cdots$ 都有 $c(t)\geqslant 0$（指每个 $c_i(t)\geqslant 0$）.

分两种情况讨论上述问题.

1. 因为 $c(0)\geqslant 0$，$Q\geqslant 0$（指每个元素 $\geqslant 0$），所以由(6)式可知，若

$$c^*\geqslant c^*Q \tag{7}$$

则对于任意的初始分布 $c(0)$ 都有 $c(t)\geqslant 0$（$t=1,2,\cdots$）. 这时由(5)式给出的 d 就是使 $c(t)\to c^*$（$t\to\infty$）的政府资金投放量，不妨称 c^* 是可达到的.

2. (7)式只是 $c(t)\geqslant 0$ 的充分条件. 当(7)式不成立时可以进一步将(6)式化为

$$\begin{aligned}c(t)&=c(0)Q^t+c^*(I-Q)(I+Q+\cdots+Q^{t-1})\\&=c(0)Q^t+c^*(I-Q^t)\\&=c^*-[c^*-c(0)]Q^t\end{aligned} \tag{8}$$

记

$$h(t)=[c^*-c(0)]Q^t \tag{9}$$

由(8)式可得 $c(t)\geqslant 0$ 的充要条件为

$$E_t:c^*\geqslant h(t),\qquad t=1,2,\cdots \tag{10}$$

条件 E_t 可以方便地用来检验 c^* 不能达到，因为只要存在一个 t，使 E_t 不满足即可；但是无法判断 c^* 可以达到，因为我们不能对所有的 $t=1,2,\cdots$ 都来验证 E_t 的正确性.

有一个判断 E_t 成立的充分条件，可以与条件 E_t 结合起来使用. 下面不加证明地引述一个定理.

定理 设 $c^*>0$ *)，$h(s)$ 由(9)式定义，记

$$\overline{h}(s)=\sum_{i=1}^{k}|h_i(s)|,\ h(s)=(h_1(s),\cdots,h_k(s)) \tag{11}$$

---

*) 实际应用中常能满足 c_i^* 不为零的要求.

1）若存在某个s（$s=0,1,2,\cdots$）使条件

$$F_s:\min_i c_i^* \geqslant \overline{h}(s) \tag{12}$$

成立，则条件E_t对$t \geqslant s$均成立.

2）必存在某个s_0使条件F_{s_0}成立.

根据以上的分析(7)～(12)式，对于给定的c^*、Q和$c(0)$判断c^*能否达到的程序如图13－2所示.

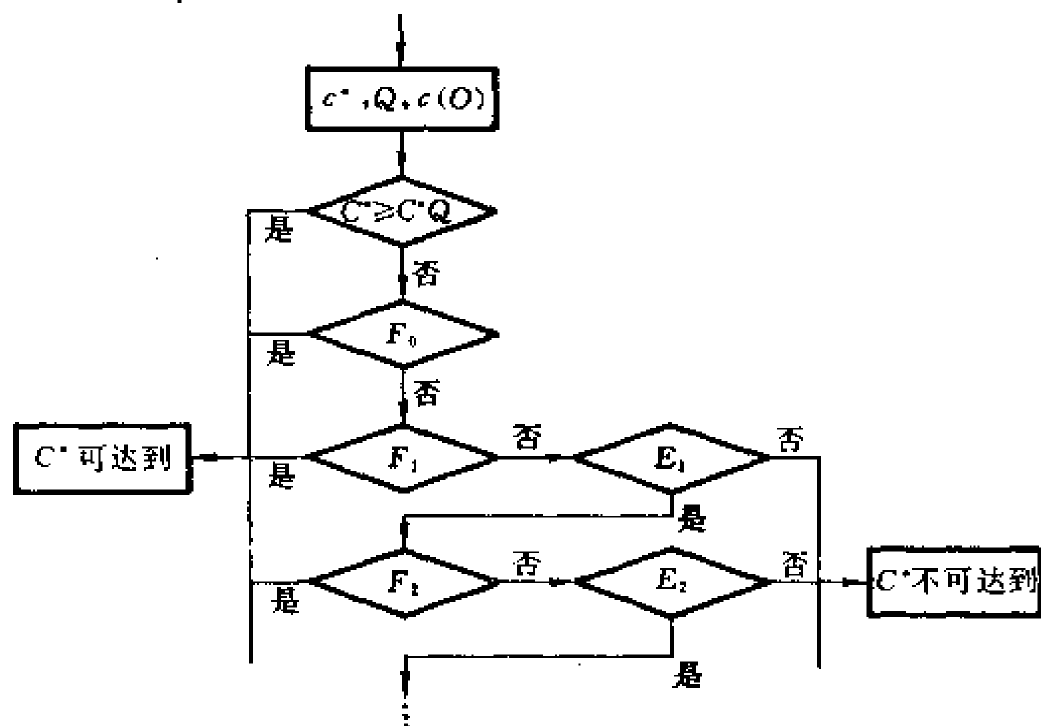


图13－2 判断c^*是否可达到程序示意图

按照图中箭头方向先检验(7)式是否成立，然后交替检验条件F_s（$s=0,1,2,\cdots$）和条件E_t（$t=1,2,\cdots$）. 一旦F_s成立，则c^*可达到；一旦E_t不成立，则c^*不可达到. 而根据上述定理，判断程序不会无限地进行下去.

例 3个地区的资金流通比例矩阵为

$$Q=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

初始分布为 $c(0)=(9,3,6)$. 判断稳定分布 $c^*=(12,6,3)$能否达到；若能达到，问政府每年应如何投放资金.

按照图 13－2 的程序，步骤如下：

1. 检验 $c^*\geqslant c^*Q$. 计算 $c^*Q=(6,4,7)$，$c^*\geqslant c^*Q$ 不成立.

2. 检验 F_0. 计算 $h(0)=c^*-c(0)=(3,3,-3)$，$\overline{h}(0)=9$，而 $\min\limits_i c_i^*=3$，F_0：$\min\limits_i c_i^*\geqslant\overline{h}(0)$不成立.

3. 检验 F_1. 计算 $h(1)=h(0)Q=(2,-1,1)$，$\overline{h}(1)=4$，F_1：$\min\limits_i c_i^*\geqslant\overline{h}(1)$不成立.

4. 检验 E_1. $c^*\geqslant h(1)$成立.

5. 检验 F_2. 计算 $h(2)=h(1)Q=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，$\overline{h}(2)=\frac{4}{3}$，$F_2$：$\min\limits_i c_i^*\geqslant\overline{h}(2)$成立.

检验完毕，c^* 可达到. 政府应投放的资金 d 由(5)式计算，有

$$d=c^*-c^*Q=(6,2,-4)$$

即每年向地区 1、2 分别投放 6 和 2 个资金单位，从地区 3 收回 4 个资金单位.

13.5 马氏链简介

本节主要针对前面几节的模型中需要的知识，介绍马氏链的基本概念及其两种重要类型——正则链(Regular Chain)和吸收链(Absorbing Chain)的重要性质. 下面从两个简单例子开始.

例 1 某商店每月考察一次经营情况，其结果用销路好或销路坏这两种状况中的一种表示. 已知如果本月销路好，下月仍保持这种状况的概率为0.5；如果本月销路坏，下月转变为销路好的

概率为0.4．试分析假若开始时商店处于销路好的状况，那么经过若干月后能保持销路好的概率有多大？ 如果开始时商店处于销路坏的状况呢？

商店的经营状况是随机的，每月转变一次，用随机变量 X_n 表示第 n 个月的经营状况，$X_n=1$ 表示销路好，$X_n=2$ 表示销路坏，$n=0,1,2,\cdots$．X_n 称为这个经营系统的状态．用 $a_i(n)$ 表示第 n 月处于状态 i 的概率$(i=1,2)$，即 $a_i(n)=P(X_n=i)$．p_{ij} 表示本月处于状态 i，下月转为状态 j 的概率$(i=1,2,j=1,2)$，即$p_{ij}=P(X_{n+1}=j\mid X_n=i)$．$a_i(n)$称为状态概率，$p_{ij}$ 称为转移概率．这里，X_{n+1} 只取决于 X_n 和p_{ij}，而与 X_{n-1}，X_{n-2}，$\cdots$ 无关，称为无后效性．由此，根据全概率公式容易得到

$$\begin{cases} a_1(n+1)=a_1(n)p_{11}+a_2(n)p_{21} \\ a_2(n+1)=a_1(n)p_{12}+a_2(n)p_{22} \end{cases} \tag{1}$$

因为已知$p_{11}=0.5$，$p_{21}=0.4$，所以显然有$p_{12}=1-p_{11}=0.5$，$p_{22}=1-p_{21}=0.6$．当商店开始销路好，即 $a_1(0)=1$，$a_2(0)=0$ 时，用式(1)立即可以算出 $a_1(n)$，$a_2(n)$，$n=1,2,\cdots$，如表 13－3 所示．由数字变化规律可以看出，当 $n\to\infty$ 时，$a_1(n)\to 4/9$，$a_2(n)\to 5/9$．

表 13－3 开始销路好时状态概率的变化

n	0	1	2	3	$\cdots$		∞
$a_1(n)$	1	0.5	0.45	0.445	$\cdots$	$\to$	4/9
$a_2(n)$	0	0.5	0.55	0.555	$\cdots$	$\to$	5/9

表 13－4 开始销路坏时状态概率的变化

n	0	1	2	3	$\cdots$		∞
$a_1(n)$	0	0.4	0.44	0.444	$\cdots$	$\to$	4/9
$a_2(n)$	1	0.6	0.56	0.556	$\cdots$	$\to$	5/9

当商店开始销路坏时，同样的方法可以得到表 13－4 的结果．虽然对于各个 n，具体的数字与前面的不同，但是当 $n\to\infty$ 时却会得到完全一样的结果，即 $n\to\infty$ 时的状态概率趋于稳定值，

且这个稳定值与初始状态无关. 后面我们将仔细讨论这个问题.

例 2 考察微量元素磷在自然界中的转移情况. 假定磷只分布在土壤, 草、牛、羊等生物体, 及上述系统之外(如河流中)这三种自然环境里. 每经过一段时间磷在上述三种环境里的比例会发生变化, 变化具有无后效性. 如果这种比例的变化情况如图13－3 所示,即经过一定时间土壤中的磷有 30% 被草吸收, 又被牛羊吃掉, 有 20% 排至系统之外, 50% 仍在土壤中; 生物体中的磷有 40% 因草枯死, 牛羊排泄又回到土壤中, 40% 移出系统, 20% 留在生物体内; 而磷一旦移到系统之外, 就 100% 地不再进入系统. 假定磷在土壤、生物体和系统外的初始比例是 0.5 ∶0.3 ∶0.2 , 研究经过若干段时间后磷在三种环境中的转移情况.

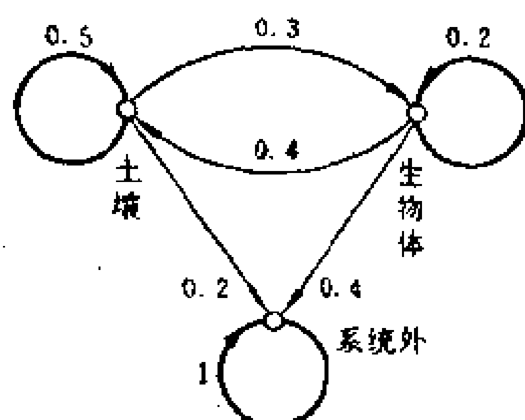


图 13－3 磷在三种环境中比例的变化情况

磷在三种环境中的分布及其变化是确定性的, 但是如果把它在某种环境如土壤中的比例视为处于这种状态的概率(将全部含量作为一个整体), 把它的变化比例视为转移概率, 就能用处理随机转移的马氏链模型来解决这个问题. 时期用 $n=0,1,2,\cdots$ 离散化, $X_n=1,2,3$ 分别表示第 n 时期磷处于土壤、生物体和系统外三种状态, $a_i(n)$表示状态概率, 即分布比例($i=1,2,3$), p_{ij} 表示由 $X_n=i$ 到 $X_{n+1}=j$ 的转移概率, 即变化的比例. 状态的转移具有无后效性. 利用全概率公式并将 p_{ij} 的数字代入得到

$$\begin{cases} a_1(n+1)=a_1(n)p_{11}+a_2(n)p_{21}+a_3(n)p_{31} \\ \qquad\qquad =0.5a_1(n)+0.4\,a_2(n) \\ a_2(n+1)=a_1(n)p_{12}+a_2(n)p_{22}+a_3(n)p_{32} \\ \qquad\qquad =0.3\,a_1\,(n)+0.2\,a_2(n) \end{cases}$$

$$
\left.\begin{aligned} a_3(n+1) &= a_1(n)p_{13}+a_2(n)p_{23}+a_3(n)p_{33} \\ &= 0.2\,a_1(n)+0.4\,a_2(n)+a_3(n) \end{aligned}\right. \tag{2}
$$

以初始状态概率 $a_1(0)=0.5$，$a_2(0)=0.3$，$a_3(0)=0.2$ 代入(2)式计算，结果列入表 13－5．可以看出当 $n\to\infty$ 时 $a_1(n)\to 0$，$a_2(n)\to 0$，$a_3(n)\to 1$，这表示磷终将全部移出系统．事实上，不论初始条件如何，$n\to\infty$ 时的结果是一样的．顺便指出，如果开始磷全在系统外，即处于状态 3，有 $a_1(0)=a_2(0)=0$，$a_3(0)=1$，那么对于任意的 n 都有 $a_1(n)=a_2(n)=0$，$a_3(n)=1$，即一旦进入状态 3，就永远不会转移到其他状态．

表 13－5　磷在三种环境中的比例变化情况

n	0	1	2	3	…	10	…	∞
$a_1(n)$	0.5	0.37	0.27	0.195	…	0.020	…	$\to$ 0
$a_2(n)$	0.3	0.21	0.15	0.111	…	0.011	…	$\to$ 0
$a_3(n)$	0.2	0.42	0.58	0.694	…	0.969	…	$\to$ 1

通过这两个例子容易了解下面给出的马氏链的基本概念．

马氏链及其基本方程　按照系统的发展，时间离散化为 $n=0,1,2,\cdots$，对每个 n，系统的状态用随机变量 X_n 表示，设 X_n 可以取 k 个离散值 $X_n=1,2,\cdots,k$，且 $X_n=i$ 的概率记作 $a_i(n)$，即**状态概率**，从 $X_n=i$ 到 $X_{n+1}=j$ 的概率记作 p_{ij}，即**转移概率**．如果 X_{n+1} 的取值只取决于 X_n 的取值及转移概率，而与 X_{n-1}，X_{n-2}，… 的取值无关，那么这种离散状态按照离散时间的随机转移过程称为**马氏链**．由状态转移的无后效性和全概率公式可以写出马氏链的基本方程为

$$
a_i(n+1)=\sum_{j=1}^{k} a_j(n)p_{ji}, \quad i=1,2,\cdots,k \tag{3}
$$

并且 $a_i(n)$ 和 p_{ij} 应满足

$$
\sum_{i=1}^{k} a_i(n)=1, \quad n=0,1,2,\cdots \tag{4}
$$

$$
p_{ij}\geqslant 0, \quad i,j=1,2,\cdots,k \tag{5}
$$

$$\sum_{j=1}^{k} p_{ij}=1, \qquad i=1,2,\cdots,k \tag{6}$$

引入状态概率向量(行向量)和转移概率矩阵

$$a(n)=(a_1(n),a_2(n),\cdots,a_k(n))$$
$$P=\{p_{ij}\}_{k\times k} \tag{7}$$

则基本方程(3)可以表为

$$a(n+1)=a(n)P \tag{8}$$

由此还可得到

$$a(n)=a(0)P^n \tag{9}$$

(5)式表明转移矩阵 P 是非负阵，(6)式表示 P 的行和为 1，称为**随机矩阵**．对于例 1 和例 2，转移矩阵分别为

$$P=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \qquad P=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

容易看出，对于马氏链模型最基本的问题是构造状态 X_n 及写出转移矩阵 P．一旦有了 P，那么给定初始状态概率 $a(0)$ 就可以用(9)或(8)式计算任意时间 n 的状态概率 $a(n)$．

从例 1 和例 2 的计算结果可以看出这两个马氏链之间有很大差别，事实上它们属于马氏链的两个重要类型，下面分别介绍这些类型．

正则链 例 1 表示的一类马氏链的特点是，从任意状态出发经过有限次转移都能达到另外的任意状态．我们给出如下的定义．

定义 1 一个有 k 个状态的马氏链如果存在正整数 N，使从任意状态 i 经 N 次转移都以大于零的概率到达状态 j $(i,j=1,2,\cdots k)$，则称为**正则链**．

用下面的定理容易检验一个马氏链是否是正则链．

定理 1 若马氏链的转移矩阵为 P，则它是正则链的充要条件是，存在正整数 N 使 $P^N>0$ (指 P^N 的每一元素大于零)．

从例 1 已经知道，从任意初始状态 $a(0)$出发，$n\to\infty$ 时状态概率 $a(n)$趋于与 $a(0)$无关的稳定值. 事实上有如下的定理.

定理 2 正则链存在唯一的**极限状态概率** $w=(w_1, w_2, \cdots, w_k)$，使得当 $n\to\infty$ 时状态概率 $a(n)\to w$，w 与初始状态概率 $a(0)$无关. w 又称**稳态概率**，满足

$$wP=w \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{k} w_i=1 \tag{11}$$

定理中的(10)式可以从(8)式直接得到. P 给定后(10)和(11)式构成求解 w 的线性方程组. 例 1 中的 $w=(4/9, 5/9)$即可直接从相应的代数方程求出.

从(9)或(10)式还不难看出，$\lim\limits_{n\to\infty} P^n$ 存在，记作 P^∞，并且 P^∞ 的每一行都是稳态概率 w. 如果记 $P^\infty=\{p_{ij}^{(\infty)}\}$，那么有 $p_{ij}^{(\infty)}=w_j$.

从状态 i 出发经 n 次转移，第一次到达状态 j 的概率称为 i 到 j 的**首达概率**，记作 $f_{ij}(n)$. 于是

$$\mu_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}(n) \tag{12}$$

为由状态 i 第一次到达状态 j 的平均转移次数. 特别地，μ_{ii} 是状态 i **首次返回的平均转移次数**. μ_{ii} 与稳态概率 w 有密切关系，即

定理 3 对于正则链

$$\mu_{ii}=1/w_i \tag{13}$$

吸收链 例 2 的特点是状态 3 的转移概率 $p_{33}=1$，于是系统一旦进入状态 3 就再不会离开它，可以把它看作"吸收"其它状态的一个状态. 并且从状态 1 或 2 出发，可以经有限次转移到达状态 3. 例 2 表示了如下定义的一类重要的马氏链.

定义 2 转移概率 $p_{ii}=1$ 的状态 i 称为**吸收状态**. 如果马氏链至少包含一个吸收状态，并且从每一个非吸收状态出发，能以正

的概率经有限次转移到达某个吸收状态，那么这个马氏链称为**吸收链**.

吸收链的转移矩阵可以写成简单的标准形式. 若有 r 个吸收状态，$k-r$ 个非吸收状态，则转移矩阵 P 可表为

$$P=\begin{bmatrix} I_{r\times r} & O \\ R & Q \end{bmatrix} \tag{14}$$

其中 $k-r$ 阶方阵 Q 的特征值 $\lambda(Q)$ 满足 $|\lambda(Q)|<1$. 这要求矩阵 $R_{(k-r)\times r}$ 中必含有非零元素，以满足从任一非吸收状态出发经有限次转移可到达某吸收状态的条件. 这样 Q 就不是随机矩阵，它至少存在一个小于 1 的行和，且如下定理成立.

定理 4 对于吸收链 P 的标准形式 (14)，$(I-Q)$ 可逆，

$$M=(I-Q)^{-1}=\sum_{s=0}^{\infty} Q^s \tag{15}$$

记元素全为 1 的列向量 $e=(1,1,\cdots,1)^T$，则

$$y=Me \tag{16}$$

的第 i 分量是从第 i 个非吸收状态出发，被某个吸收状态吸收的平均转移次数.

设状态 i 是非吸收状态，j 是吸收状态，那么首达概率 $f_{ij}(n)$ 实际上是 i 经 n 次转移被 j 吸收的概率，而

$$f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}(n) \tag{17}$$

则是从非吸收状态 i 出发终将被吸收状态 j 吸收的概率. 记 $F=\{f_{ij}\}_{(k-r)\times r}$，下面的定理给出了计算 f_{ij} 的方法.

定理 5 设吸收链的转移矩阵 P 表为标准形式 (14)，则

$$F=MR \tag{18}$$

习　题

1. 对于 13.1 节中的近亲繁殖模型，推导转移概率矩阵 P (13.1 节的 (6) 式)

的第4、5行.

2. 在基因遗传过程中，考虑3种基因类型：优种 $D(dd)$，混种 $H(dr)$ 和劣种 $R(rr)$. 对于任意的个体，每次用一混种与之交配，所得后代仍用混种交配，如此继续下去. 构造马氏链模型，说明是正则链，求稳态概率及由优种和混种出发的首次返回平均转移次数. 如果改为每次用优种交配，再构造马氏链模型，说明是吸收链，求由混种和劣种出发变为优种的平均转移次数.

3. 色盲具有遗传性，由两种基因 c 和 s 的遗传规律决定. 男性只有一个基因 c 或 s；女性有两个基因 cc、cs 或 ss. 当某人具有基因 c 或 cc 时则呈色盲表征. 基因遗传关系是：男孩等概率地继承母亲两个基因中的一个；女孩继承父亲的那个基因，并等概率地继承母亲的一个基因. 由此可以看出，当母亲是色盲时男孩一定色盲，女孩却不一定. 用马氏链模型研究非常极端的近亲结婚情况下的色盲遗传，即同一对父母的后代婚配. 父母的基因组合共有6种类型，形成马氏链模型的6种状态，问哪些是吸收状态. 若父亲非色盲而母亲为色盲，问平均经过多少代就会变成后代全为色盲或全不为色盲的状况，变成全为色盲和全不为色盲的概率各为多大？

4. 两种不同的外部表征是由两种不同基因决定的，这两种基因的遗传关系是相互独立的. 例如猪的毛有颜色表征（黑和白）与质地表征（粗和光）. 对于每一种表征仍分为优种 $D(dd)$、混种 $H(dr)$和劣种 $R(rr)$3种基因类型，两种表征的组合则有9种基因类型. 在完全优势遗传中优种和混种的猪毛颜色黑、质地粗，劣种则颜色白、质地光，这样共有4种外部表征组合，即黑粗、黑光、白粗、白光. 假设群体的两种外部表征对应的基因中 d 和 r 的比例相同（即均为1/2），在随机交配情况下构造马氏链模型. 证明在稳定情况下上述4种外部表征组合的比例为 9∶3∶3∶1.

5. 与13.2节仓库管理相类似，考察水库管理. 设入库流量是随机的，概率分布已知，出库流量是确定的，以库容量为状态，构造马氏链模型. 如果入库流量来自上游河流，而河流的流量又与季节有关，问上面的模型应作哪些改变？

6. 在13.3节等级结构模型中给出了两种表示稳定结构区域 $\mathscr{A}$ 的方法，即(24)式和(15)式. 试用(23)式给定的例子说明这两种表示方法定义的 $\mathscr{A}$ 完全一致.

7. 设等级结构的转移矩阵 Q 仍由13.3节(23)式给出，理想的结构为

$a^*=(0.2, 0.3, 0.5)$，证明 $a^* \in \mathscr{A}$（稳定域）. 若初始结构为 $a(0)=(0.2, 0.8, 0)$，用 13.3 节介绍的问题 E_1、E_2、E_3 的解法求调入比例 r，使 $a(1)$ 尽量接近 a^*.

8. 如果在等级结构模型中将距离函数的定义由 13.3 节(28)式改为 $D(a^{(1)}, a^{(2)})=\sum_{i=1}^{k} \lambda_i |a_i^{(1)}-a_i^{(2)}|$，试给出求解问题 E_1 的方法.

*9. 一个服务网络由 k 个工作站 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ 依次串接而成，当某种服务请求到达工作站 v_i 时，v_i 能够处理的概率为 p_i，转往下一站 v_{i+1} 处理的概率为 q_i ($i=1, 2, \cdots, k-1$，设 $q_k=0$)，拒绝处理的概率为 r_i，满足 $p_i+q_i+r_i=1$. 构造马氏链模型，确定到达 v_i 的请求平均经过多少工作站才能获得接受处理或拒绝处理的结果，被接受和拒绝的概率各多大.

*10. 用马氏链模型讨论空气污染问题. 有 k 个城市 $v_1, v_2, \cdots, v_k$，每一时刻 $t=0, 1, 2, \cdots$，v_i 的空气中污染物浓度为 $c_i(t)$，从 t 到 $t+1$，v_i 空气中污染物扩散到 v_j 去的比例是 p_{ij}，有 $\sum_{j=1}^{k} p_{ij} \leqslant 1$ ($i=1, 2, \cdots k$)，扩散到 k 个城市之外的那部分污染物永远不再回来. 在每个时刻各城市的污染源都排出一定浓度的污染物，记 v_i 排出的为 d_i. 按照环境管理条例要求，对充分大的 t 必须 $c_i(t) \leqslant c_i^*$. 建立马氏链模型，在已知 p_{ij} 和 c_i^* 的条件下确定 d_i 的限制范围，满足管理条例的要求. 设 $k=3$，p_{ij} 由矩阵

$$Q=\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

给出，$c_i^*=25$ ($i=1, 2, 3$)，求 d_i 的范围[37].

第14章　随机服务模型

日常生活中经常可以碰到排队等候服务的现象：在车站售票处乘客依次购买车票，医院里病人按挂号顺序等候就诊，超级市场收款台前顾客排队验货付款，打电话也要等电话线空闲时才能接通，…… 在服务过程中乘客、病人等统称为"顾客"，售票员、医生等统称为"服务员"．顾客到达的时刻和服务员进行服务的时间都是随机的，人们用随机服务模型描述这种现象．

随机服务现象也常常出现在生产和技术领域中：车间里发生故障的机器等待修理、空中的飞机等候跑道降落，存储器中的数据等待终端机处理，等等．这里机器、飞机、数据是"顾客"，而修理工、跑道、终端机是"服务员"．

研究随机服务模型的主要数学工具是排队论，本章不拟专门介绍排队论的知识，只是从建模的角度讨论几个随机服务过程的描述和优化问题．

14.1　收款台前的队伍

超级市场门口平行排列着若干收款台，顾客携带着采购的商品在收款台前排队等候验货付款．我们看到平常顾客较少时只有一两个收款台工作，排队的人数不多并且相当稳定．到下班高潮期间顾客增加，队伍长了，市场立即增开收款台，使队长（即排队人数）回到原来的水平．队长不仅与收款台的数目，也与顾客的多少、收款服务的快慢有关，并且后者是随机改变的．本节要在适当的假设下建模以描述这些变量之间的关系，同时也介绍排队论的几个基本概念[32,45,51]．

显然，顾客在收款台排队等待服务的过程具有一般随机服务

模型的共同特征. 为叙述方便起见以下统称服务过程的双方为顾客与服务员.

基本假设 随机服务过程有三个组成部分: 顾客到达规律、服务时间和排队规则. 对于像排队付款这样的问题我们就这三个组成部分作如下假设, 并由此得到关于顾客到达时刻和服务时间的概率分布.

1. **顾客到达规律** 设在 $[t, t+\Delta t]$ 时间内到达 1 个顾客的概率与 Δt 成正比, 比例系数 λ, 到达 2 个及 2 个以上顾客的概率为 $o(\Delta t)$; 在不相交的时间区间内到达的顾客数相互独立; 顾客源是无限的.

由概率论的基本知识知道, 在上述假设下 $[0, t]$ 内到达的顾客数服从波松 (Poisson) 分布, 即到达 k 个顾客的概率为 $(\lambda t)^k e^{-\lambda t}/k!$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$, 并有以下结果:

$[0, t]$ 内到达顾客的平均数为 λt, 即单位时间内到达顾客的平均数是 λ, 称**平均到达率**;

$[0, t]$ 内没有顾客到达 $(k=0)$ 的概率为 $e^{-\lambda t}$, 记 T 为第 1 个顾客到达时刻, 则 T 服从**指数分布**, 即

$$P(T>t)=e^{-\lambda t} \tag{1}$$

记顾客相继到达时刻为 $t_1, t_2, \cdots, t_k, \cdots$, 间隔为 $T_1=t_1$, $T_2=t_2-t_1, \cdots, T_k=t_k-t_{k-1}, \cdots$, 根据指数分布的无后效性 (12.6 节的 (7) 式) $T_1, T_2 \cdots, T_k, \cdots$ 相互独立且具有与 (1) 式相同的分布, 而**平均到达间隔**为 $1/\lambda$.

2. **服务时间** 设在已经服务过一定时间的条件下再服务一段时间的概率, 与一开始就服务这段时间的概率相同, 记 Z 为服务时间, 上述假设可表为

$$P(Z>\tau+t \mid Z>\tau)=P(Z>t) \tag{2}$$

可以证明, 满足该性质的概率分布只能是指数分布 (习题 1). 如果进一步设单位时间内被服务顾客的平均数为 μ, 称**平均服务率**, 即每个顾客的**平均服务时间**为 $1/\mu$, 那么服务时间 Z 遵从指数分布

$$P(Z>t)=e^{-\mu t} \tag{3}$$

3. 排队规则 按顾客到达的先后顺序服务，即**先到先服务**；对排队的顾客数（即队长）没有限制.

综上所述，在随机服务模型中顾客到达数服从参数为 λ 的波松分布，服务时间服从参数为 μ 的指数分布，按照先到先服务的规则进行. 这种模型在排队论中记作 $M/M/s$ 模型，其中 s 为服务员的数目. 先讨论 $s=1$ 的情形.

平均队长和平均服务时间 在随机服务过程中人们（特别是顾客）最关心的大概是队长和等待时间了. 由于顾客到达时刻和服务时间的随机性，队长和等待时间也是随机变量，在稳定状况下（即 $t\to\infty$）它们存在平稳分布. 下面我们考察队长的平稳分布、平均队长及平均等待时间.

记在排队服务系统内时刻 t 有 n 个顾客（1 人被服务、$n-1$ 人在排队）的概率为 $P_n(t)$，可以用类似于随机性人口模型（12.5 节）的方法建立 $P_n(t)$ 的方程. 顾客到达进入系统相当于出生，服务完毕顾客离开系统相当于死亡. 不过在这里出生和死亡与系统中的人数 n 无关，平均到达率 λ 和平均服务率 μ 分别相当于那里的 b_n 和 d_n. 于是按照 12.5 节的建模过程（1）、（2）式，立刻得到

$$\begin{cases}\dfrac{dP_n(t)}{dt}=\lambda P_{n-1}(t)+\mu P_{n+1}(t)-(\lambda+\mu)P_n(t),\ n=1,2,\cdots\\[2mm] \dfrac{dP_0(t)}{dt}=\mu P_1(t)-\lambda P_0(t)\end{cases} \tag{4}$$

在稳态情况下 $P_n(t)$ 与 t 无关，（4）式化为

$$\begin{cases}\lambda P_{n-1}+\mu P_{n+1}-(\lambda+\mu)P_n=0\\ \mu P_1-\lambda P_0=0\end{cases} \tag{5}$$

由（5）式解出

$$P_n=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0,\quad n=1,2,\cdots \tag{6}$$

考虑到 P_n 应满足

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n=1 \tag{7}$$

必须假设

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \tag{8}$$

否则队列将排至无限远. ρ **称服务强度**, 是单位时间内顾客的到达人数与被服务人数之比. 显然只有当到达人数小于被服务人数时队长才是有限的.

在条件(8)下由(6)、(7)解出稳态下系统内有 n 个顾客的概率为

$$P_n = (1-\rho)\rho^n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{9}$$

$P_0 = 1-\rho$ 为服务员空闲的概率. 于是平均队长为(包括正在被服务的那个顾客)

$$L_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = \frac{\rho}{1-\rho} \tag{10}$$

可以看出, 服务强度 ρ 越大, 平均队长 L_1 越大, 且当 $\rho \to 1$ 时 $L_1 \to \infty$.

关于求平均等待时间我们注意到, 顾客到达间隔服从参数 λ 的指数分布, 顾客服务时间服从参数 μ 的指数分布, 记顾客等待时间(包括被服务的时间)为随机变量 Y, 则 Y 服从参数 $\mu-\lambda$ 的指数分布, 即

$$P(Y > t) = e^{-(\mu-\lambda)t} \tag{11}$$

于是平均等待时间(即 Y 的期望)为

$$W_1 = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} \tag{12}$$

与(10)式比较, 有

$$W_1 = \frac{L_1}{\lambda} \tag{13}$$

这个结果很容易解释: 平均队长除以单位时间到达的平均人数等于每个顾客等待的平均时间.

由(10)式和(12)式给出的平均队长 L_1 和平均等待时间 W_1 是 $M/M/1$ 模型的两个主要结果.

关于增加服务员问题 当顾客平均到达率 λ 上升引起服务强

度 ρ 增加，致使平均队长 L_1 太大，甚至由于 $\rho>1$ 使队长趋向无限时，在平均服务率 μ 不变的情况下就只能增加服务员。下面讨论有 2 个服务员且他们的平均服务率相等（均为 μ）的情况。

2 个服务员的排队服务有两种形式，分别如图 14－1 和图 14－2 所示。图 14－1 中只排一个队，最前面的顾客到空闲的服务员处服务，是 $M/M/2$ 模型。而图 14－2 排两个队，平均到达率相同 $\left(\text{均为 } \dfrac{\lambda}{2}\right)$，且入队后不能换队，即 2 个 $M/M/1$ 模型。

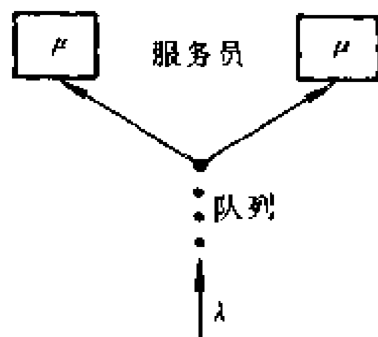


图 14－1 $M/M/2$ 模型

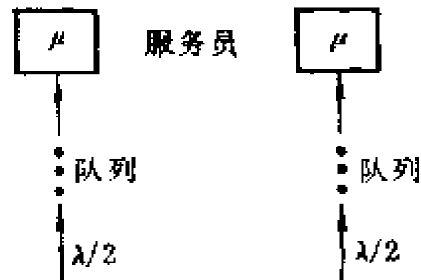


图 14－2 2 个 $M/M/1$ 模型

$M/M/2$ 模型整个服务过程的平均服务率为 2μ，队长有限的条件是服务强度

$$\rho_2=\frac{\lambda}{2\mu}<1 \tag{14}$$

用类似的方法可以求出在稳定状态下的平均队长 L_2 和平均等待时间 W_2 分别为

$$L_2=\frac{2\rho_2}{1-\rho_2^2} \tag{15}$$

$$W_2=\frac{L_2}{\lambda}=\frac{2\rho_2}{\lambda(1-\rho_2^2)} \tag{16}$$

而对于 2 个相同的 $M/M/1$ 模型，因为平均到达率为 $\lambda_1{}'=\lambda/2$，服务强度 $\rho_1{}'=\lambda_1{}'/\mu=\lambda/2\mu$，与 ρ_2 相同，由（10）式每个队的平均队长是 $L_1{}'=\rho_2/(1-\rho_2)$，所以总的平均队长为

$$2L_1{}'=\frac{2\rho_2}{1-\rho_2} \tag{17}$$

由(13)式每个顾客的平均等待时间为

$$W_1{}' = \frac{L_1{}'}{\lambda_1{}'} = \frac{2\rho_2}{\lambda(1-\rho_2)} \tag{18}$$

比较(15)~(18)我们得到2个服务员的这两种服务形式的平均队长和平均等待时间之比为

$$\frac{2L_1{}'}{L_2} = \frac{W_1{}'}{W_2} = 1+\rho_2 \tag{19}$$

注意到$0<\rho_2<1$，就人们最关心的等待时间而言有$1<\frac{W_1{}'}{W_2}<2$，而当ρ_2较大时图14－1的形式可以比图14－2节省较多的等待时间．由此可见，对于设置多个服务员的随机服务过程，如果仅从等待时间角度考虑应该让顾客只排一个队．

现在回到本节开始提出的问题．当顾客平均到达率λ增加，超级市场为了将队长控制在一定的水平，应该设几个收款台．当然，对于s个收款台的服务方式采用的是$M/M/s$模型，而不是s个$M/M/1$模型．

用只设一个收款台时的服务强度$\rho=\lambda/\mu$作为统一标准，在每个收款员的平均服务率μ一定时，ρ与顾客的平均到达率成正比．当设置2个收款台时用$\rho_2=\rho/2$代入(15)式得平均队长为

$$L_2 = \frac{4\rho}{4-\rho^2} \tag{20}$$

可以算出3个收款台时的平均队长(习题2)为

$$L_3 = \frac{\rho(18+6\rho-\rho^2)}{(3-\rho)(6+4\rho+\rho^2)} \tag{21}$$

将(10)、(20)、(21)式给出的$L_s(\rho)$ $(s=1,2,3)$绘出曲线如图14－3．图形(结合计算)可以告诉我们，为了使平均队长不超过一定的数值，ρ在什么范围时应设置几个收款台．譬如当要求平均队长$L_s(\rho)\leqslant 6$时，可以算出若$\rho\leqslant 0.85$则设置$s=1$个收款台即可；若$0.85<\rho\leqslant 1.7$则应使$s=2$；若$1.7<\rho\leqslant 2.5$则应使$s=3$，等等．这样，知道了每个收款台的平均服务率μ，就可以

由 $\lambda=\mu\rho$ 来决定顾客平均到达率 λ 在什么范围应该设置几个收款台了.

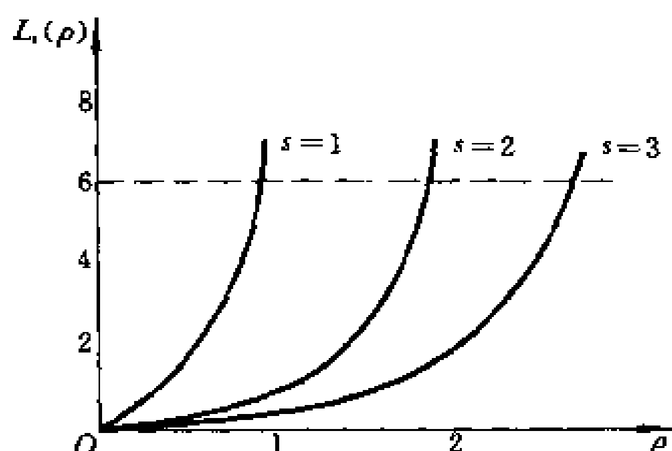


图14－3　s 个服务员的平均队长

最后给出 $M/M/s$ 模型的平均队长公式，以备查用.

$$L_s=s\rho+\frac{(s\rho)^s\rho}{s!(1-\rho)^2}P_0,\quad P_0=\left[\sum_{k=0}^{s-1}\frac{(s\rho)^k}{k!}+\frac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)}\right]^{-1} \tag{22}$$

其中 $\rho=\lambda/s\mu$. P_0 为所有服务员空闲的概率. 而平均等待时间为

$$W_s=\frac{L_s}{\lambda} \tag{23}$$

评注　平均队长和平均等待时间是衡量随机服务过程工作效率的最基本的指标，它们除了与顾客平均到达率 λ、平均服务率 μ 和服务员数目 s 有关以外，还取决于顾客到达间隔和服务时间的概率分布. 本节关于顾客到达规律的假设及由此得到的波松分布是符合大多数实际情况的. 而关于服务时间服从指数分布的假设则只符合像超级市场收款服务这类问题，其特点是概率分布呈偏态，服务时间超过平均值 $1/\mu$ 的概率只有约 37%（e^{-1}），所以必然有一些服务的时间超长. 超级市场里少数顾客购买的物品特别多，就会导致收款台服务时间近似地呈指数分布. 在另外一些情况下服务时间可能呈正态分布，如车站售票处. 在正态分布假定

下平均队长的计算较复杂. 在用随机服务模型解决实际问题时不仅需要从具体数据计算出平均服务率 μ，而且可以检验用哪种分布比较合适.

在排队规则的假设中对队长没有限制，即系统内顾客数可以趋向无穷. 事实上任何服务过程对**系统容量** N 是有限制的，譬如超级市场收款处最多容许 N 人排队，只不过 N 相当大时用 $N \to \infty$ 处理较方便. 但是有些情况就必须考虑 N 有限，如游客到旅社住宿是一种随机服务过程，逗留天数即服务时间，若旅社有 N 个房间(每间住一人)，则系统容量(包括正在服务的)的限制为 N，因为客房住满后再来的客人不能排入队伍.

对于 $M/M/1$ (容量 N)模型平均队长和平均等待时间的计算公式为

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(N+1)\rho^{N+1}}{1-\rho} P_0, \quad P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \tag{24}$$

$$W = \frac{L}{\mu(1-P_0)} \tag{25}$$

其中 ρ、P_0、λ、μ 与原来的含义相同(见习题 3).

14.2 机器维修服务

机器发生故障后排队等待修理，队伍越长因停产造成的损失越大. 提高维修工人和设备的服务速度或增加其数量可以减少队长，但将使修理费用上升. 选择怎样的服务速度，或者确定几个维修工人和设备，使损失和修理的总费用最小，是随机服务过程中典型的静态优化问题. 将发生故障的机器视为顾客，维修工人和设备视为服务员，本节先利用 $M/M/1$ 模型讨论选择服务速度问题，再用 $M/M/s$ 模型研究确定服务员数目问题，最后考虑车间里机器总数为有限的情况下的优化模型. [45].

$M/M/1$ 模型中的最优服务率 设单位时间发生故障的机器数，即平均到达率为已知常数 λ，每台故障机器单位时间的损失费为 c_1，当平均服务率 $\mu=1$ 时（即单位时间平均修理一台机器）单位时间的修理费为 c_2，优化问题的目标函数选为单位时间损失费与修理费之和的期望值，作为 μ 的函数有

$$C(\mu)=c_1L(\mu)+c_2\mu \tag{1}$$

其中 $L(\mu)$ 为平均队长，即排队待修（包括正在修理）的机器数，以 14.1 节 (10) 式的结果

$$L=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda} \tag{2}$$

代入 (1) 式得

$$C(\mu)=c_1\frac{\lambda}{\mu-\lambda}+c_2\mu \tag{3}$$

由 $\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\mu}=0$ 解出

$$\mu=\lambda\pm\sqrt{\frac{\lambda c_1}{c_2}} \tag{4}$$

因为对于稳定状况要求 $\rho=\lambda/\mu<1$，所以最优服务率应取

$$\mu^*=\lambda+\sqrt{\frac{\lambda c_1}{c_2}} \tag{5}$$

不难验证 $C(\mu^*)$ 确是最小值．显然 μ^* 随着发生故障机器数 λ 和损失费 c_1 的增加而增加，随着修理费 c_2 的增加而减小．

$M/M/s$ 模型中的最优服务员数 设 λ 和 c_1 的意义同上，每个服务员的平均服务率 μ 相同且为已知常数，单位时间每个服务员的服务成本（即一名维修工人及设备的费用）为 c_3，目标函数仍是单位时间总费用的期望值，但它是服务员数目 s 的函数，即

$$C(s)=c_1L(s)+c_3s \tag{6}$$

其中 $L(s)$是平均队长，由 14.1 节(22)式给出.

因为 s 只取整数值，所以不能用微分法求 $C(s)$的最小值. 利用边际分析方法，当 $C(s^*)$ 取最小值时应满足

$$\begin{cases} C(s^*)\leqslant C(s^*-1) \\ C(s^*)\leqslant C(s^*+1) \end{cases} \tag{7}$$

将(6)式代入并化简得

$$L(s^*)-L(s^*+1)\leqslant \frac{c_3}{c_1}\leqslant L(s^*-1)-L(s^*) \tag{8}$$

对于 $s=1,2,\cdots$ 依次计算 $L(s)$及 $\Delta L(s)=L(s)-L(s+1)$，当已知数 $\frac{c_3}{c_1}$ 满足

$$\Delta L(s)\leqslant \frac{c_3}{c_1}\leqslant \Delta L(s-1) \tag{9}$$

时即可确定最优值 $s^*=s$.

顾客源为有限情形下的模型 在 14.1 节随机服务过程关于顾客到达规律的基本假设中，顾客源是无限的. 这时平均到达率 λ 才与系统内的顾客数 n 无关. 对于超级市场收款、售票处购票这类服务过程，顾客源无限的假设是合理的，因为潜在的顾客比系统内的顾客多得多. 但是对于机器等待修理、飞机等待跑道降落等问题，就难以认为顾客源无限了.

设车间里共有 m 台机器(顾客)，一名维修工人(服务员)，机器发生故障(到达服务系统)、排队修理(服务)完毕后，退回原处(投入运行)，仍可再次发生故障(再到达系统). 14.1 节中定义的平均到达率 λ，即单位时间顾客到达的平均数现在与系统内顾客数 n 有关，我们将 λ 重新定义为单位时间**每位顾客**到达服务系统的概率，即每台机器的故障率. 服务过程的其他假设与 14.1 节相同. 仍用 $P_n(t)$表示系统内有 n 个顾客的概率，依据 14.1 节的(4)式并注意到关于 λ 的新定义，$P_n(t)$应满足

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}P_n(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda(m-n+1)P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t) \\
\qquad\qquad -[\lambda(m-n)+\mu]P_n(t), \ n=1,2,\cdots,m-1 \\
\dfrac{\mathrm{d}P_0(t)}{\mathrm{d}t} = \mu P_1(t) - \lambda m P_0(t) \\
\dfrac{\mathrm{d}P_m(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda P_{m-1}(t) - \mu P_m(t)
\end{cases}
\tag{10}
$$

在稳定状况下 $\dfrac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}t}=0\ (n=0,1,\cdots,m)$，解关于 P_n 的递推方程并注意到

$$
\sum_{n=0}^{m} P_n = 1 \tag{11}
$$

可以得到

$$
\begin{cases}
P_0 = \left[\displaystyle\sum_{n=0}^{m} \dfrac{m!}{(m-n)!} \rho^n \right]^{-1} \\
P_n = \dfrac{m!}{(m-n)!} \rho^n P_0, \quad n=1,2,\cdots,m
\end{cases}
\tag{12}
$$

其中 $\rho=\lambda/\mu$．由此得到平均队长和平均等待时间为

$$
L^{(m)} = m - \frac{1-P_0}{\rho} \tag{13}
$$

$$
W^{(m)} = \frac{L^{(m)}}{\mu(1-P_0)} \tag{14}
$$

利用以上结果可以对某个车间的机器修理状况作出评价．例如有 5 台机器，每台机器的连续运转时间服从指数分布，平均为 60 分钟，有 1 个维修工人，每次修理时间服从指数分布，平均为 15 分钟．即 $m=5$，$\lambda=\dfrac{1}{60}$，$\mu=\dfrac{1}{15}$，$\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}=0.25$．算出：

修理工人空闲的概率 $P_0 \doteq 0.2$

全部机器待修(其中一台正在修理)的概率 $P_5 \doteq 0.023$

待修及正在修理的平均台数 $L^{(5)} \doteq 1.8$

每台机器的平均停止运转时间 $W^{(5)} \doteq 23.9$(分)

可以认为机器停产时间过长，维修工人空闲时间太短，应该设法提高修理的速度或增加维修工.

对于上述 $M/M/1$(顾客源为 m)模型，仍然可以求解本节(1)式给出的优化问题，不过因为平均队长 $L(\mu)$要代之以(13)式确定的 $L^{(m)}(\mu)$，所以很难得到简单的结果.

至于 $M/M/s$(顾客源为 m)模型，计算公式更加复杂.

14.3 快餐店以快取胜

随着日常生活的高效率、高节奏，快餐风靡全球，快餐业处于市场激烈竞争之下. 如何吸收更多的顾客以获取更高的利润是每一位快餐店老板最关心的问题. 除了增加花色、提高品味、保证营养、降低成本之外，快餐店应在其基本特点"快"字上下功夫. 有人向老板建议，公开向顾客宣布：如果让哪位顾客等待超过一定时间(譬如3分钟)，那么他可以免费享用所订的饭菜. 提建议者认为这必将招揽更多的顾客，由此带来的利润一定大于免费奉送造成的损失. 但是老板希望对于利弊有一个定量的分析，告诉他在什么条件下作这种承诺才不会亏本，更进一步，他希望知道应该具体地作几分钟的承诺，利润能增加多少. 本节要建立一个随机服务模型，给出解决这个问题的一种方法[32].

假定顾客进入快餐店后的服务过程是这样的：首先他在订餐处订餐，服务员将订单立即送往厨房，同时收款、开收据，收据上标明订餐的时刻，这个时刻就是这位顾客等待时间的起始时刻. 接着，服务在厨房进行，厨房只有一位厨师，按订单到达的顺序配餐，配好一份立即送往取餐处. 最后，服务员将饭菜交给顾客，

并核对收据，若发现顾客等待时间超过店方的承诺，则将所收款项如数退还.

这个问题建模的关键有二：一是对顾客到达、服务时间、排队规则等作什么样的的假设；二是当宣布“服务慢了将免费供餐”以后，承诺的时间与顾客的增多之间的关系应该用什么规律描述. 对于前者，$M/M/1$ 模型是一个合理的、简化的选择；对于后者，我们将在直观分析的基础上用最简单的定量关系表示出来.

模型假设

1. 顾客在快餐店的服务服从 $M/M/1$ 模型；顾客平均到达率为 $\lambda=1/c$，c 为平均到达间隔，在未宣布承诺时 $c=c_0$；快餐店平均服务率 $\mu=1/d$，d 为平均服务时间；$d<c$.

2. 店方承诺等待时间超过 u 的顾客免费享用订餐，u 越小则顾客越多，c 越小. 在一定范围内设 c 与 u 成正比. 同时又存在 u 的最大值 u_0，当 $u\geqslant u_0$ 时快餐店的承诺对顾客无吸引力，相当于不作承诺，不妨设此时 $c=c_0$.

3. 每位顾客的订餐收费为 p，成本为 q [*)].

模型建立　首先，根据 14.1 节对 $M/M/1$ 模型的分析，顾客等待时间（记作随机变量 Y）服从参数 $\mu-\lambda$ 的指数分布(14.1 节(11)式)，即

$$P(Y>t)=e^{-(\mu-\lambda)t}=e^{-\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{c}\right)t} \tag{1}$$

对于等待时间为 Y 的顾客设店方获得的利润为 $Q(Y)$，则在宣布承诺时间为 u 的情况下有

$$Q(Y)=\begin{cases} p-q, & Y\leqslant u \\ -q, & Y>u \end{cases} \tag{2}$$

利润 Q 的期望值为

$$EQ=(p-q)P(Y\leqslant u)-q\,P(Y>u) \tag{3}$$

用(1)式代入得

---

*) 要求每位顾客的 p，q 相同似乎不近合理，事实上从求解结果可知，只需收费与成本之比 p/q（即店方利润百分数）对每位顾客相同就行，而这是大致合理的.

$$EQ=p-q-pe^{-\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{c}\right)u} \tag{4}$$

因为顾客到达的平均间隔为 c，所以单位时间利润的期望值为

$$J(u)=\frac{1}{c}EQ=\frac{1}{c}\left[p-q-pe^{-\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{c}\right)u}\right] \tag{5}$$

建模的目的是确定承诺时间 u 使利润 $J(u)$最大.

下面我们根据对于 c 和 u 关系的假设确定函数 $c(u)$. 因为可以假定 $c(0)=0$ (理解为 $u\to 0$ 时顾客将无穷多), 当 $u\geqslant u_0$ 时 $c(u)=c_0$ (因为这时相当于不作承诺), 所以若假设在 $0\leqslant u\leqslant u_0$ 时 c 与 u 成正比, 函数 $c(u)$的图形就如图 14－4 所示. 并且由于 $d<c$ 的基本要求, 必须 $u>\frac{du_0}{c_0}$. 于是 $c(u)$可表为

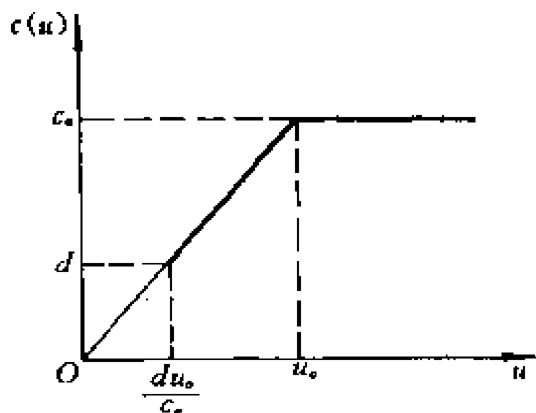


图14－4 顾客到达间隔与承诺时间的关系

$$c(u)=\begin{cases}\frac{c_0}{u_0}u, & \frac{du_0}{c_0}<u<u_0\\ c_0, & u\geqslant u_0\end{cases} \tag{6}$$

将(6)式代入(5)式得

$$J(u)=\begin{cases}\frac{u_0(p-q)}{c_0 u}\left(1-\alpha e^{-\frac{u}{d}}\right), & \frac{du_0}{c_0}<u<u_0\\ \frac{p-q}{c_0}\left[1-\frac{p}{p-q}e^{-\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{c_0}\right)u}\right], & u\geqslant u_0\end{cases} \tag{7}$$

其中

$$\alpha=\frac{p}{p-q}e^{\frac{u_0}{c_0}} \tag{8}$$

$J(u)$中除 u 外均为已知常数，问题化为求 u 使 $J(u)$最大.

模型求解 对于(7)式的 $J(u)$应按 u 的不同范围分别求解.

当 $\frac{du_0}{c_0}<u<u_0$，用微分法求出 u 的最优值 u^* 应满足

$$e^{\frac{u^*}{d}}=\alpha\left(1+\frac{u^*}{d}\right) \tag{9}$$

且算出 J 的最大值为

$$J(u^*)=\frac{u_0(p-q)}{c_0(u^*+d)} \tag{10}$$

当 $u\geqslant u_0$，显然 $u\to\infty$ 时 $J(u)$ 最大，且

$$J(\infty)=\frac{p-q}{c_0} \tag{11}$$

比较 $J(u^*)$ 和 $J(\infty)$ 可知，当且仅当 $u^*+d<u_0$ 时 $J(u^*)>J(\infty)$，所以 $J(u)$ 最大值问题的解应为

$$u=\begin{cases}u^*, & u^*+d<u_0\\ \infty, & u^*+d\geqslant u_0\end{cases} \tag{12}$$

其中 u^* 由(9)式确定．这就是说，对于给定的 p、q、c_0、u_0 和 d，以及按(8)、(9)式算出的 u^*，仅当 $u^*+d<u_0$ 时才可承诺“服务慢了免费供餐”，并且承诺时间为 u^* 时利润最大．

进一步分析可以作承诺的条件

$$\frac{u^*}{d}+1<\frac{u_0}{d} \tag{13}$$

根据(9)式如果用方程

$$e^f=\alpha(1+f) \tag{14}$$

定义函数 $f(\alpha)$，则

$$u^*=d\cdot f(\alpha) \tag{15}$$

条件(13)可以表为

$$d<\frac{u_0}{1+f(\alpha)} \tag{16}$$

因为(8)式中的 α 是 p/q、u_0、c_0 的函数，即

$$\alpha=\frac{p/q}{p/q-1}e^{\frac{u_0}{c_0}}=\alpha(p/q,u_0,c_0) \tag{17}$$

若记

$$d_c=\frac{u_0}{1+f(\alpha)}=d_c(p/q,u_0,c_0) \tag{18}$$

则当p/q、u_0、c_0给定时快餐店可以作承诺的条件(16)，应该表为平均服务时间 d 满足

$$d<d_c(p/q,u_0,c_0) \tag{19}$$

在这个条件下最优承诺时间u^*由(15)式确定．与不作承诺时的利润$J(\infty)$相比，此时的利润$J(u^*)$为

$$J(u^*)=\frac{u_0}{u^*+d}J(\infty)>J(\infty) \tag{20}$$

为了具体计算的简便，将$f(\alpha)$和$d_c(p/q,u_0,c_0)$绘出曲线，如图14－5．

例 一快餐店顾客平均到达间隔为$c_0=2$分钟，每位顾客就餐的收费与成本之比$p/q=1.25$，承诺等待时间u的最大值$u_0=5$分钟．若目前快餐店的平均服务时间$d=50$秒钟，问能否承诺服务慢了免费供餐．若店方有能力将平均服务时间缩短到$d=30$秒钟，问能否承诺．承诺时间的最优值u^*多大，利润可比目前增长多少．

将$p/q=1.25$，$u_0=5$，$c_0=2$代入(17)式算得$\alpha\doteq60$，解方程(14)或由图14－5(a)有$f(\alpha)\doteq6$，从(18)式或由图14－5(b)得$d_c\doteq43$(秒)．目前的平均服务时间$d=50$秒不满足条件(19)，所以不能对等待时间作任何承诺．而当平均服务时间缩短至$d=30$秒时，则满足条件(19)，店方可以作出承诺，且由(15)式最佳承诺时间为$u^*=30\times6=180$(秒)，即宣布凡顾客等待时间超过3分钟者可以免费享用订餐．这时顾客到达的平均间隔将由$c_0=2$分钟缩短到$c^*=\frac{c_0}{u_0}u^*=1.2$分钟(据(6)式)，而

单位时间的平均利润将为 $J(u^*)=1.4J(\infty)$(据(20)式)，即增长40%.

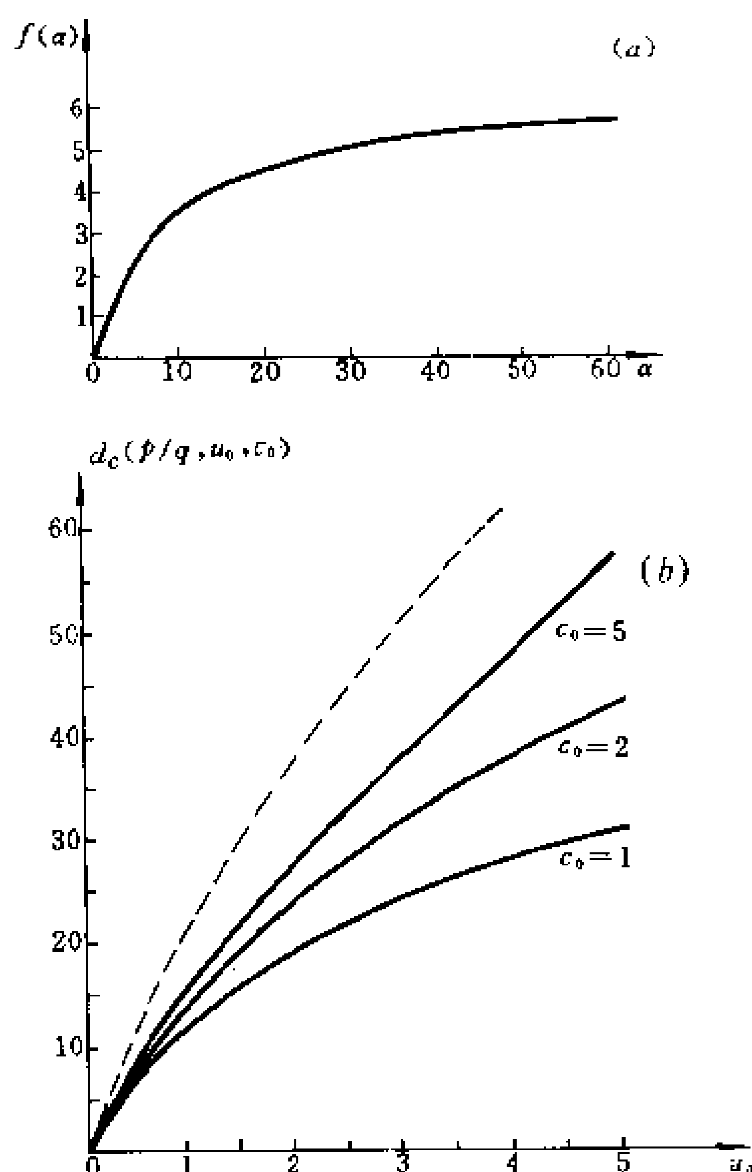


图 14－5 (a)由 $e^f=\alpha(1+f)$ 定义的 $f(\alpha)$ 曲线

(b) 由(17)、(18)式定义的 $d_c(p/q, u_0, c_0)$ 曲线，其中实线为 $p/q=1.25$ 及不同的 $c_0=1, 2, 5$，虚线为 $p/q=2$ 及 $c_0=5$

评注 本节提出的是一个很容易理解的问题，但是把它用数

学模型表述出来却并非易事. 这里除了利用现成的 $M/M/1$ 模型之外, 主要是对承诺时间和顾客多少的关系作了相当简化、也有一定程度合理性的假设, 即模型假设条件 2 及 (6) 式. 可以看到, 如果比这个假设再复杂一点, 就难以得到容易分析的结果了. 当然, 这个简化假设可能与实际情况有相当大的距离, 致使所得结果不一定能直接应用, 但是本文提供的方法是值得借鉴的.

14.4 计算机的序贯处理

在计算机工作站将多台终端处理机用一台控制器连结起来, 并且共用一个存储器, 计算任务由控制器分配给各台终端序贯处理, 以取得比单台计算机更高的计算速度. 本节讨论一种简单的特殊情况: 设有 n 项计算任务, 每项任务都必须由控制器分配给 2 台终端处理机进行序贯处理, 它们的运行相互独立, 计算每项任务的时间是随机的, 它们的统计规律如平均计算速度已知. 2 台终端的共用存储器最多只能存储 N 项任务的数据 (设每项任务的数据量相同). 我们要确定完成 n 项任务所需的平均时间, 并与单台计算机完成这些任务的时间进行对比[5].

上述问题可以归结为 2 个服务员的串联随机服务过程, 服务员的平均服务率分别为 μ_1 和 μ_2, 系统容量 (即分别在 2 个服务员处排队等待和服务的顾客总数) 为 N. 与以前的模型不同, 这里的 n 位顾客 ($n>N$) 已经到达, 等待依次进行 2 项服务. 譬如一个会计室有审核员和出纳员各一名, 他们以平均速度 μ_1 和 μ_2 顺序为每位顾客服务. 会计室内最多容纳 N 位顾客, 预定的 n 名顾客已经来到, $n-N$ 位等在室外. 当一位顾客进行完 2 项服务离去后立即有一人进入室内, 直到 n 位顾客服务完毕. 这个过程可以用图 14－6 描述. 每位顾客进行完第 2 项服务后再排在第 1 项服务队伍的末尾, 如此循环. 当进行了 n 人次的服务循环时, n 项计算任务就全部完成了.

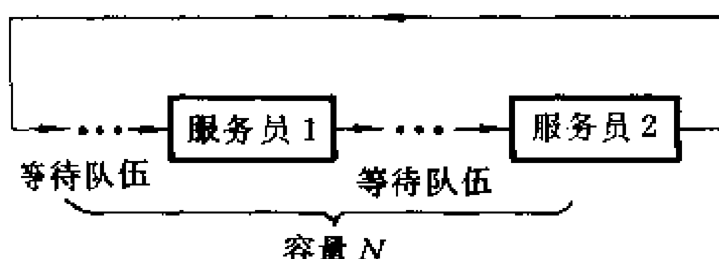


图 14-6 计算机序贯处理的服务过程

下面我们先求稳定状况下用序贯处理方式每项计算任务所需的平均时间，再与单机处理进行比较.

序贯处理的平均计算时间 设 2 台终端处理机计算每项任务的时间服从指数分布，平均计算速度（单位时间完成任务的项数）分别是 μ_1 和 μ_2，于是 $\mu_1\Delta t$ 和 $\mu_2\Delta t$ 可视为 Δt 内 2 台终端分别完成一项计算任务的概率. 记时刻 t 在终端 1 处有 k 项任务（包括等待的和正在计算的）、在终端 2 处有 $N-k$ 项任务的概率为 $P_k(t)$，类似于 12.5 节建立随机性人口模型的 (1)、(2)式，容易得到

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}P_k}{\mathrm{d}t}=\mu_1 P_{k+1}(t)+\mu_2 P_{k-1}(t)-(\mu_1+\mu_2)P_k(t), \\ \qquad\qquad k=1,2,\cdots N-1 \\ \dfrac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}t}=\mu_1 P_1(t)-\mu_2 P_0(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}P_N}{\mathrm{d}t}=\mu_2 P_{N-1}(t)-\mu_1 P_N(t) \end{cases} \tag{1}$$

当计算机运行进入稳态时 $P_k(t)$ 与 t 无关，为此我们假定 $n>>N$，只要 N 个顾客的服务循环若干次，就可视为到达稳态了. 此时微分方程 (1)化为代数方程，并化简为

$$\mu_1 P_k-\mu_2 P_{k-1}=0, \quad k=1,2,\cdots,N \tag{2}$$

记

$$\sigma=\frac{\mu_2}{\mu_1} \tag{3}$$

并注意到$\sum_{k=0}^{N} P_k = 1$，则由(2)式可得稳态概率为

$$P_k = \begin{cases} \dfrac{1-\sigma}{1-\sigma^{N+1}}\sigma^k, & \sigma \neq 1, \\ \dfrac{1}{N+1}, & \sigma = 1, \end{cases} \quad k = 0, 1, \cdots, N \tag{4}$$

记2台终端计算每项任务所需的平均时间为T. 因为终端1工作的概率是$1-P_0$，平均计算时间是μ_1^{-1}，所以

$$(1-P_0)T = \mu_1^{-1} \tag{5}$$

将(3)、(4)代入(5)式可得

$$T = \begin{cases} \dfrac{1-\sigma^{N+1}}{\mu_2(1-\sigma^N)}, & \sigma \neq 1 \\ \dfrac{N+1}{\mu_2 N}, & \sigma = 1 \end{cases} \tag{6}$$

这就是序贯处理的平均计算时间.

序贯处理与单机处理的比较 单机处理时每项任务仍分为2段，与序贯处理相对应这2段的平均计算速度分别为μ_1和μ_2，所以单机处理每项任务的平均时间是

$$T_1 = \mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} \tag{7}$$

引入衡量序贯处理性能的数量指标

$$R = \frac{T}{T_1} \tag{8}$$

显然，R越小，序贯处理的性能越好. 把(6)、(7)代入(8)式并将R视为σ的函数，可得

$$R(\sigma) = \begin{cases} \dfrac{1-\sigma^{N+1}}{(1+\sigma)(1-\sigma^N)}, & \sigma \neq 1 \\ \dfrac{N+1}{2N}, & \sigma = 1 \end{cases} \tag{9}$$

可以证明 $R(\sigma)$在 $\sigma=1$ 处可微，并且当 $0<\sigma\leqslant 1$ 时 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\sigma}\leqslant 0$，当 $1\leqslant\sigma<\infty$ 时 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\sigma}\geqslant 0$．于是 $\sigma=1$ 时 R 达到最小值 $R(1)=\frac{N+1}{2N}\doteq\frac{1}{2}$（$N$ 较大时），而当 $\sigma\to 0$ 或 $\sigma\to\infty$ 时 R 趋向最大值 $R(0)=R(\infty)=1$．这就是说，当 2 台终端的计算速度相同时（即 $\sigma=1$），序贯处理的性能最优，因为这时它们完全对称，最少出现相互等待的机会．而 2 台终端的计算速度相差越大，序贯处理的性能越坏．极端情形下只有 1 台终端在工作，就相当于单机处理了．

由(9)式还可以知道，当 $N\to\infty$ 时

$$R(\sigma)=\begin{cases}\frac{1}{1+\sigma}, & \sigma\leqslant 1\\ \frac{\sigma}{1+\sigma}, & \sigma>1\end{cases} \tag{10}$$

仍在 $\sigma=1$ 处达到最大值 $R(1)=\frac{1}{2}$．但是当 $N=1$ 时，对于所有的 σ 都有 $R(\sigma)=1$，即不管 2 台终端的速度如何，序贯处理的性能与单台相同，因为存储器小到只容许 2 台终端中的某 1 台工作．

由上述分析可以看出，实际应用序贯处理方式时应该使各终端的计算速度相同，以取得最佳效果．这时 2 台终端序贯处理的速度比单机快一倍，而与两台单机相比，又起码省掉一个存储器．

习　题

1．证明若服务时间 Z 的概率满足 $P(Z>\tau+t\mid Z>\tau)=P(Z>t)$（14.1 节(2)式），则 Z 服从指数分布．

2. 在 14.1 节中用 $M/M/s$ 模型的平均队长公式(22)验证(20)和(21)式.(注意:(20)、(21)中的 $\rho=\lambda/\mu$)

3. 在 14.1 节中推导 $M/M/1$ (容量为 N)模型的平均队长公式(24),并解释平均等待时间公式(25)的意义.

4. 某发廊只有一位理发师,顾客平均到达率为3人/小时,每人平均理发时间为15分钟.分别在发廊充分大(即容量无限)和只有6把椅子供顾客等待这两种情况下计算:平均队长;平均等待时间;顾客不必等待就可理发的概率;顾客因无座位等候而离开的概率.

5. 某医院手术室为掌握随机服务情况,统计了100小时病人就诊和完成手术的数据,如下表所示.

一小时内到达的病人数 n	n 出现的频率 f_n
0	10
1	28
2	29
3	16
4	10
5	6
6以上	1
共计	100

一病人的手术时间 τ (小时)	τ 出现的频率 g_τ
0—0.2	38
0.2—0.4	25
0.4—0.6	17
0.6—0.8	9
0.8—1.0	6
1.0—1.2	5
1.2以上	0
共计	100

① 算出病人平均到达率和手术平均时间.

② 计算医院平均病人数和每个病人平均就诊时间.

③ 要使平均就诊时间不超过2小时,手术平均时间应为多少.

6. 在某风景区准备建造旅店,预计顾客平均每天6人,每人平均逗留2天.若旅店备4个房间(每间一人),求每天客房平均占用数及满房概率.

7. 车间里有若干台机器,每台机器的正常运转时间为均值120分钟的指数分布,修理工人的服务时间为均值12分钟的指数分布.现车间要维持机器的正常运转率不小于87.5%,问每名修理工人最多能看管几台机器.

8. 机器的平均故障率为4台/小时,故障后的损失为8元/台·小时.现有2名修理工人,甲的平均修理速度为6台/小时,工资为3元/小时;乙的平均修理速度为8台/小时,工资为5元/小时.从费用最省角度考虑应雇用哪位工人.分析同时雇用这2名工人的情况.

9. 某人准备开一间美发厅，他已经对顾客平均到达率和自己的平均服务率有了估计；现在要确定厅的面积，这相当于决定设多少供顾客等候的椅子，面积太大投资多，顾客经常不满，造成浪费；面积太小，无处等候的顾客走掉，减少收入．在适当的假设下选择合理的目标函数，建立优化模型，并指出求解方法．

10. 举出一些可以用下列模型描述的随机服务过程的实际例子：$M/M/1$；$M/M/1$（容量 N）；$M/M/1$（顾客源 m）；$M/M/s$；$M/M/s$（容量 N）；$M/M/s$（顾客源 m）．再分析一两个这些模型中的优化问题（作出假设并写出目标函数）．

11. 用 14.3 节的模型或其它方法讨论下面的问题：一自行车快修店顾客平均到达间隔为 12 分钟，每位顾客修车的收费与成本之比为 2．承诺服务慢了免费修理的最大等待时间为 20 分钟（超过这个时间就失去吸引力）．问快修店的平均服务时间最多为多长才能作承诺．利用承诺的办法要使平均利润比目前增长 1/3．平均服务时间最多是多少．

*12. 一码头设置若干泊位供货轮停靠装卸货物，由于泊位不足经常有货轮在码头外等候．一保险公司欲向货轮开展一项保险业务：到达的货轮先向公司缴纳一定数额的保险金，若它在码头外等待超过一定时间则公司付给货轮较大数额的赔偿金．试为保险公司建立一个数学模型，讨论它不至于赔本及获取最大利润的条件．可以假定货轮的平均到达率和码头的平均服务率是一定的，而保险金的数额应与承诺的时间有关．

第五篇　更复杂的模型

第 15 章　更复杂的模型

我们已经按照确定性和随机性、连续和离散、稳态和动态等特征及初等数学、微积分和微分方程、变分法、差分方程、概率、图论等数学方法分门别类地介绍了许多模型．在本书的最后一章再补充几个复杂一点的模型．有的既要进行稳态分析又要研究动态过程；有的将连续模型嵌入到离散模型之中；有的借用了物理学中的概念和原理．

15.1　废水的生物处理

工业和生活废水在排入河流、湖泊或再生利用之前要去除废水中有害的有机物，采用的方法通常有生物处理和物理化学处理两种．所谓生物处理或称生物化学处理，是利用微生物(主要是细菌)的生命活动过程，把废水中的有机物转化为简单的无机物形式．在有氧供应的转化过程中微生物对复杂有机物进行分解，并利用分解产生的能量繁殖、生长和运动．一部分有机物最终转化为稳定的无机物，另一部分与微生物合成为新细胞，而新细胞可从废水中分离出来．于是废水中的有机物便去除了．

本节既不是从生物化学的观点研究微生物的生命活动和有机物的转化过程，也不是从工程设计的角度讨论各种参数的大小和废水处理设备尺寸的选择．而是介绍怎样在一些简单假设的基础

上，建立基本的方程，为设计人员提供初步的又是重要的抉择方案.[15]

实际背景 某钢铁厂排出废水中有害物质的浓度在 10^{-3} ~ 10^{-2} 克/米^{3}之间，拟采用生物处理法将其浓度降至环境保护法规定的 5×10^{-4} 克/米^{3}以下，然后排入河流，为此需建立废水和微生物混合的处理池.已知废水将以 10 米^3/小时的流量进入处理池，为使由处理池排出废水中有害物质浓度满足规定的标准，要合理地确定处理池的容积.如果所需的容积太大，研究用两个较小的处理池代替一个大池的可行性.

模型假设 生物化学的研究、试验已经提供了有机物分解、转化和微生物增殖、衰亡的规律以及有关的参数，可以归纳为如下的假设.

1.有害物质被微生物分解、转化而消失的速率(以单位时间的百分比计)与微生物浓度成正比，比例系数为 $r_1=0.1$ 米^3/克·小时.

2.微生物依靠有害物质分解、转化产生的能量而增殖的速率(以单位时间的百分比计)与有害物质浓度成正比，比例系数为 $r_2=1.26$ 米^3/克·小时.这个假设适合于有害物质浓度不大的情况.

3.微生物的自然衰亡率(单位时间的百分比)是常数 $d=10^{-5}$/小时.

为了把问题限制在适当简化的范围内再作下列假设.

4.池内有害物质和微生物在任何时候都是均匀混合的，于是可以用 $c(t)$和 $b(t)$分别记有害物质和微生物的浓度，即它们只是时间 t 的函数，而与位置无关.并且由此可以认为排出的废水中有害物质和微生物的浓度与池内相同.

5.废水进入处理池的流量 $Q=10$ 米^3/小时不变.池内废水量不变.忽略池内废水的蒸发等因素，可以认为排出的水量与 Q 相同.并且近似地设池内水量等于池的容积 V，即水是满池的.

6.进入处理池的废水中有害物质浓度为 c_0，$10^{-3}=c_{01}\leqslant c_0\leqslant$

$c_{02}=10^{-2}$(克／米^3)．c_0 可以保持某个定值，也可随时发生变化，最坏的情况(对于生物处理而言)是 c_0 由 c_{01} 突然增加到 c_{02}．

7．环境保护法规定的浓度 $c^*=5\times10^{-4}$(克／米^3)是指长期稳定排放时不应超过的标准．如果是短期排放超标不太大，工厂可以用交纳罚金等办法解决．

单池模型 根据池内有害物质的质量平衡关系，在$(t,t+\Delta t)$内有害物质改变量 ＝ 进入量 － 排出量 － 分解转化量．按照假设1、4、5有

$$V[c(t+\Delta t)-c(t)]=Qc_0\Delta t-Qc(t)\Delta t-r_1b(t)c(t)V\Delta t$$

由此可得微分方程

$$\frac{dc}{dt}=\frac{Q}{V}(c_0-c)-r_1bc \tag{1}$$

类似地，根据池内微生物的平衡关系和假设2、3、4、5有

$$V[b(t+\Delta t)-b(t)]=r_2c(t)b(t)V\Delta t-db(t)V\Delta t-Qb(t)\Delta t$$

可得方程

$$\frac{db}{dt}=(r_2c-d-\frac{Q}{V})b \tag{2}$$

(1)、(2)给出了池内有害物质浓度和微生物浓度的变化规律．这个非线性方程组难以求出解析解，我们分别讨论它的稳态和动态过程．

1．**稳态情况** 方程(1)、(2)有两个平衡点

$$P_1: c=\frac{d+Q/V}{r_2},\ b=\frac{Q(c_0-c)}{Vr_1c} \tag{3}$$

$$P_2:\ c=c_0,\qquad b=0$$

可以验证在 $c<c_0$ 的条件下 P_1 稳定，P_2 不稳定(习题1)．由(3)可知为了 $b>0$ 必须有 $c<c_0$，而这个条件等价于要求

$$V>\frac{Q}{r_2c_0-d} \tag{4}$$

显然 c_0 越小 V 应越大，用 $c_0=c_{01}$ 和 Q、r_2、d 代入(4)式可得 $V>8\times10^3$(米^3)，而要使稳定情况下的 c 不超过规定标准 $c\leqslant c^*$，则应使

$$V\geqslant\frac{Q}{r_2c^*-d}\doteq1.6\times10^4(\text{米}^3)\tag{5}$$

2. 动态过程 考察最坏情况：当 $c_0=c_{01}=10^{-3}$(克/米^3)时池内已处于稳态，$t=0$ 时 c_0 突然增至 $c_{02}=10^{-2}$(克/米^3)．在方程(1)、(2)中令 $c_0=c_{02}$，以(3)式算出的稳定平衡点(其中 $c_0=c_{01}$)为初值 $c(0)$，$b(0)$，用数值方法分别对于 $V=1.6\times10^4$(米^3)和 $V=3\times10^4$(米^3)两种容积计算 $c(t)$，所得结果如图 15－1 所示．

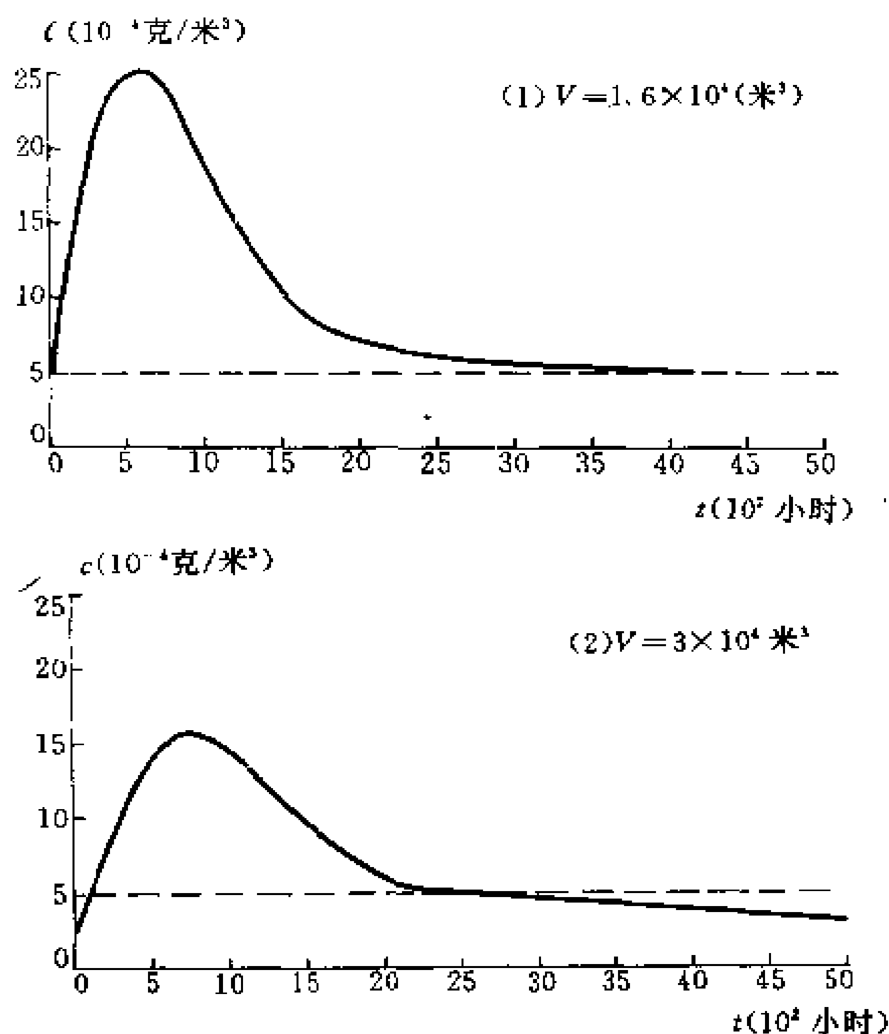


图 15－1 单池模型有害物质浓度 $c(t)$的变化

结果分析 首先，处理池的容积 V 必须满足(4)式，否则

平衡点 P_1 不稳定，而 P_2 稳定，这可以解释为，当 $d+\frac{Q}{V}>r_2c_0$，即微生物衰亡和排除的速率大于增殖率时，微生物浓度不能增长，处理方法失败．其次，由(3)式可知池内有害物质的稳定浓度 c 与入池的浓度 c_0 无关，所以不论 c_0 是给定区间 $[c_{01},c_{02}]$ 中的哪一个定值，为了使处理后的稳定浓度不超过 c^*，池的容积最小应为 1.6×10^4 米^3(见(5)式)．但是，动态过程的计算表明，当有害物质的入池浓度由 c_{01} 突增至 c_{02} 时，用这个容积的处理池将有约 1300 小时有害物质浓度超过标准值 c^* 的 2 倍，且最高达 c^* 的 5 倍(图 15－1(1))．即使池的容积增至 3×10^4 米^3，也有约 900 小时超标 2 倍，最高达 $3c^*$(图 15－1(2))．注意到这是一个长宽各 100 米、深 3 米的池子，已经太大了，再增大容积显然是不可接受的．

双池模型　研究用两个串接的池子代替一个池子的情况，相应的假设条件不变，池 I 的排出是池 II 的流入，各个量的符号如图15－2 所示．

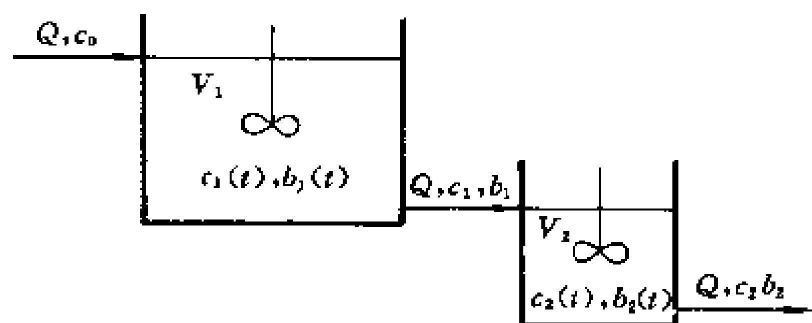


图 15－2　双池模型示意图

池 I 的方程与单池模型的(1)、(2)相同，即

$$\frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}t}=\frac{Q}{V_1}(c_0-c_1)-r_1b_1c_1 \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}b_1}{\mathrm{d}t}=(r_2c_1-d-\frac{Q}{V_1})b_1 \tag{7}$$

对于池II，有害物质浓度 $c_2(t)$ 的方程只须注意到入池浓度是 c_1 即可写出

$$\frac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}t} = \frac{Q}{V_2}(c_1 - c_2) - r_1 b_2 c_2 \tag{8}$$

而微生物浓度 $b_2(t)$ 的方程中则需加上由池I到池II的流入量，即有

$$\frac{\mathrm{d}b_2}{\mathrm{d}t} = (r_2 c_2 - d - \frac{Q}{V_2})b_2 + \frac{Q}{V_2}b_1 \tag{9}$$

关于**稳态情况**，方程(6)、(7)(即池I)的平衡点及稳定性与单池模型相同，平衡点

$$P_1: c_1 = \frac{d + Q/V_1}{r_2}, \quad b_1 = \frac{Q(c_0 - c_1)}{V_1 r_1 c_1} \tag{10}$$

在必要条件 $c_1 < c_0$ 即

$$V_1 > \frac{Q}{r_2 c_0 - d} \tag{11}$$

下是稳定的，(令 $c_0 = c_{01}$，同样有 $V_1 > 8 \times 10^3$ 米^3)

方程(8)、(9)(即池II)的平衡点 (c_2, b_2) 满足(习题1)

$$b_2 = \frac{Q(c_1 - c_2)}{V_2 r_1 c_2} \tag{12}$$

$$r_2 c_2^2 - (r_2 c_1 + r_1 b_1 + d + \frac{Q}{V_2})c_2 + c_1(d + \frac{Q}{V_2}) = 0 \tag{13}$$

方程(13)有两个根，因为要保证 $c_1 > c_2$ ($b_2 > 0$)和 (c_2, b_2) 的稳定，只取

$$c_2 = \frac{1}{2r_2}\left[(r_2 c_1 + r_1 b_1 + d + \frac{Q}{V_2}) - \sqrt{(r_2 c_1 + r_1 b_1 - d + \frac{Q}{V_2})^2 - 4r_2 c_1 (d + \frac{Q}{V_2})}\right] \tag{14}$$

要使稳定状态下的 $c_2 \leqslant c^*$，由(13)式可得 V_2 必须满足

$$V_2 \geqslant \frac{Q(c_1 - c^*)}{(c_1 - c^*)(r_2 c^* - d) - r_t b_1 c^*} \tag{15}$$

由(10)、(15)可知 c_0 越小时 b_1 越小，V_2 应越大．所以仍令 $c_0 = c_{01}$，在 $V_1 \geqslant 8 \times 10^3$（米^3）的几个取值下计算 c_1、b_1 和 V_2（$c_2 \leqslant c^*$），结果如表 15－1 所示．

表 15－1　$c_0 = 10^{-3}$，$c_2 \leqslant c^*$ 下的稳态结果

$V_1(\times 10^3)$	$c_1(\times 10^{-3})$	$b_1(\times 10^{-3})$	$V_2(\times 10^3)$
8	1.0	0.02	16.03
10	0.80	2.50	9.63
12	0.67	4.14	5.39
14	0.57	5.31	2.37
16	0.50	6.18	0.096

可以看出，较大的 V_1 和较小的 V_2 配合是应选择的方案．

关于**动态过程**．仍考察 c_0 由 c_{01} 突增至 c_{02} 的最坏情况．取 $V_1 = 1.4 \times 10^4$，$V_2 = 7 \times 10^3$，用数值方法计算 $c_2(t)$，结果如图 15－3．虽仍有约 1200 小时超过 c^*，但已经基本上不超过 $2c^*$ 了．

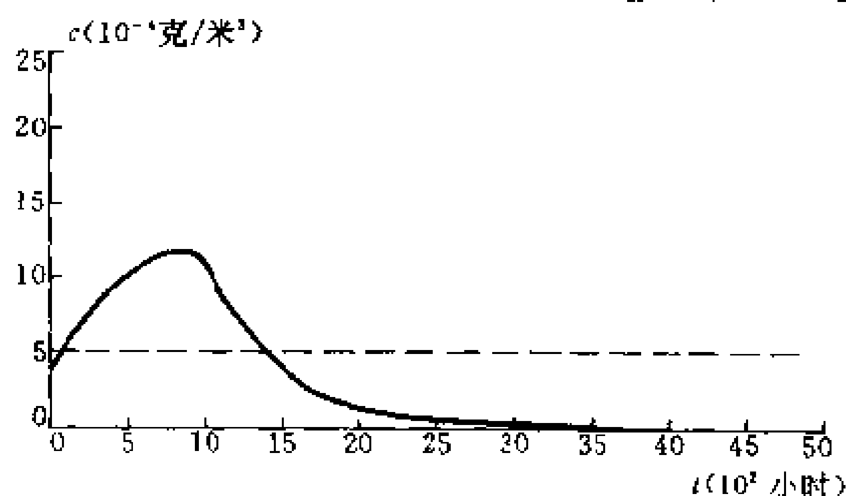


图 15－3　双池模型的 $c_2(t)$（$V_1 = 1.4 \times 10^4$ 米^3，$V_2 = 7 \times 10^3$ 米^3）

要使在上述动态过程中保持 $c_2(t) \leqslant c^*$，经计算需要 $V_1 =$

1.4×10^4，$V_2=2.5\times10^4$，结果如图 15－4．

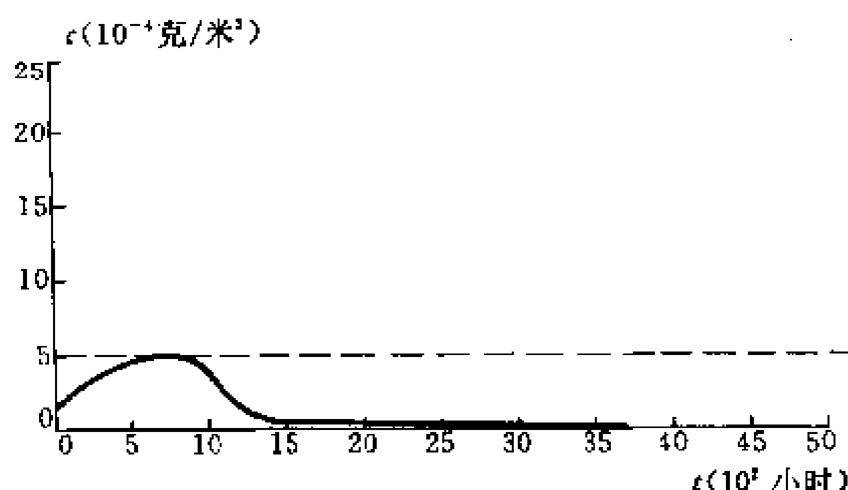


图 15－4　双池模型的 $c_2(t)$（$V_1=1.4\times10^4$ 米^3，$V_2=2.5\times10^4$ 米^3）

结果分析　双池比单池有明显的改进．用单池模型 $V=3\times10^4$ 时 $c(t)$ 的曲线（图 15－1（2））与双池模型 $V_1=1.4\times10^4$，$V_2=7\times10^3$ 时 $c_2(t)$ 的曲线（图 15－3）相比，双池的总容积减小近 1/3，而处理效果要好得多．这是一个可行方案，虽然仍有约 1200 小时超标，但是有害物质入池浓度由 10^{-3} 突增至 10^{-2} 属于极难出现的最坏情况．从经济角度考虑，不宜再增大池 II 的容积，一旦出现超标可按假设 7 的办法解决．

15.2　农作物灭虫药的使用

为了减少虫害给农作物收成带来的巨大损失，农民们普遍使用灭虫药．从经济学的观点看，什么时候使用灭虫药和使用多少药能够让损失降低到最小，是倍受关注的问题，让我们用一个数学模型描述它．

一般地，如果用 $u(t)$ 表示时刻 t 使用灭虫药的数量，用 $x(t)$ 表示时刻 t 害虫的数量，用 $F(x(t),u(t),t)$ 表示单位时间的总损失，包括被害虫 $x(t)$ 毁坏的农作物及灭虫药 $u(t)$ 的费用．设农作物生长季节期为 T，则总损失可记作

$$J(u,(t))=\int_0^T F(x,(t),u(t),t)\mathrm{d}t \qquad (1)$$

因为害虫数量 $x(t)$及其增长(或减少)率 $\dot{x}(t)$取决于灭虫药的数量 $u(t)$，所以有

$$\dot{x}(t)=f(x(t),u(t),t) \qquad (2)$$

于是(1)、(2)构成一个以 $u(t)$为控制函数、$x(t)$为状态函数的泛函极值问题.

本节不拟作一般性的讨论，而是在函数 $u(t)$的特殊形式下建立模型.考察农民使用灭虫药的实际情况，$u(t)$大体上呈图15－5表示的形式，即隔一段时间用一次药，用药时间很短(与整个生长季节相比).于是确定 $u(t)$就转化为确定 $\tau_1,\tau_2,\cdots$ 和 $u_1,u_2,\cdots$.为了进一步简化在下面模型中我们假定在整个生长季节只用一次药.原则上这可以推广到用若干次药的情况[32].

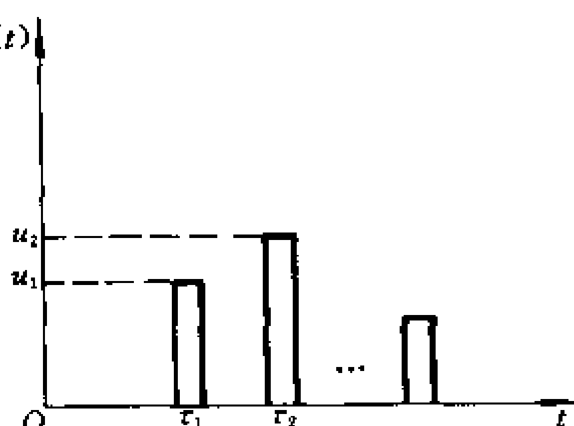


图15－5　使用灭虫药的实际情况

模型假设

1.未使用灭虫药时，害虫的自然(相对)增长率为 r，由于食物(农作物)丰富不考虑自身的阻滞作用；害虫迁移率为常数 $q>0$，表示由外界向所考察地域迁入；害虫的初始数量为 x_0.

2.在农作物的生长季节期内($0\leqslant t\leqslant T$)，仅在 $t=\tau$ 时使用数量为 u 的灭虫药.$u_0\leqslant u\leqslant u_m$，$u_0$ 是一阈值，当 $u\geqslant u_0$ 时灭虫药才有效用；u_m 是环境保护条例规定的上限.

3.使用单位数量灭虫药后，害虫减少量与当时害虫数量成正比，比例系数 α.这符合害虫分布较密的情况.

4.农作物被毁坏的数量与当时的害虫数 $x(t)$成正比，比例

系数 b，农作物的单价为 p（因时间较短不考虑折扣因子）．

5．使用灭虫药的固定费用为 c_0，单位数量灭虫药的费用为 c_1．

模型建立 建立模型的目的是确定使用灭虫药的时刻 τ 和数量 u，使整个期间 $(0\leqslant t\leqslant T)$ 内的总损失最小．根据假设 4、5 总损失应为

$$L(\tau,u)=c_0+c_1u+pb\int_0^T x(\tau,u,t)\mathrm{d}t \tag{3}$$

式中 $x(\tau,u,t)$ 表示害虫数量与 τ、u 有关．

根据假设 1，未用灭虫药时 $(t<\tau)$ 害虫的增长满足

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=rx+q,\ 0\leqslant t<\tau\\ x(0)=x_0\end{cases} \tag{4}$$

方程(4)的解为

$$x(t)=\left(x_0+\frac{q}{r}\right)e^{rt}-\frac{q}{r},\ 0\leqslant t<\tau \tag{5}$$

根据假设 2、3，在 $t=\tau$ 使用数量 u 的灭虫药后害虫的残存量 $x(\tau,u)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}=-\alpha x,\ u_0\leqslant u\leqslant u_m\\ x(\tau,u_0)=x^-(\tau)\end{cases} \tag{6}$$

其中 $x^-(\tau)$ 由(5)式令 $t\to\tau$ 时得到．方程(6)的解为

$$x(\tau,u)=x^-(\tau)e^{-\alpha(u-u_0)},\ u_0\leqslant u\leqslant u_m \tag{7}$$

当 $t>\tau$ 后害虫又按照方程(4)的规律由初值 $x(\tau,u)$ 增长，于是根据(5)式可以写出

$$x(t)=\left(x(\tau,u)+\frac{q}{r}\right)e^{r(t-\tau)}-\frac{q}{r},\ \tau\leqslant t\leqslant T \tag{8}$$

将(5)、(7)、(8)代入(3)式积分后可得

$$L(\tau,u)=c_0+c_1u+pb\left\{\frac{e^{r\tau}-1}{r}\left(x_0+\frac{q}{r}\right)+\frac{e^{r(T-\tau)}-1}{r}\right.$$

$$\left.\cdot\left[\left(x_0+\frac{q}{r}\right)e^{r\tau-\alpha(u-u_0)}+\frac{q}{r}\left(1-e^{-\alpha(u-u_0)}\right)\right]-\frac{qT}{r}\right\} \tag{9}$$

模型求解 首先利用(9)式计算，如果使用灭虫药，求用药的最佳时刻 τ^* 和数量 u^*，使总损失 $L(\tau,u)$ 达到最小.

利用微分法令 $\frac{\partial L}{\partial \tau}=0$ 可得

$$\tau=\frac{T}{2}-\frac{1}{2r}\ln\left(1+\frac{rx_0}{q}\right) \tag{10}$$

因为要求 $\tau\geqslant0$，令 $\tau=0$ 由(10)式可求出

$$q=q_c=\frac{rx_0}{e^{rT}-1} \tag{11}$$

所以最佳时刻 τ^* 应为

$$\tau^*=\begin{cases}0, & q\leqslant q_c\\ \dfrac{T}{2}-\dfrac{1}{2r}\ln\left(1+\dfrac{rx_0}{q}\right), & q>q_c\end{cases} \tag{12}$$

(11)式的 q_c 称临界迁移率.

令 $\frac{\partial L}{\partial u}=0$ 可得

$$u=u_0+\frac{1}{\alpha}\ln\left[\frac{\alpha pb}{c_1r}\left(e^{r(T-\tau)}-1\right)\left(\left(x_0+\frac{q}{r}\right)e^{r\tau}-\frac{q}{r}\right)\right] \tag{13}$$

为简化表达式，记

$$\delta(q)=\begin{cases}\dfrac{pbx_0}{r}(e^{rT}-1) & ,\ q\leqslant q_c\\ pb\left[\dfrac{\sqrt{q+rx_0}\ e^{\frac{rT}{2}}-\sqrt{q}}{r}\right]^2 & ,\ q>q_c\end{cases}\tag{14}$$

则(13)式可写作

$$u=u_0+\frac{1}{\alpha}\ln\frac{\alpha\delta}{c_1}\tag{15}$$

又因为 $u_0\leqslant u\leqslant u_m$，所以最佳用药量 u^* 应为

$$u^*=\begin{cases}u_0+\dfrac{1}{\alpha}\ln\dfrac{\alpha\delta}{c_1} & ,\ 1<\dfrac{\alpha\delta}{c_1}<e^{\alpha(u_m-u_0)}\\ u_m & ,\ \dfrac{\alpha\delta}{c_1}\geqslant e^{\alpha(u_m-u_0)}\end{cases}\tag{16}$$

这样，(11)、(12)、(14)、(16)构成了用药最佳时刻 τ^* 和数量 u^* 的表示式(习题2)。

其次，上面得到的使用灭虫药时的最小损失 $L(\tau^*,u^*)$ 应该与不使用药时的损失相比较，只有前者小于后者时才决定用药。

不使用灭虫药的损失记为 $L(\tau,0)$（实际上与 τ 无关），参考(3)式应有

$$L(\tau,0)=pb\int_0^T x(t)\mathrm{d}t\tag{17}$$

其中 $x(t)$ 由(5)式给出，由(17)式计算积分后可得

$$L(\tau,0)=\frac{pb}{r}\left[\left(x_0+\frac{q}{r}\right)(e^{rT}-1)-qT\right]\tag{18}$$

将(12)、(14)、(16)代入(9)式可以算出 $L(\tau^*,u^*)$，经化

简后再利用(18)式得到

$$L(\tau^*,u^*)-L(\tau,0)=\frac{c_1}{\alpha}\left[\alpha u_0+\frac{\alpha c_0}{c_1}+1+\ln\frac{\alpha\delta}{c_1}-\frac{\alpha\delta}{c_1}\right] \tag{19}$$

若记

$$w(q)=\alpha u_0+\frac{\alpha c_0}{c_1}+1+\ln\frac{\alpha\delta(q)}{c_1}-\frac{\alpha\delta(q)}{c_1} \tag{20}$$

则可以知道仅当条件

$$w(q)<0 \tag{21}$$

成立时才有

$$L(\tau^*,u^*)<L(\tau,0) \tag{22}$$

于是在时刻 τ^* 使用药量 u^* 是最佳选择.否则,在整个生长期应不使用灭虫药.

结果分析 在 τ^* 的表达式(12)中有一个阈值 q_c,当实际的害虫迁移率 $q\leqslant q_c$ 时 $\tau^*=0$,即生长季节一开始就用药,这是因为 q 较小,害虫的自然增长是虫害的主要原因,尽早地用药根除害虫更为有利;而当 $q>q_c$ 时外界迁入成为虫害的主体,所以要过一段时间再用药,并且 q 越大灭虫时间应越晚,但是总有 $\tau^*<\frac{T}{2}$,即用药时刻不应超过生长期的一半.另外,从 q_c 的表达式(11)可知,害虫的初始值 x_0 越大则 q_c 越大,增长率 r 越大则 q_c 越小,请读者分析其合理性.

在 u^* 的表达式(16)中规定了 $\frac{\alpha\delta}{c_1}>1$,因为否则由(20)式可知 $w(q)\geqslant 0$,按照(21)、(22)式根本不应用药.(16)、(14)式还表明,衡量药效的系数 α 越大,药的价格 c_1 越大,则用药量 u^* 越小;农作物单价 p 越大,衡量农作物损失的系数 b 越大,害虫的增长率 r、迁移率 q、初值 x_0 越大,则 u^* 越大.这些都是与常

识相符合的．对于使用药的条件(21)式的分析留给读者(习题2)．

评注 模型在适当的假设下得到的结果是合理的，但是由于表达式太复杂用起来十分不便．实际上一些农民在决定是否使用灭虫药时常采用比较简便的准则，譬如将不用药的损失 $L(\tau,0)$ 与用最大药量的费用 $c_0+c_1u_m$ 进行比较．当 $L(\tau,0)>c_0+c_1u_m$ 时就用最大药量 u_m 灭虫，用药时刻可以另行考虑或者按(12)式估计．而当 $L(\tau,0)<c_0+c_1u_m$ 时则不用药．这种简单方法与我们的模型确定的准则有什么关系，是一个复杂的问题(习题2)．

15.3 鲑鱼数量的周期变化

海洋中鱼的数量通常是按繁殖期的长短呈周期变化的．以太平洋里的鲑鱼为例，其生长、繁殖过程大致是，成年的鱼产下大量的卵，在卵成长为幼鱼和幼鱼长大的过程中，相当大的部分为成年的鱼吃掉，剩下来的还要被恶劣的环境淘汰一些，而成年的鱼在产卵后则活不了多久就会死掉．这样，如果我们在每个产卵期到来之前观察鲑鱼的数量，可以发现按照一定规律的周期变化．用什么样的模型既能在时间的离散点上(产卵期即将到来时)描述成年鲑鱼的数量变化，又能在每个繁殖期内描述从卵、幼鱼到成年鱼的演变过程，从而达到研究成年鲑鱼数量周期变化规律的目的呢．本节介绍一种所谓**嵌入式模型**，它把一个个短期内描述连续变化过程的微分方程，嵌入一个长期的描述离散变化规律的差分方程中，而那些描述短期演变过程的微分方程应该在定性上是相同的，只是从定量上看参数与初始条件有所改变．可以看出这种模型正好能描述鲑鱼的变化过程[32]．

模型假设 用 x_n 表示第 n 个繁殖期(下称周期)开始时成年鲑鱼(下称鲑鱼)的数量，以条数计．$n=0,1,2,\cdots,x_n$ 很大，可达 10^8 数量级．用 $y(t)$ 表示在每个周期内的时刻 t 幼鱼的数量．

为了把产卵过程和幼鱼被环境淘汰的作用分离出来，不妨设 $n<t_a\leqslant t\leqslant t_b<n+1$，$t_a=n+\varepsilon$，$t_b=n+1-\varepsilon$，$\varepsilon$ 很小．在 $[n, t_a]$ 和 $[t_b, n+1]$ 内允许数量上的突变，这种表示法的用处下面可以看出．利用这些符号将鲑鱼繁殖、成长和淘汰的假设叙述如下．

1．$y(t_a)$与 x_n 成正比，比例系数 α 相当于一条鱼的产卵量．

2．单位时间内 $y(t)$减少的比例与 x_n 成正比，比例系数 β 反映鲑鱼吞食幼鱼的能力．

3．x_{n+1} 与 $y(t_b)$成正比，比例系数 γ 表示在繁殖期末幼鱼存活长成鲑鱼的比例．

模型建立　根据假设条件容易写出

$$y(t_a)=\alpha x_n \tag{1}$$

$$\frac{\dot{y}}{y}=-\beta x_n, n<t_a\leqslant t\leqslant t_b<n+1 \tag{2}$$

$$x_{n+1}=\gamma y(t_b) \tag{3}$$

方程(2)的解为

$$y(t)=y(t_a)e^{-\beta x_n(t-t_a)} \tag{4}$$

将(1)、(4)代入(3)式得

$$x_{n+1}=\gamma\alpha x_n e^{-\beta(t_b-t_a)x_n}, n=0,1,2,\cdots \tag{5}$$

若记

$$a=\gamma\alpha, b=\beta(t_b-t_a) \tag{6}$$

则方程(5)可写作

$$x_{n+1}=ax_n e^{-bx_n}, \quad n=0,1,2,\cdots \tag{7}$$

差分方程(7)是将每周期内的微分方程(2)嵌入(1)、(3)得到的．这种嵌入式模型的一般形式可以表为

$$\begin{cases} y(t_a)=f(x_n) \\ \dot{y}(t)=g(y), \quad n<t_a\leqslant t\leqslant t_b<n+1 \\ x_{n+1}=h(y(t_b)) \end{cases} \tag{8}$$

差分方程(7)无法求出 x_n 的显式表达式，只能递推地求数

值解．例如设 $\alpha=10^5$，$x_0=1$（表示 1 个数量单位，譬如 10^8 条），第 1 代（$n=0$）鲑鱼吞食掉 90% 的幼鱼，即 $\dfrac{y(t_b)}{y(t_a)}=0.1$，代入（4）、（6）式可以算出

$$0.1=e^{-\beta(t_b-t_a)},\ b=\beta(t_b-t_a)=\ln 10\doteq 2.3$$

若设 γ 取 0.5×10^{-4}，1.1×10^{-4}，1.5×10^{-4}，则由（6）式

$$a=\gamma\alpha=5,11,15$$

将 a、b、x_0 代入（7）式递推地计算 x_n，考察鲑鱼数量的周期变化规律，结果如表 15－2．

表 15－2　按（7）式（$b=2.3$ 和不同的 a）计算的 x_n

n	$a=5$	$a=11$	$a=15$	n	$a=11$	$a=15$
0	1.000	1.000	1.000	21	1.725	2.396
1	0.500	1.100	1.500	22	0.3572	0.1443
2	0.7906	0.9611	0.7115	23	1.726	1.552
3	0.6402	1.156	2.074	24	0.3567	0.6526
4	0.7329	0.8876	0.2625	25	1.726	2.178
5	0.6778	1.265	2.151	26	0.3569	0.2167
6	0.7117	0.7562	0.2278	27	1.726	1.973
7	0.6912	1.458	2.022	28	0.3568	0.3147
8	0.7037	0.5584	0.2882	29	1.726	2.287
9	0.6961	1.698	2.226	30	0.3569	0.1771
10	0.7007	0.3744	0.1983	31	1.726	1.767
11	0.6979	1.739	1.884	32	0.3568	0.4531
12	0.6996	0.3488	0.3691	33	1.726	2.394
13	0.6986	1.719	2.367	34	0.3568	0.1449
14	0.6992	0.3614	0.1526	35	1.726	1.557
15	0.6988	1.730	1.611	36	0.3568	0.6481
16	0.6991	0.3545	0.5919	37	1.726	2.186
17	0.6989	1.724	2.272	38	0.3568	0.2137
18	0.6990	0.3581	0.1821	39	1.726	1.960
19	0.6989	1.727	1.796	40	0.3568	0.3225
20	0.6990	0.3562	0.4308			

由表可知，对于 $a=5$，x_n 趋向稳态值 0.699，即初值的70%；对于 $a=11$，x_n 交替地趋向两个稳态值 0.3568 和 1.726；对于 $a=15$ 则难以看出什么规律.

平衡点及稳定性分析 为了研究对于不同的 a，鲑鱼数量 x_n 的变化规律，我们利用 8.6 和 8.2 节的结果讨论差分方程(7)的平衡点及其稳定性.

方程(7)的平衡点 x^* 满足

$$x^* = ax^* e^{-bx^*} \tag{9}$$

容易得到(9)的非零解为*)

$$x^* = \frac{\ln a}{b} \tag{10}$$

平衡点 x^* 稳定的条件是 $|f'(x^*)|<1$，这里 $f(x^*)=ax^*e^{-bx^*}$（见 8.6 节 (13)式）. 因为

$$|f'(x^*)| = ae^{-bx^*}|1-bx^*| = |1-\ln a|$$

所以当 $-1<1-\ln a$，即

$$a<e^2=7.389$$

时 x^* 是稳定平衡点. 而当 $a>e^2$ 时 x^* 不稳定.

这个结果表明，x_n 是否稳定只取决于 a，与 b 无关. 而 $a=\gamma\alpha$，注意到 α 和 γ 的含义可知 a 表示的是鲑鱼从一个周期到下一周期增长关系的一个因素（增长率还与 b 有关）. 正是这个因素决定了 x_n 的稳态情况.

根据上述分析，当 $a=5$ 时 x^* 稳定，且若 $b=\ln 10 \doteq 2.3$，由(10)可得 $x^* \doteq 0.699$，而当 $a=11$，15 时 x^* 不稳定. 这些与前面的数值计算结果（表 15-2）是一致的.

为了进一步研究 $a>7.389$（如 $a=11$）时 x_n 的变化情况，应该考察方程（参看 8.2 节倍周期收敛一段）

---

*) $x^*=0$ 也是方程(7)的平衡点，但是容易验证它是不稳定的 $(a>1)$，不再讨论它，以后平衡点均指非零的.

$$x_{n+2}=f(x_{n+1})=f^{(2)}(x_n) \tag{11}$$

其中f的具体形式由方程(7)给出．

首先用无量纲化方法简化方程，令

$$z_n=\frac{bx_n}{\ln a} \tag{12}$$

则方程(7)化为

$$z_{n+1}=z_n e^{\lambda(1-z_n)}, \tag{13}$$

$$\lambda=\ln a \tag{14}$$

显然，当$\lambda<2$时$z^*=1$是方程(13)的稳定平衡点，而$\lambda>2$时$z^*=1$不稳定．下面讨论$\lambda>2$的情况．

考察方程

$$z_{n+2}=g(z_{n+1})=g^{(2)}(z_n) \tag{15}$$

其中g由(13)给定．方程(15)的平衡点除$z^*=1$以外还有z_1^*和z_2^*，满足

$$z_1^*=z_2^* e^{\lambda(1-z_2^*)}, \quad z_2^*=z_1^* e^{\lambda(1-z_1^*)} \tag{16}$$

由(16)不难得到

$$z_1^*+z_2^*=2 \tag{17}$$

于是z_1^*、z_2^*是方程

$$we^{\lambda(1-w)}=2-w \tag{18}$$

的两个根．若记函数

$$h(w)\equiv we^{\lambda(1-w)} \tag{19}$$

则曲线$W=h(w)$和直线$W=2-w$有3个交点，其横坐标是z_1^*,1和z_2^*(图15－6)．当$a=11$时$\lambda=\ln a=2.398$，用数值方法可以算出(习题3)

$$z_1^*=0.3427,\ z_2^*=1.6573 \tag{20}$$

z_1^*、z_2^*是方程(15)稳定平衡点的条件为

$$|(g^{(2)}(z))'|_{z=z_1^*,z_2^*}|<1$$

经过较精密的计算得到，当

$$2<\lambda<2.5265 \quad (21)$$

时上述条件成立．

这个结果表明，在条件(21)下方程(13)给出的序列 z_n 是二倍周期稳定的，即子序列 z_{2k} 和 z_{2k+1} 当 $k\to\infty$ 时分别趋向于 z_1^* 和 z_2^*．

代回到原变量 x_n，由(14)式可知条件(21)相当于

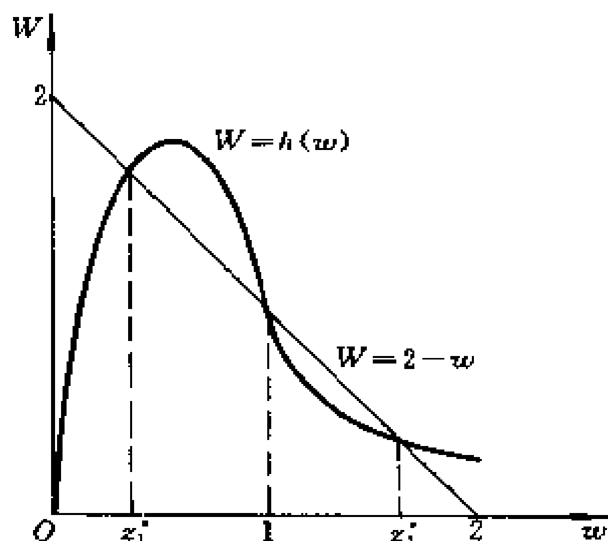


图15－6 平衡点 z_1^*、z_2^* 的图解法

$$7.389<a<12.51 \tag{22}$$

所以当 $a=11$ 时 x_n 是二倍周期稳定的，两个稳定值 x_1^* 和 x_2^* 可以从(由(12)式)

$$x_{1,2}^*=\frac{\ln a}{b}z_{1,2}^* \tag{23}$$

和(20)式算出．当 $b=\ln 10\doteq 2.3$ 时

$$x_1^*=0.3569,\quad x_2^*=1.7259$$

与表15－2的结果一致．

当 $\lambda>2.5265$ 以后应该研究 z_n 的 2^k 倍周期稳定的情况($k=2,3,\cdots$)．若记 λ_k 是 2^k 倍周期稳定的上限，有结果指出当 $k\to\infty$ 时，$\lambda_k\to 2.6924$，当 $\lambda>2.6924$ 时 z_n 的趋势出现浑沌现象．表15－2中的 $a=15$ 相当于 $\lambda=2.71$，所以 x_n 的变化没有什么规律可言．

评注 嵌入式模型适用于将各个周期内用微分方程描述的性质上相同的连续变化规律，嵌入到长期的用差分方程描述的离散变化过程的问题．除了生物的周期性繁殖现象以外，再生资源的周期性收获，人体对周期性注入药物的反应，周期性排放污染物的环境变化等都可以用这种模型研究．

这里我们再一次遇到 8.2 节差分形式阻滞增长模型中出现的情况，即序列 x_n 的 2^k 倍周期收敛现象 $(k=0,1,2,\cdots)$. 因为方程(13)的非线性程度更高，所以对平衡点收敛性的分析更为困难.

15.4　国民经济的积累与消费

资金和劳动力是发展经济的两大重要因素. 在 5.2 节用生产函数描述了产量即国民经济收入与资金、劳动力之间的关系. 国民经济收入主要用于扩大再生产的积累和人民生活需要的消费两大方面，在 7.3 节讨论了怎样控制积累率使国民经济收入增长最快的问题. 进行经济建设. 发展生产力的最终目的是提高人民的生活水平，增强综合国力. 人民生活水平可以用每人占有的消费资金的数量来衡量. 本节要利用 5.2 和 7.3 节给出的基本关系讨论，通过对积累率的控制使人均消费资金在一定意义下达到最大. 下面先建立一般模型，然后分别研究稳态和动态过程[42].

一般模型　资金、劳动力和经济收入分别记作 $K(t)$、$L(t)$ 和 $Q(t)$，它们之间的关系用生产函数 F 表示，即

$$Q(t)=F(K(t),\ L(t)) \tag{1}$$

另一方面，经济收入 $Q(t)$可分解为积累资金 $I(t)$和消费资金 $C(t)$，即

$$Q(t)=I(t)+C(t) \tag{2}$$

生产资金 $K(t)$的增加和 $K(t)$本身的贬值由积累资金 $I(t)$补充和提供，可设

$$\dot{K}(t)+\gamma K=I(t),\quad K(0)=K_0 \tag{3}$$

其中 γ 为贬值率. 又设劳动力以固定比例 ρ 增长，即

$$\dot{L}(t)=\rho L,\ L(0)=L_0 \tag{4}$$

对于给定的生产函数 F，当 $C(t)$已知时可以从(1)~(4)确定 $K(t)$、$L(t)$、$I(t)$和 $Q(t)$.

关于生产函数 F 可以合理地假设它对变量 K 和 L 都是递增的、上凸的、且渐近地达到最大值，即有

$$F_K>0\,,\ F_{KK}<0\,,\ \lim_{K\to\infty} F_K=0 \tag{5}$$

$$F_L>0\,,\ F_{LL}<0\,,\ \lim_{L\to\infty} F_L=0 \tag{6}$$

并且 F 对 K 和 L 是齐次的，即对于实数 a

$$F(aK\,,aL)=aF(K\,,L) \tag{7}$$

利用这个性质，令 $a=\dfrac{1}{L}$ 并记

$$k=\frac{K}{L} \tag{8}$$

则人均收入 $\dfrac{Q}{L}$ 为

$$\frac{Q}{L}=\frac{1}{L}F(K\,,L)=F(k\,,1)\equiv f(k) \tag{9}$$

这里 k 是人均占有的生产资金.

对(8)式求导并利用(4)式可得

$$\dot{k}=\frac{\dot{K}}{L}-\rho k \tag{10}$$

若记人均消费资金为

$$c=\frac{C}{L} \tag{11}$$

则由(2)、(3)和(8)~(11)导出

$$f(k)=\frac{C+I}{L}=c+\frac{\dot{K}}{L}+\gamma\frac{K}{L}=c+\dot{k}+\rho k+\gamma k$$

记

$$\mu=\rho+\gamma \tag{12}$$

$$k_0=\frac{K_0}{L_0} \tag{13}$$

则得到关于 $k(t)$ 的微分方程

$$\dot{k}=f(k)-\mu k-c, \quad k(0)=k_0 \tag{14}$$

对于给定的生产函数 $f(k)$，$k(t)$ 由 $c(t)$ 确定．

对 5.2 节中给出的道格拉斯生产函数

$$F(K,L)=f_0K^{\alpha}L^{1-\alpha}, \quad 0<\alpha<1$$

不难验证 F 满足条件(5)～(7)．并且由(9)式可知

$$f(k)=f_0k^{\alpha}, \quad 0<\alpha<1 \tag{15}$$

稳态分析　为了分析人均消费资金 $c(t)$ 在时间充分长以后对经济发展(用人均生产资金 $k(t)$ 表示)的影响，考察国民经济收入的积累率 $\frac{I}{Q}$ 为常数的情况，记为

$$s=\frac{I}{Q} \tag{16}$$

于是由(2)、(11)、(16)得

$$c=(1-s)\frac{Q}{L}=(1-s)f(k) \tag{17}$$

方程(14)化为

$$\dot{k}=sf(k)-\mu k, \quad k(0)=k_0 \tag{18}$$

不妨设 $f(0)=0$（见(15)式），则 $k=0$ 和 $k=k_\infty(>0)$ 是方程(18)的平衡点，其中 k_∞ 满足

$$sf(k_\infty)=\mu k_\infty \tag{19}$$

容易验证 k_∞ 是稳定的，而 $k=0$ 不稳定，$k_\infty(s)$ 可以由(19)式用数值计算或图解法求出(习题 4)．

将 t 充分长以后的 $c(t)$ 记作 c_∞，(17)式写作

$$c_\infty=(1-s)f(k_\infty(s)) \tag{20}$$

下面讨论使稳定的人均消费资金 c_∞ 达到最大的条件．由(20)和(19)式可以算出

$$\frac{\mathrm{d}c_\infty}{\mathrm{d}s}=\frac{f(k_\infty)}{\mu-sf'(k_\infty)}[f'(k_\infty(s))-\mu] \tag{21}$$

记 $s=s^*$ 时 c_∞ 达到最大，则 s^* 满足(习题4)

$$f'(k_\infty(s^*))=\mu \tag{22}$$

或者将(19)代入(22)式可得

$$s^*=\frac{k_\infty(s^*)f'(k_\infty(s^*))}{f(k_\infty(s^*))} \tag{23}$$

(22)或(23)式在经济学中称为资本积累的黄金准则．注意到 μ 的含义(12)式，(22)式可以解释为，使人均消费资金 c_∞ 达到最大的积累率 s^* 应该是，人均占有生产资金 k_∞ 增加一个单位时，人均国民经济收入的增长恰好被劳动力的增长 ρ 和资本的贬值 γ 所平衡．

对于(15)定义的道格拉斯生产函数容易得到

$$k_\infty=\left(\frac{sf_0}{\mu}\right)^{1/1-\alpha}$$

$$c_\infty=(1-s)f_0\left(\frac{sf_0}{\mu}\right)^{\alpha/1-\alpha}$$

$$s^*=\alpha$$

动态过程 在稳态分析中以时间充分长后人均消费资金作为人民生活水平的代表，讨论使它达到最大的条件．在动态过程中我们研究在一定时间 T 内，由人均消费资金 $c(t)$决定的效用函数 $U(c(t))$在一定折扣因子 δ 下的总和达到最大的问题，即目标函数可表为

$$J=\int_0^T e^{-\delta t}U(c(t))\mathrm{d}t \tag{24}$$

其中 $c(t)$满足方程(14)，将(14)代入(24)得

$$J=\int_0^T e^{-\delta t}U(f(k)-\mu k-\dot{k})\mathrm{d}t \tag{25}$$

使泛函 J 达到最大值的 $k(t)$满足欧拉方程．若记

$$U'(c)=u \tag{26}$$

则相应的欧拉方程为

$$\dot{u}=u[(\mu+\delta)-f'(k)] \tag{27}$$

为了确定起见，设效用函数为

$$U(c)=\frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma},\ 0<\sigma<1 \tag{28}$$

反映人民生活水平随人均消费资金变化的情况．则方程(27)化为

$$\dot{c}=\frac{c}{\sigma}[f'(k)-(\mu+\delta)] \tag{29}$$

与方程(14)

$$\dot{k}=f(k)-\mu k-c \tag{30}$$

联立，用以确定使泛函 J 达到最大的 $c(t)$、$k(t)$．

以道格拉斯生产函数(15)式代入(29)、(30)得

$$\begin{cases}\dot{c}=\dfrac{c}{\sigma}[f_0\alpha k^{\alpha-1}-(\mu+\delta)]\\ \dot{k}=f_0k^{\alpha}-\mu k-c\end{cases} \tag{31}$$

在 $k\sim c$ 平面上方程(31)有 3 个平衡点 $(0,0)$，$(\bar{k}_{\alpha},0)$和$(\bar{k},\bar{c})$，这里

$$\bar{k}_{\alpha}=\left(\frac{f_0}{\mu}\right)^{1/1-\alpha},\ \bar{k}=\left(\frac{f_0\alpha}{\mu+\delta}\right)^{1/1-\alpha},\ \bar{c}=\frac{\bar{k}}{\alpha}[(1-\alpha)\mu+\delta]$$

相轨线如图 15－7 所示，可以看出$(\bar{k},\bar{c})$是一个鞍点(习题 4)．

实际上 $c(t)$，$k(t)$是哪一条轨线由端点条件确定．始端条件已由方程(14)中 $k(0)=k_0$ 给定，如果终端条件是 $k(T)=k_T$，则轨线完全被确定，并且进一步的分析指出，当 $T\to\infty$ 时这条轨线越来越接近过鞍点$(\bar{k},\bar{c})$的轨线．

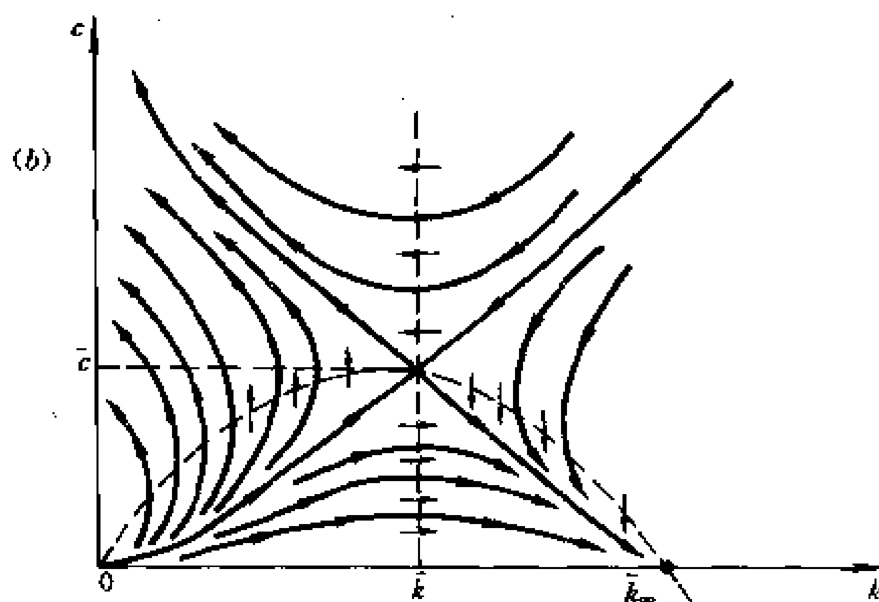


图 15－7　方程(31)的轨线示意图

值得注意的是那些趋向 c 轴的轨线，因为 $k\to 0$ 时 $c>0$，$|\dot{k}|>0$，所以轨线将在某时刻与 c 轴相交．而一旦相交即有 $k=0$，不再有任何生产，因而也谈不上消费了．在其它端点条件下轨线趋向的进一步讨论见文献[42]．

15.5　交通量分布的最大熵模型

城市交通网络布局合理、通行方便是现代文明城市的重要标志之一，也是关系到广大市民生活的重大问题．为了对未来的交通网络作出合理的规划，需要根据现有的交通路线、交通量等资料和交通问题的基本原理，结合城市发展状况，建立交通网络优化模型．它大致包含这样几个子模型．

交通量生成模型 根据居民区、工厂、机关、学校等的分布情况把要规划的区域分成若干小区，每个小区用一个点表示．每天(或某个时段)从每点出行的人数及到达每点的人数称为交通生成量．用抽样调查方法可以得到当前的交通生成量．然后根据城市发展状况预测出规划期的交通生成量．

交通量分布模型 从每个点出行的人们到哪一点去，取决于各点之间的距离、费用及其他相互"吸引"作用等因素．各点之间来往的人数称为交通量的分布，需要根据交通生成量和这些相互"吸引"作用的数量描述，按照一定的原理得到交通量的分布．

交通方式选择和交通量分配模型 对于交通量的分布按照一定原则选择交通方式如公共汽车、地铁、自行车等．还要按照某种优化准则(如时间最短、费用最少、服务最好等)分配到现有的或规划的路网上．

建立这几个模型有很多种方法，本节只讨论怎样利用最大熵原理建立交通量分布模型．下面先简单介绍熵的概念和最大熵原理．

熵(Entropy) 熵本来是分子热力学中的一个概念，是对在分子随机运动下物质所处状态的一种数量描述．后来被引用到信息论中，衡量随机试验得到的信息量的大小．举一个简单例子．

有 n 个人和 s 个编了号的房间，把所有人随机地进入房间作为一次随机试验．如果不对试验附加任何条件的话，那么经过大量试验可以发现，最容易出现的结果(或者说出现次数最多的结果)是 n 个人平均地进入 s 个房间(设 $n \gg s$ 且 n 可被 s 整除)．这相当于每个人进入任何一个房间的概率都等于 $1/s$．所以最容易出现的结果来源于等概率分布．为了度量不同的概率分布下随机试验结果的确定性程度，人们引入了熵的概念．

在 n 人进入 s 个房间的随机试验中，进入的方式越多，结果的确定性越大．所以应该考察在不同概率分布下进入方式的数目．若指定第 i 号房间进入 n_i 人 $(i=1,2,\cdots,s)$，满足 $\sum_{i=1}^{s} n_i = n$，

则根据组合理论共有

$$w=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_s!} \tag{1}$$

种进入方式．利用 Stirling 公式 $n!=\sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}$ $(0<\theta<1)$，(1)式近似地为

$$w\doteq\frac{n^n}{n_1^{n_1}n_2^{n_2}\cdots n_s^{n_s}} \tag{2}$$

对(2)式取对数并用 n 平均可得

$$\frac{\ln w}{n}\doteq-\sum_{i=1}^{s}\frac{n_i}{n}\ln\frac{n_i}{n} \tag{3}$$

当 n_i 很大时可以认为每个人进入第 i 号房间的概率 $p_i=\frac{n_i}{n}$．对于概率分布 $p_i=\frac{n_i}{n}$ $(i=1,2,\cdots s)$定义

$$H(p_1,p_2,\cdots,p_s)=-\sum_{i=1}^{s}p_i\ln p_i \tag{4}$$

比较(3)、(4)可知 H 反映了进入方式的数目，概率分布 p_i $(i=1,2,\cdots,s)$不同，H 不同，H 称为**概率分布** $p_i(i=1,2,\cdots,s)$ **下随机试验的熵**．试验中最可能出现的结果是在 H 最大的那个概率分布的条件下进行的．

实际上用数学方法容易验证，当 $p_i=\frac{1}{s}$ $(i=1,2,\cdots,s)$时 H 最大．这只需用拉格朗日乘子法构造函数

$$L=H+\lambda\sum_{i=1}^{s}p_i$$

令 $\frac{\partial L}{\partial p_i}=0$ $(i=1,2,\cdots,s)$并注意到 $\sum_{i=1}^{s}p_i=1$，即可得到结果．

最大熵原理 我们已经看到，对于(4)式定义的离散型概率分布的熵，如果对试验不加任何限制，那么均匀分布对应的熵最大.对于连续型概率分布，记概率密度函数为$p(x)(-\infty<x<\infty)$,则随机试验的熵定义为

$$H(p(x))=-\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\ln p(x)\mathrm{d}x \tag{5}$$

若$p(x)$仅在有限区间$[a,b]$以内取非零值，那么可以证明：当$p(x)=\frac{1}{b-a}$时$H(p(x))$最大(习题5).即结论仍是均匀分布的熵最大.

分子热力学认为，熵反映了物质内部能量所处的状态.熵最大，表示内能处于稳定的最低状态，所以在不附加任何条件时，它处于均匀分布状态.这可以解释许多最终进入均匀状态的自然现象，例如加热后的物体温度会逐渐下降，最终与周围环境温度一致；一杯水中放入可溶解杂质，最终会均匀分布开来.

在有附加条件限制时，使熵最大的概率分布就不一定是均匀分布了.一个重要的结论是：在方差一定的连续型概率分布中，以正态分布的熵最大(习题5).

根据概率论的中心极限定理，如果一个随机试验的结果是由大量的、相互独立的随机因素造成的，并且每一个因素都不起突出的作用，那么表示这个结果的随机变量将遵从正态分布.正态分布的方差是由表征各个因素的随机变量的方差的总和决定的.上面的结论恰好说明，如果一个系统的状态在许多相互独立的、均匀地小的随机因素影响下，保持方差一定，那么这个系统状态的概率分布是使它的熵最大的正态分布.这个结果推广到更一般的情形，即所谓“最大熵原理”.

一个系统称为基本对称系统，如果它的状态受到许多相互独立的、均匀地小的随机因素的影响.“最大熵原理”表明，一个基

本对称系统的状态的概率分布，应在表征这个系统状态的约束条件下使这个分布所定义的熵最大.如正态分布是限定状态的方差一定时熵最大的分布.

交通量分布的最大熵模型 将最大熵原理用来确定交通量分布的基本想法是，把交通网络看作一个基本对称系统，利用交通生成量及其分布定义系统状态的概率分布及对应于分布的熵.然后在关于该系统状态的约束条件下求使熵最大的那个分布，它就是我们要确定的交通量分布.

假定已经从交通量生成模型得到：考察区域内共 s 个点，出行总人数为 n，从第 i 点出行(Origin)的人数为 o_i，到达(Destination)第 j 点的人数为 d_j $(i,j=1,2,\cdots,s)$，满足

$$\sum_{i=1}^{s} o_i=\sum_{j=1}^{s} d_j=n \tag{6}$$

设从第 i 点出行、到达第 j 点的人数为 n_{ij}，矩阵 $\{n_{ij}\}_{s\times s}$ 称为 *OD* **矩阵**. 交通量分布模型的任务是根据 o_i、d_j 和其他可能存在的条件，按照一定的原理确定 *OD* 矩阵.

OD 矩阵的元素 n_{ij} 显然应满足

$$\sum_{j=1}^{s} n_{ij}=o_i,\ \sum_{i=1}^{s} n_{ij}=d_j \tag{7}$$

(7)式是 $2s$ 个方程，无法直接求解 s^2 个未知数 n_{ij}. 为了利用最大熵原理，令

$$a_i=\frac{o_i}{n},\ b_j=\frac{d_j}{n},\ p_{ij}=\frac{n_{ij}}{n} \tag{8}$$

a_i 可视为每个人由第 i 点出行的概率，b_j 为到达第 j 点的概率，p_{ij} 则为由第 i 点出行且到达第 j 点的概率，由(7)、(8)式可知

$$\sum_{i=1}^{s} a_i=\sum_{j=1}^{s} b_j=1 \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{s} p_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^{s} p_{ij} = b_j \tag{10}$$

按照(4)式概率分布 p_{ij} 定义的熵为

$$H(p_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots, s) = -\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} p_{ij} \ln p_{ij} \tag{11}$$

最简单情况 如果除了(9)、(10)以外对 p_{ij} 不再附加其它约束条件，那么使(11)式定义的熵 H 最大的 p_{ij} 就是要找的概率分布．这个问题归结为在(9)、(10)下求(11)的条件极值．利用拉格朗日乘子法构造

$$L = H + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \sum_{j=1}^{s} p_{ij} + \sum_{j=1}^{s} \mu_j \sum_{i=1}^{s} p_{ij} \tag{12}$$

令 $\dfrac{\partial L}{\partial p_{ij}} = 0$，可得

$$p_{ij} = e^{\lambda_i + \mu_j - 1} \tag{13}$$

将(13)式重新写成

$$p_{ij} = u_i v_j \tag{14}$$

利用(10)式可得

$$p_{ij} = \frac{a_i b_j}{\sum_{i=1}^{s} u_i \sum_{j=1}^{s} v_j}$$

再由(9)式最后得到

$$p_{ij} = a_i b_j \tag{15}$$

在没有对 p_{ij} 附加其它约束条件下这是最可能出现的结果，可以看作一定意义下的“均匀分布”状况．

引入“费用”的情况 实际上从第 i 点出行的人总是根据特定的需要或者费用、时间等因素被第 j 点的特征所“吸引”．将第 j 点对第 i 点出行的人的“吸引”作用抽象成附加在 p_{ij} 上的权 c_{ij}，

可以理解为由第 i 点到第 j 点的广义费用系数．若广义费用的最大限额为 c，则应有

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} c_{ij}p_{ij}=c \qquad (16)$$

增加这个约束条件后(12)式的函数 L 应添上一项 $\gamma\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}c_{ij}p_{ij}$．类似地可解得

$$p_{ij}=\lambda_i\mu_j\ e^{-\gamma c_{ij}} \qquad (17)$$

λ_i，μ_j 由(10)式确定．或者利用 $\sum_{j=1}^{s}p_{ij}=a_i$ 可得

$$p_{ij}=a_i\,\mu_j\,e^{-\gamma c_{ij}}\Big(\sum_{j=1}^{s}\mu_j e^{-\gamma c_{ij}}\Big)^{-1} \qquad (18)$$

与 $\sum_{i=1}^{s}p_{ij}=b_j$ 和(16)式联立，用数值法可以算出 p_{ij}．

已知先验概率的情况[22] 如果用抽样调查的方法知道了当前的 OD 矩阵，它可以作为预测期 OD 矩阵的先验估计，那么相当于已知概率 p_{ij} 的先验概率，记作 p_{ij}'，在 p_{ij}' 下预测期 OD 矩阵元素 n_{ij} 的概率分布为

$$P=\frac{n^n}{\prod_{i,j=1}^{s}n_{ij}^{n_{ij}}}\prod_{i,j=1}^{s}p_{ij}'^{\,n_{ij}} \qquad (19)$$

n_{ij} 的取值应使 P 达到最大．类似于(1)～(4)的推导可知，这等价于使

$$H=-\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}p_{ij}\,(\ln p_{ij}-\ln p_{ij}') \qquad (20)$$

在条件(9)、(10)下达到最大．再用类似于(12)～(15)的推导可得

$$p_{ij}=u_iv_jp_{ij}' \qquad (21)$$

u_i, v_j 由(10)式确定．或者

$$p_{ij}=\frac{v_j a_i p'_{ij}}{\sum_{j=1}^{s} v'_j p'_{ij}} \tag{22}$$

其中 v_j 由 $\sum_{i=1}^{s} p_{ij}=b_j$ 确定(习题6)．

习　题

1．在15.1节废水处理模型中

① 分析单池模型(1)、(2)平衡点的稳定性．

② 求双池模型方程(8)、(9)(即池Ⅱ)的平衡点并讨论其稳定性．

2．在15.2节农作物灭虫药使用模型中

① 推导 τ^* 和 u^* 的表达式(12)、(16)．

② 根据(21)、(22)式分析使用灭虫药的条件与各参数的关系．

③ 讨论用评注中介绍的简便方法得到的结果与模型的关系．

3．在15.3节嵌入式模型中证明，当 $\lambda>2$ 时方程(18)有3个根，即 z_1^*、1和 z_2^*．

4．在15.4节国民经济模型中

① 给出方程(18)的平衡点 k_∞ 的图解法．

② 证明满足(22)式的 s^* 确是 c_∞ 的最大值点．

③ 解释方程(31)的相轨线如图15－7所示．

5．在15.5节最大熵模型中

① 证明在有限区间取非零值的连续型概率分布中，均匀分布的熵最大．

② 证明在方差一定的连续型概率分布中，正态分布的熵最大．

6．在15.5节最大熵模型已知先验概率的情况下推导出(19)～(22)式．

参 考 文 献

[1] R. Aris: Mathematical Modelling Techniques. *San Francisco, Pitman Advanced Pub*. 1979

[2] M. A. Ball: Mathematics in the Social and Life Sciences. *John Wiley & Sons* 1985

[3] D. J. Bartholomew: Stochastic Models for Social Processes. 1973

[4] E. A. Bender: An Introduction to Mathematical Modelling. *Wiley Interscience, New York* 1978

[5] J. S. Berry: Teaching and Applying Mathematical Modelling. *John Wiley & Sons* 1984

[6] U. N. Bhat: Elements of Applied Stochastic Processes. (*second edition*) *John Wiley & Sons* 1984

[7] W. E. Boyce: Case Studies in Mathematical Modelling. *Pitman, Mass* 1980

[8] J. A. Bondy: 图的理论及应用.(吴望名等译)科学出版社 1984

[9] M. Braun: 微分方程及其应用.(张鸿林译)人民教育出版社 1980

[10] D. N. Burghes, M. S. Borrie: Modelling with Differentical Equations. *Chichester, Horwood* 1981

[11] D. N. Burghes, I. Huntley, J. Mcdonald: Applying Mathematics: A Course in Mathematical Modelling. *John Wiley & Sons* 1982

[12] D. N. Burghes, A. D. Wood: Mathematical Models in the Social Management and Life Sciences. *Halsted Press* 1981

[13] C. W. Clark: Mathematical Bioeconomics. *Wiley-Interscience, New York* 1976

[14] C. W. Clark: The Economics of Overexploitation. *Science Vol*. 181 *P*630 1973

[15] M. Cross, A. O. Moscardini: Learning the Art of Mathematical Modelling. *John Wiley & Sons* 1985

[16] F.R.Giordano, M.D.Weir: A First Course in Mathematical Modelling. *Brook/Cole Publishing Company* 1985

[17] R.Harberman: Mathematical Models. *Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.* 1977

[18] Isaacson E.de st.Q., Isaacson M.de st.Q.: Dimensional Methods in Engineering and Physics, *Edward Arnold* 1975

[19] D.J.G.James, J.Medonald: Case Studies in Mathematical Modelling. *Wiley, New York* 1981

[20] M.I.Kamien, N.L.Schwartz: Dynamic Optimization. The Calculus and Variations and Optimal Control in Economics and Management. *North-Holland* 1981

[21] J.N.Kapur: Mathematical Modelling. *John Wiley & Sons* 1988

[22] Katsunao Kondo, Tsuna Sasaki: An Entropy-maximising Distribution Model and its Application to a Land-use Model. Traffic Transportation and Urban Planning. *London Hutchinson Ross*, 1981

[23] J.B.Keller: Optimal Velocity in a Race, *The American Mathematical Monthly. Vol*.81 *P*474 1974

[24] S.A.Levin: Applied Mathematical Ecology. *Springer-Verlay* 1989

[25] J.Q.Lin(林家翘), L.A.Segel: 自然科学中确定性问题的应用数学.(赵国英等译)科学出版社 1986

[26] J.D.Logan: Applied Mathematics-A Contemporary Approach. *John Wiley & Sons* 1987

[27] W.F.Lucas*): 微分方程模型.(朱煜民等译)国防科技大学出版社 1988

[28] W.F.Lucas: Discrete and System Models. *Springer-Verlay* 1983

[29] W.F.Lucas: Political and Related Models. *Springer-Verlay* 1983

[30] W.F.Lucas: Life Science Models. *Springer-Verlay* 1983

---

*) [27]～[30]分别是W.F.Lucas主编的"应用数学模型"丛书的1～4卷.

[31] W.J.Meger: Concept of Mathematical Modelling. *McGraw-Hill Book Company* 1985

[32] Michael Mesterton-Gibbons: A Concrete Approach to Mathematical Modelling. *Addison-Wesley Publishing Company, Inc*, 1989

[33] R.E.Miller: Dynamic Optimization and Economic Applications. *McGraw-Hill* 1979

[34] B.Noble: Application of Undergraduate Mathematics in Engineering.

[35] Oliveira-Pinto F., B.W.Conolly: Applicable Mathematics of Non-physical Phenomena. *Chichester, Ellis Horwood Limited* 1982

[36] E.C.Pielou: 数学生态学.(卢泽愚译) 科学出版社 1988

[37] F.S.Roberts: Discrete Mathematical Models. *Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J*, 1976

[38] T.L.Saaty, J.M.Alexander Thinking with Models. *Pergamon Press, Oxford* 1981

[39] T.L.Saaty: The Analytic Hierarchy Process. *McGraw-Hill Company* 1980

[40] M.G.Singh, A.Titli: 大系统的最优化及控制.(周斌等译)机械工业出版社 1983

[41] Song Jian (宋健), Yu Jingyuan (于景元): Population System Control. *Springer-Verlay* 1988

[42] Frederic Y.M.Wan (温耀明): Mathematical Models and their Analysis. *Harper & Row Publishers* 1989

[43] A.H.吉洪诺夫, A.A.隆马尔斯基: 数学物理方程(下册).高等教育出版社 1957

[44] 刘元亮, 姚慧华, 寇世琪, 曾晓萱, 曹南燕, 高达声: 科学认识论与方法论. 清华大学出版社 1987

[45] 《运筹学》编写组: 运筹学(修订版). 清华大学出版社 1990

[46] 陈珽: 决策分析. 科学出版社 1987

[47] 王莲芬, 许树柏: 层次分析法引论. 中国人民大学出版社 1990

[48] 杨启帆, 边馥萍: 数学模型. 浙江大学出版社 1990

[49] 赵焕臣，许树柏，和金生：层次分析法．科学出版社 1986

[50] 陈兰荪：数学生态学模型与研究方法．科学出版社 1991

[51] 徐光辉：随机服务系统．科学出版社 1980

[52] 曹晋华、程侃：可靠性数学引论．科学出版社 1986

[53] 蒋庆琅［美］：随机过程原理与生命科学模型．(方积乾译) 上海翻译出版公司 1987

[54] 周怀梧：医用生物数学．人民卫生出版社 1990

[55] 储志俊，蒋勇：短跑跑速变化的数学模型．体育数学与体育系统工程 第一卷第二期 1991